PROPRIÉTÉS DIOPHANTIENNES DU DÉVELOPPEMENT EN COTANGENTE CONTINUE DE LEHMER

T. RIVOAL

RÉSUMÉ. On s'intéresse dans cet article à un algorithme, dû à Lehmer, qui permet d'écrire, de façon unique, tout nombre réel positif comme une série alternée de cotangentes évaluées en des entiers n_ν, $\nu \geq 0$. Nous continuons l'étude débutée par Lehmer et poursuivie par Shallit : entre autres choses, on explicite le lien entre les approximations rationnelles d'un réel donné produites par cet algorithme et les réduites usuelles de ce même réel et on détermine une borne quasi optimale de la croissance de la suite $(n_\nu)_{\nu\geq 0}$ associée à un nombre algébrique. On détermine également les fractions continues régulières d'une classe remarquable de développements en cotangente continue, ce qui nous permet de produire des mesures d'irrationalité très fines de ces développements.

ABSTRACT. This article deals with an algorithm devised by Lehmer which enables us to write any real positive number as the sum of an alternating series of cotangents of integers n_ν, $\nu \geq 0$ in a unique way. We continue the work begun by Lehmer and continued by Shallit : amongst other things, we give explicitly the link between the rational approximations of a given real number coming from this algorithm and the usual convergents of the same real number and we produce a quasi-optimal bound for the growth of the sequence $(n_\nu)_{\nu\geq 0}$ associated to an algebraic number. We also determine the regular continued fractions of an exceptional class of continued cotangent developments, which enables us to produce optimal irrationality measures of these expansions.

1. Introduction

Lehmer a introduit dans [3] une remarquable représentation des réels à l'aide de la fonction cotangente. Il avait en effet remarqué que les deux développements les plus connus des nombres sont obtenus par itération d'une fonction de deux variables : l'itération de la fonction $F(x, y) = x + y/q$ donne

$$F(n_0, F(n_1, F(n_2, \ldots))) = n_0 + \frac{n_1}{q} + \frac{n_2}{q^2} + \cdots ,$$

soit le développement en base q d'un réel, alors que l'itération de la fonction $F(x, y) = x + 1/y$ donne

$$F(n_0, F(n_1, F(n_2, \ldots))) = n_0 + \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cdots}} = n_0 + \frac{1|}{|n_1} + \frac{1|}{|n_2} + \cdots ,$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primaire 11A55 ; Secondaire 30B70, 40A15.

Key words and phrases. Développement en cotangente continue, fractions continues, mesures d'irrationalité.

soit le développement en fraction continue régulière d'un réel. Lehmer a alors eu l'idée de considérer la fonction

$$F(x,y) = \frac{xy+1}{y-x} = \cot(\operatorname{arccot}(x) - \operatorname{arccot}(y)),$$

dont les itérations successives donnent

$$F(n_0, F(n_1, F(n_2, \ldots))) = \cot\left(\sum_{\nu\geq 0}(-1)^\nu \operatorname{arccot}(n_\nu)\right).$$

Évidemment, rien n'assure *a priori* qu'une telle série converge, ni que l'on puisse représenter tous les réels de cette façon. Voici le résultat principal de Lehmer.

Théorème 1 (Lehmer)**.** (i) *Tout réel $X > 0$ s' écrit de façon unique sous la forme*

$$X = \cot\left(\sum_{\nu\geq 0}(-1)^\nu \operatorname{arccot}(n_\nu)\right), \tag{1.1}$$

où $(n_\nu)_{\nu\geq 0}$ est une suite d'entiers positifs tels que

- *si la suite est infinie, alors $n_{\nu+1} \geq n_\nu^2 + n_\nu + 1$;*
- *si la suite est finie, on a aussi $n_{\nu+1} \geq n_\nu^2 + n_\nu + 1$, sauf pour le dernier terme n_μ qui vérifie la condition plus forte $n_\mu > n_{\mu-1}^2 + n_{\mu-1} + 1$.*

La série à droite de (1.1) *est le développement en cotangente continue régulière de X.*

(ii) *On détermine la suite $(n_\nu)_{\nu\geq 0}$ associée à un réel X au moyen de l'algorithme suivant : on pose $X_0 = X$, $n_0 = \lfloor X_0 \rfloor$, puis par récurrence*

$$X_{\nu+1} = \frac{n_\nu X_\nu + 1}{X_\nu - n_\nu} \quad \text{et} \quad n_{\nu+1} = \lfloor X_{\nu+1} \rfloor.$$

(iii) *La suite $(n_\nu)_{\nu\geq 0}$ est finie si, et seulement si, le réel X associé est rationnel.*

Remarque. Les conditions de croissance de la suite $(n_\nu)_{\nu\geq 0}$ sont en apparence compliquées, mais elles sont essentielles puisqu'elles assurent l'unicité du développement en cotangente continue régulière. La nuance sur le dernier terme lorsque la suite $(n_\nu)_{\nu\geq 0}$ est finie se justifie ainsi : si le dernier terme n_μ vérifiait $n_\mu = n_{\mu-1}^2 + n_{\mu-1} + 1$, alors on pourrait contracter $\operatorname{arccot}(n_{\mu-1}) - \operatorname{arccot}(n_\mu)$ au moyen de la formule

$$\operatorname{arccot}(n_{\mu-1}) - \operatorname{arccot}(n_{\mu-1}^2 + n_{\mu-1} + 1) = \operatorname{arccot}(n_{\mu-1} + 1).$$

Puisque l'on suppose $n_{\mu-1} \geq n_{\mu-2}^2 + n_{\mu-2} + 1$, le dernier terme de la suite serait maintenant $n_{\mu-1} + 1$ qui vérifie bien $n_{\mu-1} + 1 > n_{\mu-2}^2 + n_{\mu-2} + 1$.

Il n'est pas possible de donner en détail dans cette introduction tous les résultats obtenus ici. Indiquons seulement les grandes lignes.

On commence par résumer au paragraphe 2 les résultats de Lehmer, en mettant l'accent sur les propriétés de certaines approximations rationnelles (dites cotangentes réduites) P_ν/Q_ν d'un réel X produites par l'algorithme, en particulier sur le fait très ennuyeux que les entiers P_ν et Q_ν ne sont pas forcément premiers entre eux. À ce propos, on notera (a,b) le pgcd de deux entiers a et b.

On donne au paragraphe 3 une démonstration, différente de celle de Lehmer, du point (iii) du Théorème 1 : on adaptera pour cela le critère d'irrationalité des fractions continues irrégulières, utilisé par Lambert pour montrer que $\pi \notin \mathbb{Q}$ (Proposition 1).

Au paragraphe 4, on montre qu'il existe une infinité de réels pour lesquels le pgcd de P_ν et Q_ν vaut 1 pour tout $\nu \geq 0$, et avec une croissance de $(n_\nu)_{\nu\geq 0}$ arbitrairement grande (Théorème 2) : on utilise pour cela le théorème de Dirichlet sur l'infinité des nombres premiers dans les progressions arithmétiques. On produit un exemple explicite ϖ d'un tel nombre. À l'opposé, il est facile de construire une infinité de réels X pour lesquels le pgcd de P_ν et Q_ν tend vers l'infini : ce sera, par exemple, une conséquence du point (ii) du Théorème 8.

Au paragraphe 5, on détermine la croissance des cotangentes partielles de ϖ (la démonstration est due à Éric Saias), ce qui a des conséquences sur le problème de la nature arithmétique de ϖ : son éventuelle transcendance demeure un problème ouvert.

Au paragraphe 6, on explicite le lien entre les cotangentes réduites d'un réel et les réduites usuelles de ce même réel (Théorème 4).

Au paragraphe 7, on donne un critère de transcendance (Théorème 5) pour les développements en cotangentes : joint à un résultat de Shallit [7] (Théorème 6), ce critère se traduit en fait par une borne quasi optimale pour la croissance de la suite $(n_\nu)_{\nu\geq 0}$ associée à un nombre algébrique.

Au paragraphe 8, on généralise un autre résultat de Lehmer (concernant uniquement le nombre ξ défini au point (vii) du paragraphe 2) à toute une classe de développements en cotangentes dont on donne explicitement le développement en fractions continues régulières (Théorème 7). Les cotangentes réduites de ces exemples spéciaux ont un pgcd qui tend vers l'infini.

Au paragraphe 9, on exploite alors ces fractions continues pour montrer leur transcendance (Théorème 8) et en produire, dans certains cas, des mesures d'irrationalité très fines (Théorème 9). On donne également des expressions « explicites » pour deux nombres évalués numériquement par Lehmer (les R_0 et R_1 de [3, p. 337, Theorem 18], c'est-à-dire nos L_i et L_p définis au Théorème 9 : voir les identités (9.11)).

Enfin, la littérature sur ce sujet semble très limitée : on pourra consulter [9] pour des idées reliées et on trouvera dans le livre [6, p. 25-26 et p.61-63] quelques propriétés métriques de l'algorithme de Lehmer.

2. Propriétés du développement en cotangente continue

On indique ici sans démonstration quelques propriétés du développement en cotangente, données par Lehmer dans [7]. Dans les conditions du Théorème 1, on dira que les X_ν, resp. n_ν, sont les *cotangentes complètes*, resp. *cotangentes partielles* de X. Dans toute la suite de cet article, on se concentre uniquement sur les cas où X est irrationnel, ce qui se traduit par le fait que la suite $(n_\nu)_{\nu\geq 0}$ est infinie. On définit les *cotangentes réduites* par

$$\sigma_\nu(X) = \cot(\operatorname{arccot}(X) - (-1)^\nu \operatorname{arccot}(X_\nu)) = \frac{(-1)^\nu X_\nu X + 1}{(-1)^\nu X_\nu - X}.$$

(i) On pose formellement $\sigma_0(X) = 1/0$. Pour tout entier $\nu \geq 1$, on a

$$\sigma_\nu(X) = \cot\left(\sum_{\mu=0}^{\nu-1} (-1)^\mu \operatorname{arccot}(n_\mu)\right) \in \mathbb{Q}.$$

Plus précisément, définissons deux suites $(P_\nu)_{\nu\geq 0}$ et $(Q_\nu)_{\nu\geq 0}$ par $P_0 = 1, Q_0 = 0$ et

$$\begin{cases} P_{\nu+1} = n_\nu P_\nu - (-1)^\nu Q_\nu \\ Q_{\nu+1} = n_\nu Q_\nu + (-1)^\nu P_\nu. \end{cases} \tag{2.1}$$

Alors

$$X_\nu = (-1)^\nu \frac{P_\nu X + Q_\nu}{P_\nu - Q_\nu X} \quad \text{et} \quad \sigma_\nu(X) = \frac{P_\nu}{Q_\nu}.$$

(ii) Les récurrences suivantes s'obtiennent facilement à partir de (2.1) : $P_0 = 1$, $Q_0 = 0$, $P_1 = n_0$, $Q_1 = 1$ et

$$\begin{cases} P_{\nu+2} = (n_{\nu+1} - n_\nu) P_{\nu+1} + (n_\nu^2 + 1) P_\nu \\ Q_{\nu+2} = (n_{\nu+1} - n_\nu) Q_{\nu+1} + (n_\nu^2 + 1) Q_\nu. \end{cases} \tag{2.2}$$

On en déduit que les deux suites $(P_\nu)_{\nu\geq 0}$ et $(Q_\nu)_{\nu\geq 0}$ sont positives et strictement croissantes à partir de $\nu \geq 1$.

(iii) Les entiers P_ν et Q_ν ne sont pas nécessairement premiers entre eux : si un entier divise P_ν et Q_ν, il divise aussi P_μ et Q_μ pour tout $\mu \geq \nu$. C'est l'une des principales différences que l'on peut noter avec les réduites de la fraction continue régulière d'un nombre réel, qui apparaissent toujours sous forme irréductible.

(iv) Pour tout $\nu \geq 0$, on a

$$P_\nu^2 + Q_\nu^2 = (n_0^2 + 1)(n_1^2 + 1) \cdots (n_{\nu-1}^2 + 1). \tag{2.3}$$

En conséquence, $(P_\nu, Q_\nu)^2$ divise $(n_0^2 + 1)(n_1^2 + 1) \cdots (n_{\nu-1}^2 + 1)$.

(v) La relation suivante nous servira à la toute fin de cet article : pour tout $\nu \geq 0$, on a

$$P_\nu P_{\nu+1} + Q_\nu Q_{\nu+1} = n_\nu\, (n_0^2 + 1)(n_1^2 + 1) \cdots (n_{\nu-1}^2 + 1). \tag{2.4}$$

(vi) Un des intérêts de l'algorithme de Lehmer réside dans sa vitesse de convergence. En effet, on montre facilement qu'il existe une constante $\alpha > 1,385$ telle que tout suite $(n_\nu)_{\nu\geq 0}$ de cotangentes partielles vérifie $n_\nu \geq \alpha^{2^n}$. Or, on peut facilement estimer l'écart entre X et $\sigma_\nu(X) = P_\nu/Q_\nu$ à l'aide de $1/n_\nu$:

$$\left|\operatorname{arccot}(X) - \operatorname{arccot}\left(\frac{P_\nu}{Q_\nu}\right)\right| = \frac{1 + o(1)}{n_\nu},$$

où le $o(1)$ dépend de X. Ceci se déduit simplement du fait que le développement en cotangente continue est une série alternée très rapidement convergente, et de l'équivalent

$\text{arccot}(z) \sim 1/z$ lorsque $z \to +\infty$. En appliquant le théorème des accroissements finis, on obtient

$$\left| X - \frac{P_\nu}{Q_\nu} \right| = (1+X^2)\,\frac{1+o(1)}{n_\nu}, \tag{2.5}$$

où le $o(1)$ dépend toujours de X. Les fractions P_ν/Q_ν sont donc de très bonnes approximations rationnelles de X : en contrepartie, il semble en pratique impossible de calculer beaucoup de ces approximations.

(vii) Lehmer s'est particulièrement intéressé au nombre, [1] noté ξ dans toute la suite, que l'on définit comme celui ayant les cotangentes partielles n_ν de plus petite croissance, c'est-à-dire $n_0 = 0$ et $n_{\nu+1} = n_\nu^2 + n_\nu + 1$:

$$\begin{aligned} \xi = \cot(&\text{arccot}(0) - \text{arccot}(1) + \text{arccot}(3) - \text{arccot}(13) \\ &+ \text{arccot}(183) - \text{arccot}(33673) + \text{arccot}(1133904603) - \cdots) \approx 0,59263271. \end{aligned}$$

Les deux suites $(P_\nu)_{\nu\geq 0}$ et $(Q_\nu)_{\nu\geq 0}$ associées à ξ vérifient donc les récurrences : $P_0 = 1$, $Q_0 = 0$, $P_1 = 0$, $Q_1 = 1$ et $P_{\nu+2} = (n_\nu^2+1)(P_{\nu+1}+P_\nu)$, $Q_{\nu+2} = (n_\nu^2+1)(Q_{\nu+1}+Q_\nu)$, à partir desquelles on voit que, pour tout $\nu \geq 2$, $n_{\nu-2}^2+1$ divise à la fois P_ν et Q_ν, qui ne sont donc pas premiers entre eux. Lehmer a en fait réussi à déterminer leur pgcd et à exploiter cette information pour montrer la transcendance de ξ : voir le paragraphe 8.

Dans tout l'article, les suites $(n_\nu)_{\nu\geq 0}$, $(P_\nu)_{\geq 0}$, $(Q_\nu)_{\nu\geq 0}$ seront invariablement associées à un réel génériquement noté X. Si elles sont associées à un autre réel, par exemple ξ, on l'indiquera explicitement. On utilisera aussi les résultats bien connus de la théorie des fraction continues régulières : voir [2].

3. Rationalité et irrationalité du développement en cotangente continue

Le but de ce paragraphe est de donner une nouvelle démontration du point (iii) du Théorème 1 de Lehmer : la suite $(n_\nu)_{\nu\geq 0}$ est finie si, et seulement si, X est rationnel.

L'un des sens est immédiat : si la suite $(n_\nu)_{\nu\geq 0}$ est finie, disons de dernier terme n_μ, alors

$$X = \cot\left(\sum_{\nu=0}^{\mu} (-1)^\nu \text{arccot}(n_\nu)\right) = \frac{P_{\mu+1}}{Q_{\mu+1}} \in \mathbb{Q}.$$

Supposons maintenant que la suite $(n_\nu)_{\nu\geq 0}$ soit infinie : il nous faut montrer que X est irrationnel. Pour cela, on va utiliser une écriture alternative, aussi due à Lehmer, des séries de cotangentes alternées sous forme de fraction continue. En effet, les deux récurrences (2.2) montrent que, pour tout $\nu \geq 1$,

$$\frac{P_\nu}{Q_\nu} = n_0 + \frac{n_0^2+1|}{|n_1 - n_0} + \frac{n_1^2+1|}{|n_2 - n_1} + \cdots + \frac{n_{\nu-2}^2+1|}{|n_{\nu-1} - n_{\nu-2}}.$$

[1]Bien que peu connu, le nombre ξ a néanmoins sa place dans les anthologies de nombres et constantes remarquables de Finch [1, p. 433] et Le Lionnais [4, p. 29].

Le nombre $X = \cot\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu \operatorname{arccot}(n_\nu)\right)$ s'écrit donc aussi comme une fraction continue généralisée :

$$X = n_0 + \frac{n_0^2+1|}{|n_1-n_0} + \frac{n_1^2+1|}{|n_2-n_1} + \frac{n_2^2+1|}{|n_3-n_2} + \cdots .$$

Cette fraction continue ne donne pas immédiatement l'irrationalité de X, contrairement à une fraction continue régulière infinie. Néanmoins, on dispose de la Proposition 1 ci-dessous (qui est une modification du critère utilisé par Lambert pour montrer l'irrationalité de π). Pour obtenir l'irrationalité de X, il suffit de l'appliquer au nombre $Y_0 = X - n_0$ avec $a_\nu = n_\nu^2 + 1$ et $b_\nu = n_{\nu+1} - n_\nu$, qui vérifient $1 \le a_\nu \le b_\nu$.

Proposition 1 (Variante du critère de Lambert)**.** *Soient $(a_\nu)_{\nu\ge 0}$, $(b_\nu)_{\nu\ge 0}$ deux suites infinies d'entiers tels que $1 \le a_\nu \le b_\nu$ pour tout $\nu \ge 0$.*

(i) *Pour tout $\mu \ge 0$, la fraction continue*

$$\frac{a_\mu|}{|b_\mu} + \frac{a_{\mu+1}|}{|b_{\mu+1}} + \frac{a_{\mu+2}|}{|b_{\mu+2}} + \cdots . \tag{3.1}$$

converge vers un réel Y_μ tel $0 < Y_\mu < 1$.

(ii) *Le nombre Y_0 est irrationnel.*

Remarque. (i) Lambert autorise des a_ν et b_ν négatifs. Il doit alors imposer la condition plus forte $1 \le |a_\nu| < |b_\nu|$, demander que Y_0 soit convergente et que $0 < |Y_\nu| < 1$.

(ii) Ce critère contient bien sûr l'irrationalité de toute fraction continue régulière infinie, lorsque $a_\nu = 1$ pour tout $\nu \ge 0$.

Démonstration. (i) Il suffit de le montrer pour $\mu = 0$, quitte à faire un changement de notations. On vérifie alors que, grâce à la condition $1 \le a_\nu \le b_\nu$, les réduites R_ν, resp. $\tilde{R}_\nu$, d'indice pair, resp. impair, de la fraction (3.1) (pour $\mu = 0$) forment une suite strictement décroissante, resp. strictement croissante, à valeurs dans $[0,1]$, avec $\tilde{R}_\nu < R_\nu$ pour tout $\nu \ge 0$: si ces suites convergent vers un même nombre Y_0, on a nécessairement $0 < Y_0 < 1$.

Pour montrer que les deux suites de réduites convergent bien vers un même réel, il suffit de montrer que $|R_\nu - \tilde{R}_\nu| \to 0$ lorsque $\nu \to +\infty$. Notons $R_\nu = U_{2\nu}/V_{2\nu}$ et $\tilde{R}_\nu = U_{2\nu+1}/V_{2\nu+1}$. La théorie des fractions continues généralisées nous apprend que

$$V_\nu = b_\nu V_{\nu-1} + a_\nu V_{\nu-2}, \tag{3.2}$$

avec $V_{-1} = 0$ et $V_0 = 1$, et également que

$$\left|\frac{U_{\nu-1}}{V_{\nu-1}} - \frac{U_\nu}{V_\nu}\right| = \frac{\prod_{\mu=1}^{\nu} a_\mu}{V_\nu V_{\nu-1}}. \tag{3.3}$$

Puisque $1 \le a_\nu \le b_\nu$, on déduit de (3.2) que $V_\nu \to +\infty$. On en déduit aussi que $V_\nu \ge a_\nu V_{\nu-1}$ et, en itérant, que $V_\nu \ge (a_\nu a_{\nu-1} \cdots a_1)\, V_0$. En reportant ces deux informations dans (3.3), on obtient

$$\left|\frac{U_{\nu-1}}{V_{\nu-1}} - \frac{U_\nu}{V_\nu}\right| \leq \frac{\prod_{\mu=1}^{\nu} a_\mu}{V_{\nu-1}\prod_{\mu=1}^{\nu} a_\mu} = \frac{1}{V_{\nu-1}} \to 0 \quad \text{quand} \quad \nu \to +\infty.$$

Les suites $(R_\nu)_{\nu\geq 0}$ et $(\tilde{R}_\nu)_{\nu\geq 0}$ sont donc bien adjacentes et elles convergent vers Y_0 dans $]0,1[$. Plus généralement, pour tout $\nu \geq 0$, la fraction continue (3.1) converge vers un réel Y_ν tel que $0 < Y_\nu < 1$.

(ii) Supposons, afin d'aboutir à une contradiction, que Y_0 est rationnel, disons $Y_0 = y_0/y_{-1}$ avec $0 < y_0 < y_{-1}$. On a alors

$$Y_1 = \frac{a_1}{Y_0} - b_1 = \frac{a_1 y_{-1} - b_1 y_0}{y_0} = \frac{y_1}{y_0}.$$

Puisque $0 < Y_1 < 1$, on a donc $0 < y_1 < y_0$. De même

$$Y_2 = \frac{a_2}{Y_1} - b_2 = \frac{a_2 y_0 - b_2 y_1}{y_1} = \frac{y_2}{y_1}$$

et $0 < Y_2 < 1$ entraîne que $0 < y_2 < y_1$, etc. On construit ainsi une suite infinie[2] d'entiers y_j tels que $0 < y_{j+1} < y_j$, ce qui est impossible pour j assez grand, car quoi que l'on fasse, il n'y aura jamais d'entier dans l'intervalle $]0,1[$. Le nombre Y_0 est donc irrationnel. □

4. Cotangentes réduites premières entre elles

Lorsque l'on calcule des développements en cotangentes à partir de suites $(n_\nu)_{\geq 0}$ quelconques, on constate qu'il est relativement rare de tomber sur des cotangentes réduites P_ν/Q_ν vérifiant $(P_\nu, Q_\nu) = 1$ et qu'il apparaît très rapidement un gros facteur commun à P_ν et Q_ν. Le but de ce paragraphe est de montrer qu'il existe cependant bien des réels tels que $(P_\nu, Q_\nu) = 1$ pour tout $\nu \geq 0$.

Théorème 2. *Il existe une infinité de réels positifs dont les cotangentes réduites P_ν/Q_ν, données par les récurrences* (2.1)*, vérifient $(P_\nu, Q_\nu) = 1$ pour tout $\nu \geq 0$. La suite des cotangentes partielles $(n_\nu)_{\nu\geq 0}$ associées peut croître arbitrairement vite.*

Démonstration. Rappelons qu'étant donné un réel $X > 0$ de cotangentes partielles $(n_\nu)_{\nu\geq 0}$, on calcule ses cotangentes réduites au moyen des récurrences (2.1) : $P_0 = 1, Q_0 = 0$, $P_{\nu+1} = n_\nu P_\nu - (-1)^\nu Q_\nu$ et $Q_{\nu+1} = n_\nu Q_\nu + (-1)^\nu P_\nu$. Réciproquement, à partir d'une valeur de $n_{\nu-1}$, on a la liberté de choisir n_ν quelconque pourvu que $n_\nu \geq n_{\nu-1}^2 + n_{\nu-1} + 1$ (ou $n_\nu > n_{\nu-1}^2 + n_{\nu-1} + 1$), et P_ν et Q_ν ne dépendent que de $n_0, n_1, \ldots, n_{\nu-1}$, et pas de n_ν. Nous allons montrer par récurrence sur $\nu \geq 1$ que si l'on suppose P_ν et Q_ν premiers entre eux, on peut toujours choisir n_ν pour que $P_{\nu+1}$ et $Q_{\nu+1}$ soient aussi premiers entre eux. Par ailleurs, la démonstration produira une infinité de suites $(n_\nu)_{\nu\geq 0}$ différentes, et donc une infinité de réels satisfaisant à l'énoncé du théorème.

On a $P_0 = 1$ et $Q_0 = 0$ donc $(P_0, Q_0) = 1$. De plus, $P_1 = n_0$ et $Q_1 = 1$: le pgcd de ce couple est 1 pour tout choix de $n_0 \geq 0$. Si $n_0 = 0$, on a $P_2 = Q_1 = 1$ et $Q_2 = n_2 Q_1 = n_2$ avec $n_2 \geq 1$: de nouveau $(P_2, Q_2) = 1$ pour tout choix de n_2 et, dans tous les cas, on a

[2] C'est ici que sert l'hypothèse que les suites d'entiers $(a_\nu)_{\nu\geq 0}$ et $(b_\nu)_{\nu\geq 0}$ sont infinies.

P_2 et $Q_2 \geq 1$. Supposons que l'on ait construit P_ν et Q_ν premiers entre eux, avec P_ν et $Q_\nu \geq 1$. Compte-tenu des récurrences (2.1), l'existence de $P_{\nu+1}$ et $Q_{\nu+1}$ premiers entre eux découle du lemme suivant.

Lemme 1. *Étant donnés deux entiers a et b tels que $a, b \geq 1$ et $(a, b) = 1$, il existe une infinité d'entiers n tels que les nombres $A = na + b$ et $B = nb - a$ vérifient $A, B \geq 1$ et $(A, B) = 1$.*

Démonstration du Lemme 1. On utilise le théorème de Dirichlet, qui affirme l'existence d'une infinité des nombres premiers dans les progressions arithmétiques de la forme $(rn + s)_{n \geq 0}$ avec $(r, s) = 1$ et $r, s \neq 0$.

Supposons $b \leq a$. Puisque $(a, b) = 1$ et $a, b \neq 0$, on peut choisir l'entier n assez grand pour que $A, B \geq 1$ et pour que $A = na + b$ soit premier. L'assertion « $(A, B) > 1$ » est alors équivalente à « A divise B ». Or $A = na + b > nb - a = B$, donc A ne peut pas diviser B, et $(A, B) = 1$.

Supposons $b > a$. De nouveau, on peut choisir l'entier $n > (b + a)/(b - a)$ assez grand pour que $A, B \geq 1$ et pour que $B = nb - a$ soit premier. L'assertion « $(A, B) > 1$ » équivaut alors à « B divise A ». Or $B = nb - a = na + b + n(b - a) - (b + a) > na + b = A$ puisque $n > (b + a)/(b - a)$. Donc B ne divise pas A et $(A, B) = 1$. □

Ce lemme clôt la démonstration du Théorème 2 puisqu'il assure que l'on peut toujours trouver $n = n_\nu$ arbitrairement grand (et $\geq n_{\nu-1}^2 + n_{\nu-1} + 1$) tel que $(P_{\nu+1}, Q_{\nu+1}) = 1$. □

Construisons explicitement un nombre ϖ dont les cotangentes réduites P_ν/Q_ν vérifient $(P_\nu, Q_\nu) = 1$ pour tout $\nu \geq 0$. On pose $n_0 = 0$ de sorte que $P_1 = 0$ et $Q_0 = 1$, avec $(P_1, Q_1) = 1$. Supposons $n_{\nu-1}$ construit et donc aussi P_ν et Q_ν tels que $(P_\nu, Q_\nu) = 1$. On définit n_ν comme le plus petit entier $\geq n_{\nu-1}^2 + n_{\nu-1} + 1$ tel que $P_{\nu+1} = n_\nu P_\nu - (-1)^\nu Q_\nu$ et $Q_{\nu+1} = n_\nu Q_\nu + (-1)^\nu P_\nu$ vérifient $(P_{\nu+1}, Q_{\nu+1}) = 1$. La démonstration du Lemme 1 nous assure que n_ν existe : on peut le trouver en un temps fini calculable, car il existe des versions effectives du théorème de Dirichlet (théorème de Linnik). On trouve

$$\begin{aligned}\varpi = \cot(&\operatorname{arccot}(0) - \operatorname{arccot}(1) + \operatorname{arccot}(4) - \operatorname{arccot}(22) + \operatorname{arccot}(508) - \operatorname{arccot}(258576) \\ &+ \operatorname{arccot}(66861806354) - \operatorname{arccot}(4470501148986656579674) + \cdots) \approx 0,66072541\end{aligned}$$

et les premières valeurs des cotangentes réduites de ϖ sont

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{3}{5}, \frac{71}{107}, \frac{35961}{54427}, \frac{9298705963}{14073479991}, \frac{621728277426817608911}{940978293894434368777}.$$

Un problème intéressant est d'estimer la croissance de la suite de cotangentes partielles $(n_\nu)_{\nu \geq 0}$ associées à ϖ : avec les quelques valeurs ci-dessus, il semble que $n_{\nu+1}/n_\nu^2 \approx 1$. Comme on le montre au paragraphe suivant, cette estimation est correcte en un sens fort.

5. Croissance des cotangentes partielles de ϖ

On prouve ici le résultat suivant, dont la démonstration est due à Éric Saias. Notons $(n_\nu)_{\geq 0}$ la suite des cotangentes partielles de ϖ défini à la fin du paragraphe 4.

Théorème 3. (i) *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $c(\varepsilon)$ indépendante de ν telle que*

$$n_{\nu+1} \le n_\nu^2 + n_\nu + 1 + c(\varepsilon)\, Q_{\nu+1}^{\varepsilon}.$$

(ii) *Le produit*

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} n_{\nu+1}/n_\nu^2 \tag{5.1}$$

est convergent non-nul.

Remarque. Les cotangentes réduites de ϖ calculées au paragraphe précédent donnent 5,78420275 comme valeur approchée par défaut pour le produit (5.1).

Rappelons que

$$\begin{cases} P_{\nu+1} = n_\nu P_\nu - (-1)^\nu Q_\nu \\ Q_{\nu+1} = n_\nu Q_\nu + (-1)^\nu P_\nu, \end{cases}$$

avec $P_0 = 0$, $Q_0 = 1$, $n_0 = 0$ et

$$n_\nu = \min\{b \,:\, b \ge n_{\nu-1}^2 + n_{\nu-1} + 1 \quad \text{and} \quad \big(bP_\nu - (-1)^\nu Q_\nu, bQ_\nu + (-1)^\nu P_\nu\big) = 1\}.$$

Les récurrences (2.2) assurent que $P_\nu, Q_\nu \ge 1$ pour tout $\nu \ge 2$. On décompose la démonstration du Théorème 3 en deux lemmes.

Lemme 2. *Soient des entiers $a, b \ge 1$ avec $(a,b) = 1$, $n \ge 1$ et soient $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{-1, 1\}$. On a*

$$\big(na + \varepsilon_1 b, nb + \varepsilon_2 a\big) = 1 \iff \big(na + \varepsilon_1 b, \varepsilon_2 a^2 - \varepsilon_1 b^2\big) = 1.$$

Démonstration. Comme $(a,b) = 1$, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \big(na + \varepsilon_1 b, nb + \varepsilon_2 a\big) = 1 \quad &\iff \quad \big(nab + \varepsilon_1 b^2, nb + \varepsilon_2 a\big) = 1 \\ &\iff \quad \big(nab + \varepsilon_1 b^2, nab + \varepsilon_2 a^2\big) = 1 \\ &\iff \quad \big(nab + \varepsilon_1 b^2, \varepsilon_2 a^2 - \varepsilon_1 b^2\big) = 1 \\ &\iff \quad \big(na + \varepsilon_1 b, \varepsilon_2 a^2 - \varepsilon_1 b^2\big) = 1. \end{aligned}$$

□

Lemme 3. *Soient $u, v, w \in \mathbb{Z}$ tels que $(u, w) = 1$. Pour tout réel $x \ge 0$, on a*

$$\sum_{\substack{n \le x \text{ et} \\ (nu+v,w)=1}} 1 = \frac{\varphi(w)}{w}\, x + \mathcal{O}(\tau(w)),$$

où φ est l'indicatrice d'Euler et τ la fonction nombre de diviseurs. La constante dans le $\mathcal{O}$ est indépendante de u, v, w et x.

Démonstration. Montrons tout d'abord le fait suivant, qui nous servira ci-dessous : étant donnés des entiers $d \ge 1$ et $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $(u, d) = 1$, pour tout réel $x \ge 0$, on a

$$\#\{1 \le n \le x \,:\, d \,|\, nu + v\} = \frac{x}{d} + \mathcal{O}(1).$$

(La constante dans le $\mathcal{O}$ est indépendante de d, u, v et x.) En effet, soit $\overline{u}$ un entier fixé tel que $u\overline{u} \equiv 1$ (d). On a

$$d \,|\, nu + v \Longleftrightarrow m = \frac{n + \overline{u}v}{d} \in \mathbb{Z}.$$

On a donc

$$1 \leq n \leq x \Longleftrightarrow \frac{\overline{u}v}{d} < m \leq \frac{\overline{u}v}{d} + \frac{x}{d},$$

d'où

$$\#\big\{1 \leq n \leq x \,:\, d \,|\, nu + v\big\} = \#\left\{m \in \mathbb{Z} \,:\, \frac{\overline{u}v}{d} < m \leq \frac{\overline{u}v}{d} + \frac{x}{d}\right\} = \frac{x}{d} + \mathcal{O}(1).$$

On peut maintenant montrer le lemme. Notons $\delta(m) = \delta_{1,m}$ le symbole de Kronecker et Id la fonction identité. Pour tout réel $x \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{n\leq x\\(nu+v,w)=1}} 1 &= \sum_{n\leq x} \delta\big((nu+v,w)\big) = \sum_{n\leq x} \sum_{\substack{d\,|\,nu+v\\d\,|\,w}} \mu(d) = \sum_{d\,|\,w} \mu(d) \cdot \#\{n \leq x \,:\, d \,|\, nu + v\} \\
&= x \sum_{d\,|\,w} \frac{\mu(d)}{d} + \sum_{d\,|\,w} \mathcal{O}(1) = \frac{x}{w} \sum_{d\,|\,w} \mu(d)\, \mathrm{Id}\left(\frac{w}{d}\right) + \mathcal{O}(\tau(w)) \\
&= \frac{\varphi(w)}{w}\, x + \mathcal{O}\left(\tau(w)\right).
\end{aligned}$$

□

Démonstration du Théorème 3. (i) Fixons $\nu \geq 2$ et posons $R_\nu = P_\nu^2 + Q_\nu^2$ et

$$A(x) = \#\big\{1 \leq n \leq x \,:\, \big(nP_\nu - (-1)^\nu Q_\nu,\, nQ_\nu + (-1)^\nu P_\nu\big) = 1\big\}.$$

On applique le Lemme 2 avec $a = P_\nu$, $b = Q_\nu$, $\varepsilon_1 = (-1)^{\nu+1}$ et $\varepsilon_2 = (-1)^\nu$, ainsi que le Lemme 3, de sorte que l'on obtient :

$$A(x) = \#\big\{1 \leq n \leq x \,:\, \big(nP_\nu - (-1)^\nu Q_\nu, R_\nu\big) = 1\big\} = \frac{\varphi(R_\nu^2)}{R_\nu^2}\, x + \mathcal{O}\left(\tau(R_\nu^2)\right).$$

On utilise ensuite les estimations classiques suivantes (voir [8]) : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux constantes $c_1(\varepsilon), c_2(\varepsilon) > 0$ telles que

$$\varphi(n) > c_1(\varepsilon)\, n^{1-\varepsilon} \quad \text{et} \quad \tau(n) < c_2(\varepsilon)\, n^\varepsilon.$$

On en déduit que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $c_3(\varepsilon) > 0$ telle que si $y \geq c_3(\varepsilon) R_\nu^\varepsilon$, alors pour tout $x \geq 0$, on a $A(x + y) > A(x)$. Avec $x = n_{\nu-1}^2 + n_{\nu-1} + 1$, il en découle que

$$n_\nu \leq n_{\nu-1}^2 + n_{\nu-1} + 1 + c_3(\varepsilon) R_\nu^\varepsilon.$$

Enfin, notons que $R_\nu = Q_\nu^2(P_\nu^2/Q_\nu^2 + 1) = (1 + o(1))(1 + X^2)Q_\nu \leq c_4 Q_\nu$ pour une constante c_4 indépendante de ν, ce qui achève la démonstration du point (i).

(ii) La remarque suivant le Lemme 4 montre l'existence d'une constante $c_5 > 0$ indépendante de ν telle que $Q_\nu \leq c_5\, n_\nu$. Cette majoration et le point (i) juste démontré nous donnent donc

$$1 \leq \frac{n_\nu}{n_{\nu-1}^2} \leq \left(\frac{1}{1 - c_5 c(\varepsilon)/n_\nu^{1-\varepsilon}}\right)\left(1 + \frac{1}{n_{\nu-1}} + \frac{1}{n_{\nu-1}^2}\right).$$

La croissance vers l'infini de la suite $(n_\nu)_{\nu\geq 0}$ est telle que n'importe quel choix de $\varepsilon \in]0,1[$, par exemple $\varepsilon = 1/2$, assure que $n_\nu/n_{\nu-1}^2$ tend suffisamment vite vers 1 pour que le produit (5.1) converge. □

6. Cotangentes réduites et réduites usuelles

Dans ce paragraphe, nous établissons un lien entre les approximations P_ν/Q_ν fournit par l'algorithme de Lehmer pour un réel X, et les réduites de ce réel X. Ce lien est moins simple que l'on pourrait penser devant la convergence très rapide des cotangentes réduites.

On aura besoin de distinguer diverses sortes d'approximations d'une réel donné X. Une suite d'approximations rationnelles $(p_\nu/q_\nu)_{\nu\geq 0}$ de X est une suite telle que $|X - p_\nu/q_\nu| \to 0$. Cela ne suffit en général pas pour prouver que $X \notin \mathbb{Q}$. Pour cela, il faut disposer de l'assertion plus forte $0 \neq |q_\nu X - p_\nu| \to 0$, dont on déduit que $X \notin \mathbb{Q}$: on dit alors que $(p_\nu/q_\nu)_{\nu\geq 0}$ est une suite d'approximations diophantiennes de X. Si on dispose d'une approximations diophantienne p/q de X telle que $0 < |X - p/q| < 1/(2q^2)$, alors p/q (sous forme irréductible) est l'une des réduites de X, obtenues par l'algorithme des fractions continues régulières. Réciproquement, toute réduite p/q de X vérifie $0 < |X - p/q| < 1/q^2$. Enfin, un nombre réel α est dit de Liouville si, pour tout réel $D \geq 1$, il existe un rationnel p/q tel que $|\alpha - p/q| < 1/q^D$.

À titre d'exemple, considérons le cas du nombre ξ, de cotangentes partielles et réduites $(n_\nu)_{\nu\geq 0}$ et $(P_\nu/Q_\nu)_{\nu\geq 0}$. Dans ce cas, le produit $\prod_{\nu=1}^{\infty} n_{\nu+1}/n_\nu^2$ est convergent non-nul et il résulte alors du point (ii) du Lemme 4 ci-dessous qu'il existe un réel $\mathscr{M} > 0$ tels que $\lim_{\nu\to+\infty} Q_\nu/n_\nu = \mathscr{M}$. L'estimation (2.5) devient donc

$$\left|\xi - \frac{P_\nu}{Q_\nu}\right| = (1+\xi^2)\frac{\mathscr{M} + o(1)}{Q_\nu}. \tag{6.1}$$

Prise au pied de la lettre, la mesure (6.1) ne prouve pas que ξ est irrationnel, c'est-à-dire que, *a priori*, les fractions P_ν/Q_ν ne sont pas des approximations diophantiennes de ξ. Néanmoins, P_ν et Q_ν possèdent un très gros facteur commun et après simplification de la fraction P_ν/Q_ν, on peut déduire de (6.1) l'irrationalité et même la transcendance de ξ : voir le paragraphe 8.

Le produit (5.1) permet de faire une estimation similaire à (6.1) pour le nombre ϖ, à ceci près que les fractions P_ν/Q_ν sont alors irréductibles : l'algorithme de Lehmer ne produit donc pas d'approximations diophantiennes de ϖ, bien qu'il en prouve indirectement l'irrationalité.

Revenons à un nombre X générique de cotangentes partielles et réduites $(n_\nu)_{\nu\geq 0}$ et $(P_\nu/Q_\nu)_{\nu\geq 0}$. Considérons, pour tout $D \geq 2$, les deux réels positifs

$$\mathscr{N}_{i,D} = \liminf_{\mu\to+\infty}\ n_1 \prod_{\nu=1}^{\mu} \frac{n_{\nu+1}}{n_\nu^D} \quad \text{et} \quad \mathscr{N}_{s,D} = \limsup_{\mu\to+\infty}\ n_1 \prod_{\nu=1}^{\mu} \frac{n_{\nu+1}}{n_\nu^D}, \tag{6.2}$$

qui valent éventuellement 0 ou $+\infty$: si $\mathscr{N}_{i,D} = \mathscr{N}_{s,D}$, on notera $\mathscr{N}_D$ leur valeur commune. Enfin, notons $\mathscr{Q} > 0$ la limite (qui existe par le point (i) du Lemme 4 ci-dessous) de la suite $Q_\nu/(n_1 n_2 \cdots n_{\nu-1})$.

Théorème 4. (i) *Supposons que $\mathscr{N}_{s,2} < +\infty$. Si la suite des pgcd (P_ν, Q_ν) est bornée, alors les fractions P_ν/Q_ν ne forment pas une suite d'approximations diophantiennes de X.*

(ii) *Si la suite des pgcd (P_ν, Q_ν) n'est pas bornée, alors les fractions P_ν/Q_ν forment une suite d'approximations diophantiennes de X.*

(iii) *Si $\mathscr{N}_{s,2} = +\infty$, alors les fractions P_ν/Q_ν forment une suite d'approximations diophantiennes de X.*

(iv) *Si $\mathscr{N}_{s,3} < (1+X^2)\mathscr{Q}^2$ et si $(P_\nu, Q_\nu) = 1$ pour tout $\nu \geq 0$, alors pour ν assez grand, P_ν/Q_ν n'est pas une réduite de X.*

(v) *Si $\mathscr{N}_{i,3} > 2(1+X^2)\mathscr{Q}^2$ ou s'il existe $D_0 > 3$ tel que $\mathscr{N}_{i,D_0} > 0$, alors les fractions P_ν/Q_ν (sous forme irréductible) sont des réduites de X pour tout ν assez grand.*

(vi) *Dans les conditions de* (v), *si $\mathscr{N}_{s,D_0} < +\infty$ pour un $D_0 \geq 3$, alors X a une mesure d'irrationalité $\geq D_0 - 1$. Si $\mathscr{N}_D = +\infty$ pour tout D assez grand (et donc alors pour tout $D \geq 2$), alors X est de Liouville.*

Remarque. (i) Il est possible de produire des exemples explicites illustrant chacun des points du théorème.

(ii) Le Théorème 9 montrera que, pour tout $D_0 \geq 2$, il existe des réels de mesure d'irrationalité $D_0 + 1$ et tels que $0 < \mathscr{N}_{D_0} < +\infty$.

Pour démontrer ce théorème, on aura besoin du lemme suivant, qui précise le lien entre les suites $(n_\nu)_{\nu\geq 0}$ et $(Q_\nu)_{\nu\geq 0}$.

Lemme 4. (i) *Le produit $\prod_{\nu=1}^{\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n_\nu^2}}$ converge vers un réel $\mathscr{P}$ tel que $0 < \mathscr{P} < +\infty$ et*

$$\lim_{\nu\to+\infty} \frac{Q_\nu}{n_1 n_2 \cdots n_{\nu-1}} = \mathscr{P}\sqrt{\frac{1+n_0^2}{1+X^2}} = \mathscr{Q}$$

est finie et non-nulle.

(ii) *Pour tout réel* $D \geq 2$, *on a*

$$\liminf_{\nu\to+\infty} \frac{n_\nu}{Q_\nu^{D-1}} = \frac{\mathscr{N}_{i,D}}{\mathscr{Q}^{D-1}} \quad \text{et} \quad \limsup_{\nu\to+\infty} \frac{n_\nu}{Q_\nu^{D-1}} = \frac{\mathscr{N}_{s,D}}{\mathscr{Q}^{D-1}},$$

ce résultat restant vrai si $\mathscr{N}_{i,D}$ *et* $\mathscr{N}_{s,D}$ *valent* 0 *ou* $+\infty$.

Remarque. La démonstration du point (ii) montre que l'on a toujours

$$\limsup_{\nu\to+\infty} \frac{Q_\nu}{n_\nu} < +\infty.$$

Démonstration. (i) La suite $(n_\nu^2)_{\nu\geq 0}$ tend suffisamment vite vers l'infini pour que le produit $\mathscr{P}$ soit convergent. De plus, on sait que $P_\nu^2 + Q_\nu^2 = \prod_{\mu=1}^{\nu-1}(n_\mu^2+1)$ (équation (2.3) du paragraphe (2)), donc

$$Q_\nu^2\left(\frac{P_\nu^2}{Q_\nu^2}+1\right) = \mathscr{P}^2\,(n_0^2+1)\left(\prod_{\mu=0}^{\nu-1} n_\mu\right)^2 (1+o(1)).$$

Comme P_ν^2/Q_ν^2 tend vers X^2, le résultat en découle.

(ii) Compte-tenu du point (i) juste démontré, pour tout entier $\nu \geq 1$, on a l'estimation

$$n_1 \prod_{\mu=1}^{\nu-1} \frac{n_{\mu+1}}{n_\mu^D} = \mathscr{Q}^{D-1}\,\frac{n_\nu}{Q_\nu^{D-1}}\,(1+o(1)). \tag{6.3}$$

On conclut en faisant tendre ν vers l'infini. Notons que (6.3) prouve la remarque suivant le Lemme 4 puisque l'on a toujours $n_{\nu+1} \geq n_\nu^2$. □

Démonstration du Théorème 4. L'expression « pour ν assez grand » qui apparaîtra plusieurs fois signifie « pour $\nu > N$, où N ne dépend que de X », sauf mention contraire.

(i) Remarquons que $\mathscr{N}_{s,2}$ ne peut pas être nul puisque pour tout $\nu \geq 0$, $n_{\nu+1} \geq n_\nu^2 + n_\nu + 1 > n_\nu^2$, ce qui implique même que $\mathscr{N}_{s,2} > 1$. Si on suppose que $\mathscr{N}_{s,2} < +\infty$, alors en appliquant l'estimation (2.5) et le point (ii) du Lemme 4, on obtient

$$\left|X - \frac{P_\nu}{Q_\nu}\right| = (1+X^2)\frac{1+o(1)}{n_\nu} \geq (1+X^2)\frac{\mathscr{Q}}{\mathscr{N}_{s,2}}\,\frac{1+o(1)}{Q_\nu}.$$

D'où

$$\liminf_{\nu\to+\infty} |Q_\nu X - P_\nu| \geq (1+X^2)\frac{\mathscr{Q}}{\mathscr{N}_{s,2}} > 0. \tag{6.4}$$

Si la suite des pgcd de P_ν et Q_ν est bornée, en particulier si P_ν et Q_ν sont premiers entre eux pour tout $\nu \geq 0$, alors (6.4) est insuffisant pour montrer l'irrationalité de X.

(ii) Pour les mêmes raisons que ci-dessus, on a toujours $\mathscr{N}_{i,2} > 1$. On obtient ici

$$\left|X - \frac{P_\nu}{Q_\nu}\right| = (1+X^2)\frac{1+o(1)}{n_\nu} \leq (1+X^2)\frac{\mathscr{Q}}{\mathscr{N}_{i,2}}\,\frac{1+o(1)}{Q_\nu}.$$

Donc
$$0 \neq |Q_\nu X - P_\nu| < (1+o(1))(1+X^2)\mathscr{Q}. \tag{6.5}$$
Si la suite (P_ν, Q_ν) des pgcd de P_ν et Q_ν n'est pas bornée, alors en divisant (6.5) par (P_ν, Q_ν), on obtient l'irrationalité de X en faisant tendre $\nu \to +\infty$ le long d'une sous-suite telle que $(P_\nu, Q_\nu) \to +\infty$.

(iii) Si $\mathscr{N}_{s,2} = +\infty$, alors $\limsup_{\nu\to+\infty} \dfrac{n_\nu}{Q_\nu} = +\infty$ et donc
$$0 < |Q_\nu X - P_\nu| = (1+X^2)(1+o(1))\frac{Q_\nu}{n_\nu} = o(1).$$
Les fractions P_ν/Q_ν forment donc une suite d'approximations diophantiennes de X, dont on déduit l'irrationalité.

(iv) Si $\mathscr{N}_{s,3} < (1+X^2)\mathscr{Q}^2$, alors $\limsup_{\nu\to+\infty} \dfrac{n_\nu}{Q_\nu^2} < (1+X^2)$ et donc
$$Q_\nu^2 \left| X - \frac{P_\nu}{Q_\nu} \right| \geq (1+X^2)(1+o(1))\frac{Q_\nu^2}{n_\nu} > 1 \tag{6.6}$$
pour tout ν assez grand. Si P_ν et Q_ν sont premiers entre eux, on ne peut pas « améliorer » (6.6) et P_ν/Q_ν ne peut pas être une réduite de X pour ν assez grand.

(v) Supposons $\mathscr{N}_{i,3} > 0$ et également $\mathscr{N}_{i,3} < +\infty$. Alors
$$\left| X - \frac{P_\nu}{Q_\nu} \right| = (1+X^2)\frac{1+o(1)}{n_\nu} \leq (1+X^2)\frac{\mathscr{Q}^2}{\mathscr{N}_{i,3}}\frac{1+o(1)}{Q_\nu^2}.$$
Si $2(1+X^2)\mathscr{Q}^2 < \mathscr{N}_{i,3}$, alors pour ν assez grand, on a
$$0 < \left| X - \frac{P_\nu}{Q_\nu} \right| < \frac{1}{2}\frac{1}{Q_\nu^2},$$
ce qui prouve que la fraction P_ν/Q_ν (sous forme irréductible) est une réduite de X.

Si $\mathscr{N}_{i,3} = +\infty$, en utilisant l'estimation (6.3), on a
$$0 < \left| X - \frac{P_\nu}{Q_\nu} \right| < \frac{o(1)}{Q_\nu^2},$$
et la fraction P_ν/Q_ν (sous forme irréductible) est aussi une réduite de X pour ν assez grand. Si $\mathscr{N}_{i,D_0} > 0$ pour un $D_0 > 3$, on adapte l'argument précédent.

(vi) Dans les conditions de (v), P_ν/Q_ν est une réduite de X pour tout ν assez grand et si en plus $\mathscr{N}_{i,D_0} \leq \mathscr{N}_{s,D_0} < +\infty$, alors
$$(1+X^2)\frac{\mathscr{Q}^{D_0}}{\mathscr{N}_{s,D_0}}\frac{1+o(1)}{Q_\nu^{D_0-1}} \leq \left| X - \frac{P_\nu}{Q_\nu} \right| \leq (1+X^2)\frac{\mathscr{Q}^{D_0}}{\mathscr{N}_{i,D_0}}\frac{1+o(1)}{Q_\nu^{D_0-1}},$$
ce qui signifie que la mesure d'irrationalité de X est $\geq D_0 - 1$.

Supposons maintenant que les cotangentes réduites P_ν/Q_ν de X vérifient $\mathscr{N}_D = +\infty$ pour tout $D \geq 2$. L'estimation (6.3) montre que pour tout $D \geq 2$, si $\nu > \nu(X,D)$, alors

$$\left| X - \frac{P_\nu}{Q_\nu} \right| = (1+X^2)\frac{1+o(1)}{n_\nu} = \frac{o(1)}{Q_\nu^{D-1}},$$

ce qui prouve que X est un nombre de Liouville. □

7. Croissance des cotangentes partielles d'un nombre algébrique

On peut espérer qu'une croissance très rapide de la suite des cotangentes partielles d'un réel X suffit pour montrer que X est transcendant, en appliquant par exemple le théorème de Roth [5] : « *pour tout nombre algébrique réel α, de degré ≥ 2, et pour tout $\varepsilon > 0$, il n'existe qu'un nombre fini de solutions $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$, $q > 0$, à l'équation $q^{1+\varepsilon}|q\alpha - p| < 1$* ». Cette approche fonctionne en effet très bien avec les fractions continues usuelles : la fraction

$$\alpha = a_0 + \frac{1|}{|a_1} + \frac{1|}{|a_2} + \frac{1|}{|a_3} + \cdots + \frac{1|}{|a_\nu} + \cdots .$$

est transcendante si, par exemple, il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que

$$\limsup_{\nu\to+\infty} \frac{a_\nu}{q_\nu^\varepsilon} = +\infty.$$

Cela résulte de l'inégalité classique $q_\nu\,|q_\nu\alpha - p_\nu| < 1/a_\nu$, où p_ν/q_ν est la ν-ième réduite de α.

Un tel critère pour le développement en cotangente peut être facilement obtenu à l'aide des estimations utilisées au cours de la preuve du Théorème 4.

Théorème 5. (i) *Supposons qu'il existe $D_0 > 3$ tel que $\mathscr{N}_{s,D_0} = +\infty$, où $\mathscr{N}_{s,D_0}$ est l'un des produits associés à X définis en* (6.2). *Alors X est transcendant.*

(ii) *De façon équivalente : si X est algébrique, alors pour tout $D > 3$, on a $\mathscr{N}_{s,D} < +\infty$.*

Remarque. (i) Une façon plus faible, mais un peu plus simple, d'écrire la condition « $\mathscr{N}_{s,D} < +\infty$ pour tout $D > 3$ » est la suivante : la suite des cotangentes partielles d'un nombre algébrique vérifie, pour tout $D > 3$,

$$\limsup_{\nu\to+\infty} \frac{n_{\nu+1}}{n_\nu^D} \leq 1. \tag{7.1}$$

(ii) Ce critère ne permet d'obtenir ni la transcendance de ξ ni celle de ϖ. On démontre au paragraphe suivant un critère un peu plus spécifique qui permet de montrer la transcendance de ξ : il ne s'applique pas à ϖ, dont la transcendance demeure un problème ouvert.

Démonstration. On utilise des arguments similaires à ceux développés au cours de la preuve du Théorème 4. Soit $D_0 > 3$ tel que $\mathscr{N}_{s,D_0} = +\infty$. On a alors $\limsup_{\nu\to+\infty} \frac{n_\nu}{Q_\nu^{D_0-1}} = +\infty$ et donc, pour un ε fixé tel que $0 < \varepsilon < D_0 - 3$,

$$0 < Q_\nu^{2+\varepsilon}\left| X - \frac{P_\nu}{Q_\nu} \right| = (1+X^2)(1+o(1))\frac{Q_\nu^{2+\varepsilon}}{n_\nu} = \frac{o(1)}{Q_\nu^{D_0-3-\varepsilon}}.$$

D'où

$$\liminf_{\nu\to+\infty} Q_\nu^{2+\varepsilon}\left|X-\frac{P_\nu}{Q_\nu}\right|=0,$$

et le théorème de Roth nous assure alors que X est transcendant. □

La question se pose de savoir si le critère précédent est optimal. La réponse est : presque. C'est une conséquence d'un résultat de Shallit [7], qui est parvenu à expliciter le développement en cotangente continue régulière de la classe des nombres quadratiques racines de l'équation $X^2-cX-1=0$, où $c\geq 1$ est un entier. Notons α,β les deux racines de cette équation, avec $-1<\beta<0<\alpha$.

Théorème 6 (Shallit)**.** *Avec les notations ci-dessus, les cotangentes complètes et partielles de $X=\alpha$ sont données, pour tout $\nu\geq 0$, par*

$$X_\nu=\alpha^{3^\nu}\quad\text{et}\quad n_\nu=\lfloor X_\nu\rfloor=\alpha^{3^\nu}+\beta^{3^\nu}. \tag{7.2}$$

Remarque. (i) Il est facile de voir que, pour tout $\nu\geq 0$, on a $n_{\nu+1}=n_\nu^3+3n_\nu$ et donc qu'il s'agit bien d'entiers puisque $n_0=\alpha+\beta=c$.

(ii) Les suites $(n_\nu)_{\nu\geq 0}$ associées aux nombres quadratiques α de Shallit vérifient donc une condition de croissance légèrement inférieure à la condition (7.1) :

$$\lim_{\nu\to+\infty}\frac{n_{\nu+1}}{n_\nu^3}=1.$$

Démonstration. Shallit vérifie par récurrence les formules (7.2). Elles sont correctes pour $\nu=0$. Supposons les vraies jusqu'à l'entier ν. En utilisant le fait que $\alpha\beta=1$, on a alors

$$X_{\nu+1}=\frac{X_\nu n_\nu+1}{X_\nu-n_\nu}=\frac{\alpha^{3^\nu}(\alpha^{3^\nu}+\beta^{3^\nu})+1}{-\beta^{3^\nu}}=\frac{\alpha^{2\cdot 3^\nu}+(\alpha\beta)^{3^\nu}+1}{\alpha^{-3^\nu}}=\alpha^{3^{\nu+1}}.$$

De plus, comme $|\beta|<1$ (car $c\geq 1$), on justifie sans difficulté que

$$\alpha^{3^{\nu+1}}+\beta^{3^{\nu+1}}<\alpha^{3^{\nu+1}}<\alpha^{3^{\nu+1}}+\beta^{3^{\nu+1}}+1,$$

ce qui prouve la formule pour $n_{\nu+1}$. □

8. Fractions continues déduites de développements en cotangente continue

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à un autre résultat de Lehmer, en montrant comment certains développements en cotangentes régulières peuvent se transformer en fractions continues régulières.

Rappelons que la suite des cotangentes partielles du nombre ξ est donnée par $n_0=0$ et $n_{\nu+1}=n_\nu^2+n_\nu+1$. Les considérations au début du paragraphe 3 ne nous donnent pour l'instant qu'un développement en fraction continue irrégulière pour ξ :

$$\xi=\frac{1|}{|1}+\frac{2|}{|2}+\frac{10|}{|10}+\frac{170|}{|170}+\cdots+\frac{n_\nu^2+1|}{|n_\nu^2+1}+\cdots. \tag{8.1}$$

Lehmer a très astucieusement réussi à déduire de (8.1) la fraction continue régulière de ξ :

$$\xi = \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|2} + \frac{1|}{|5} + \frac{1|}{|34} + \frac{1|}{|985} + \cdots + \frac{1|}{|a_\nu} + \cdots .$$

où $(a_\nu)_{\nu \geq 0}$ est la suite définie par $a_0 = a_1 = 1$ et $a_{\nu+2} = (n_{\nu+1} + n_\nu + 1)a_\nu$. Cette nouvelle représentation de ξ lui a alors permis de déterminer la nature arithmétique de ce nombre de façon remarquablement précise (voir le Théorème 9 ci-dessous).

Pour généraliser ce très joli résultat, on introduit une suite $(\alpha_\nu)_{\nu \geq 0}$ d'entiers, dont on demande seulement que $\alpha_0 = 1$ et $\alpha_\nu \geq 1$ pour tout $\nu \geq 0$. On définit deux autres suites $(n_\nu)_{\nu \geq 0}$ et $(A_\nu)_{\nu \geq 0}$ par les récurrences

$$n_{\nu+1} = \alpha_\nu(n_\nu^2 + 1) + n_\nu \quad \text{et} \quad A_{\nu+2} = (\alpha_\nu n_{\nu+1} + \alpha_\nu n_\nu + 1)A_\nu, \tag{8.2}$$

avec les valeurs initiales $n_0 = 0$, $A_0 = 1$ et $A_1 = 1$. On note comme d'habitude P_ν et Q_ν les suites de cotangentes réduites associées au réel X dont $(n_\nu)_{\nu \geq 0}$ est la suite de cotangentes partielles. Son développement en cotangente continue peut s'écrire comme

$$X = n_0 + \frac{n_0^2 + 1|}{|\alpha_0(n_0^2 + 1)} + \frac{n_1^2 + 1|}{|\alpha_1(n_1^2 + 1)} + \frac{n_2^2 + 1|}{|\alpha_2(n_2^2 + 1)} + \cdots . \tag{8.3}$$

Dans ces conditions, on obtient le résultat suivant.

Théorème 7. (i) *Le nombre X admet le développement en fraction continue régulière :*

$$X = \frac{1|}{|\alpha_0 A_0} + \frac{1|}{|\alpha_1 A_1} + \frac{1|}{|\alpha_2 A_2} + \cdots + \frac{1|}{|\alpha_\nu A_\nu} + \cdots . \tag{8.4}$$

(ii) *Si p_ν/q_ν dénote la ν-ième réduite de cette fraction continue (avec $p_0/q_0 = 0/1$ et $p_1/q_1 = 1/\alpha_0$), alors pour tout $\nu \geq 0$:*

$$P_{\nu+1} = (A_0 A_1 \cdots A_\nu)\, p_\nu \quad \text{et} \quad Q_{\nu+1} = (A_0 A_1 \cdots A_\nu)\, q_\nu.$$

Remarque. La théorie des fractions continues régulières nous assure que les nombres p_ν et q_ν sont premiers entre eux. Le point (ii) du Théorème 7 signifie donc que, pour tout $\nu \geq 1$, le produit $A_0 A_1 \cdots A_{\nu-1}$ est le pgcd de P_ν et Q_ν, qui tend vers l'infini avec ν.

Démonstration. (i) Les conditions sur la suite $(n_\nu)_{\nu \geq 0}$ sont en fait telles que la fraction continue irrégulière (8.3) peut se transformer facilement en une fraction continue régulière. Pour le voir, nous allons d'abord vérifier par récurrence sur $\nu \geq 0$ que $A_\nu A_{\nu+1} = n_\nu^2 + 1$, et donc que $\alpha_\nu A_\nu A_{\nu+1} = n_{\nu+1} - n_\nu$. En effet, on a bien $A_0 A_1 = 1 = n_0^2 + 1$. Si l'on suppose que l'assertion est vraie au rang ν, on a alors

$$A_{\nu+1}A_{\nu+2} = (\alpha_\nu n_{\nu+1} + \alpha_\nu n_\nu + 1)A_{\nu+1}A_\nu = (\alpha_\nu n_{\nu+1} + \alpha_\nu n_\nu + 1)(n_\nu^2 + 1) = n_{\nu+1}^2 + 1.$$

Détaillons la dernière égalité qui n'est pas complètement immédiate :

$$\begin{aligned} \frac{n_{\nu+1}^2 + 1}{n_\nu^2 + 1} = \frac{(\alpha_\nu(n_\nu^2 + 1) + n_\nu)^2 + 1}{n_\nu^2 + 1} &= \alpha_\nu^2(n_\nu^2 + 1) + 2n_\nu\alpha_\nu + 1 \\ &= \alpha_\nu(n_{\nu+1} - n_\nu) + 2n_\nu\alpha_\nu + 1 = \alpha_\nu n_{\nu+1} + \alpha_\nu n_\nu + 1. \end{aligned}$$

La fraction continue (8.3) s'écrit donc

$$\begin{aligned}X = n_0 + \left.\frac{A_0A_1}{|\alpha_0A_0A_1}\right| + \left.\frac{A_1A_2}{|\alpha_1A_1A_2}\right| + \left.\frac{A_2A_3}{|\alpha_2A_2A_3}\right| + \cdots \\ = \left.\frac{1}{|\alpha_0A_0}\right| + \left.\frac{1}{|\alpha_1A_1}\right| + \left.\frac{1}{|\alpha_2A_2}\right| + \cdots .\end{aligned}$$

(ii) On procède par récurrence sur $\nu \geq 1$ en montrant que c'est vrai pour $P_{\nu+2}$ si c'est vrai pour $P_{\nu+1}$ et P_ν. On doit donc d'abord amorcer la récurrence aux deux premiers crans $\nu = 1$ et $\nu = 2$.

Pour $\nu = 1$: on a $P_1 = n_0 = 0$, $p_0 = 0$ et $A_0 = 1$, d'où $P_1 = A_0\,p_0$. De même, puisque $Q_1 = 1$, $q_0 = 1$ et $A_1 = 1$, on a bien $Q_1 = A_0\,q_0$.

Pour $\nu = 2$: on a $P_2 = n_1P_1 + Q_1 = n_1 = \alpha_0 = 1$, $p_1 = 1$ et $A_0A_1 = 1$, d'où $P_2 = A_0A_1\,p_1$. De même, $Q_2 = n_1Q_1 - P_1 = n_1 = \alpha_0 = 1$, $q_1 = \alpha_0A_0 = 1$ et $A_0A_1 = 1$, donc $Q_2 = A_0A_1\,q_1$.

Rappelons que les numérateurs des réduites vérifient $p_{\nu+1} = \alpha_\nu A_\nu p_\nu + p_{\nu-1}$, tandis que les numérateurs des cotangentes réduites vérifient $P_{\nu+2} = (n_{\nu+1} - n_\nu)P_{\nu+1} + (n_\nu^2 + 1)P_\nu$ (pour tout $\nu \geq 0$). Supposons alors que les formules sont démontrées pour $P_{\nu+1}$ et P_ν, avec $\nu \geq 1$. En utilisant le fait que $n_{\nu+1} - n_\nu = \alpha_\nu(n_\nu^2 + 1)$ et $n_\nu^2 + 1 = A_\nu A_{\nu+1}$, on obtient alors

$$\begin{aligned}P_{\nu+2} &= (n_\nu^2 + 1)(\alpha_\nu P_{\nu+1} + P_\nu) = (n_\nu^2 + 1)\left(\alpha_\nu(A_0 \cdots A_\nu)p_\nu + (A_0 \cdots A_{\nu-1})p_{\nu-1}\right) \\ &= (A_0 \cdots A_{\nu-1})(n_\nu^2 + 1)\left(\alpha_\nu A_\nu p_\nu + p_{\nu-1}\right) = (A_0 \cdots A_{\nu+1})\,p_{\nu+1}.\end{aligned}$$

On procède exactement de la même façon avec $Q_{\nu+2}$. □

9. Mesures d'irrationalité de développements en cotangente continue

On reste dans les conditions du paragraphe 8 précédent, c'est-à-dire que la récurrence $n_{\nu+1} = \alpha_\nu(n_\nu^2 + 1) + n_\nu$, avec $n_0 = 0$, $\alpha_0 = 1$ et $\alpha_\nu \geq 1$, définit la suite des cotangentes partielles d'un réel X. On note de nouveau p_ν/q_ν la ν-ième réduite de la fraction continue de X.

Théorème 8. *Si la suite $(\alpha_\nu)_{\nu\geq 0}$ est croissante, alors pour tout $\nu \geq 0$, on a*

$$0 < \left| X - \frac{p_\nu}{q_\nu} \right| < \frac{1}{q_\nu^3}. \tag{9.1}$$

En conséquence, le nombre X est transcendant.

Remarque. (i) Lorsque $\alpha_\nu = 1$ pour tout $\nu \geq 0$, ce théorème est dû à Lehmer.

(ii) On produit ainsi des nombres transcendants qui peuvent ne pas satisfaire au critère de transcendance donné par le Théorème 5.

La mesure d'irrationalité (9.1) n'est en général pas optimale. On obtient une mesure optimale en remplaçant la croissance de $(\alpha_\nu)_{\nu\geq 0}$ par la condition un peu différente suivante : il existe un réel $D \geq 0$ tel que

$$0 < \mathscr{C}_i = \prod_{\nu=0}^{\infty} \frac{\alpha_{2\nu+1}}{n_{2\nu+1}^D} < +\infty \quad \text{et} \quad 0 < \mathscr{C}_p = \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha_{2\nu}}{n_{2\nu}^D} < +\infty. \tag{9.2}$$

Il est tout à fait possible de satisfaire à cette condition puisque n_ν ne dépend que de n_0, $\alpha_0, \dots, \alpha_{\nu-1}$ et $\alpha_{\nu-1}$: on peut donc déterminer la valeur de n_ν, puis choisir α_ν, et ceci de telle sorte que les produits (9.2) soient convergents, par exemple $\alpha_\nu = [n_\nu^D]$ pour $\nu \geq 1$. Bien sûr, il existe des suites $(\alpha_\nu)_{\nu\geq 0}$ croissantes qui vérifient la condition (9.2), mais ce ne sont pas les seules.

Théorème 9. *Si la condition* (9.2) *est satisfaite, il existe deux réels positifs L_i et L_p, en général distincts et dépendants de la suite $(\alpha_\nu)_{\nu\geq 0}$ et de D, tels que*

$$L_i\, L_p\, (1+X^2)^{D+1} = 1$$

et

$$\left| X - \frac{p_{2\nu+1}}{q_{2\nu+1}} \right| = \frac{(1+o(1))\, L_i}{q_{2\nu+1}^{D+3}} \quad \text{et} \quad \left| X - \frac{p_{2\nu}}{q_{2\nu}} \right| = \frac{(1+o(1))\, L_p}{q_{2\nu}^{D+3}}.$$

Remarque. (i) La mesure d'irrationalité du nombre X est donc exactement $D+3$.

(ii) Lehmer a montré ce théorème dans le cas où $\alpha_\nu = 1$, pour tout $\nu \geq 0$, et $D = 0$. Le nombre X est alors le nombre ξ : en 1938, on ne disposait pas encore du théorème de Roth, mais seulement de la version plus faible de Siegel (améliorant celles de Liouville et Thue). De la mesure d'irrationalité exactement égale à 3 de ξ, Lehmer avait alors seulement pu déduire que ξ n'est pas un nombre algébrique de degré ≤ 3.

(iii) Dans [1, p. 434], Finch mentionne une note non-publiée de P. Borwein intitulée « *Lehmer's constant is transcendental* » et qui semble fondée sur la remarque (ii) ci-dessus.

(iv) La démonstration produira des expressions plus ou moins explicites de L_i et L_p en terme de certains produits infinis.

9.1. **Démonstration du Théorème 8.** La théorie des fractions continues nous donne l'estimation générale, valable pour tout $\nu \geq 0$:

$$0 < \left| X - \frac{p_\nu}{q_\nu} \right| < \frac{1}{q_\nu q_{\nu+1}} < \frac{1}{\alpha_\nu A_\nu\, q_\nu^2}.$$

Pour conclure, il suffit de montrer le lemme suivant.

Lemme 5. *Si la suite $(\alpha_\nu)_{\nu\geq 0}$ est croissante, alors pour tout $\nu \geq 0$, on a $q_\nu \leq \alpha_\nu A_\nu$.*

Démonstration. Posons $\delta_0 = \delta_1 = 1$ et, pour $\nu \geq 1$,

$$\delta_\nu = \begin{cases} \prod_{\mu=0}^{N-1} \dfrac{\alpha_{2\mu+1}}{\alpha_{2\mu}} & \text{si } \nu = 2N \text{ est pair ;} \\ \prod_{\mu=0}^{N-1} \dfrac{\alpha_{2\mu+2}}{\alpha_{2\mu+1}} & \text{si } \nu = 2N+1 \text{ est impair.} \end{cases}$$

On a donc $\delta_{\nu+2} = \delta_\nu \alpha_{\nu+1}/\alpha_\nu$ pour tout $\nu \geq 0$, relation qui nous servira un peu plus bas. Comme la suite $(\alpha_\nu)_{\nu\geq 0}$ est croissante, on a aussi $\delta_\nu \leq \alpha_{\nu-1} \leq \alpha_\nu$ pour tout $\nu \geq 0$. Il nous suffit donc de montrer que $q_\nu \leq \delta_\nu A_\nu$, ce que l'on va faire par récurrence sur $\nu \geq 0$.

Pour amorcer la récurrence, on doit la vérifier pour $\nu = 0, 1, 2$ et 3 : un simple calcul montre que

$$q_0 = 1 = \delta_0 A_0\,, \quad q_1 = \alpha_0 = 1 = \delta_1 A_1\,, \quad q_2 = \alpha_1 + 1 \leq 2\alpha_1 = \delta_2 A_2\,,$$

$$q_3 = 2\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_2 + 1 \leq 2\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_2 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \delta_3 A_3.$$

On suppose maintenant que $\nu \geq 4$ et que $q_{\nu-2} \leq \delta_{\nu-2}A_{\nu-2}$. Au moyen des récurrences

$$q_\nu = \alpha_{\nu-1}A_{\nu-1}q_{\nu-1} + q_{\nu-2}, \quad q_{\nu-1} = \alpha_{\nu-2}A_{\nu-2}q_{\nu-2} + q_{\nu-3}, \quad q_{\nu-2} = \alpha_{\nu-3}A_{\nu-3}q_{\nu-3} + q_{\nu-4},$$

on vérifie que

$$\delta_\nu A_\nu - q_\nu = \delta_\nu A_\nu - (\alpha_{\nu-1}\alpha_{\nu-2}A_{\nu-1}A_{\nu-2} + 1)\ q_{\nu-2} - \frac{\alpha_{\nu-1}A_{\nu-1}}{\alpha_{\nu-3}A_{\nu-3}}(q_{\nu-2} - q_{\nu-4}). \tag{9.3}$$

En utilisant le fait que $q_{\nu-2} - q_{\nu-4} \geq 1$ et l'hypothèse $q_{\nu-2} \leq \delta_{\nu-2}A_{\nu-2}$, on déduit de (9.3) que

$$\frac{\delta_\nu A_\nu - q_\nu}{\delta_{\nu-2}A_{\nu-2}} \geq \frac{\delta_\nu A_\nu}{\delta_{\nu-2}A_{\nu-2}} - (\alpha_{\nu-1}\alpha_{\nu-2}A_{\nu-1}A_{\nu-2} + 1) - \frac{\alpha_{\nu-1}A_{\nu-1}}{\alpha_{\nu-3}A_{\nu-3}}. \tag{9.4}$$

Or

$$\frac{\delta_\nu}{\delta_{\nu-2}} = \frac{\alpha_{\nu-1}}{\alpha_{\nu-2}}, \quad \alpha_{\nu-2}A_{\nu-1}A_{\nu-2} = n_{\nu-1} - n_{\nu-2}$$

et

$$\frac{A_\nu}{A_{\nu-2}} = \alpha_{\nu-2}n_{\nu-1} + \alpha_{\nu-2}n_{\nu-2} + 1\,, \qquad \frac{A_{\nu-1}}{A_{\nu-3}} = \alpha_{\nu-3}n_{\nu-2} + \alpha_{\nu-3}n_{\nu-3} + 1.$$

En reportant ces quatre relations dans (9.4), on obtient donc

$$\begin{aligned}
\frac{\delta_\nu A_\nu - q_\nu}{\delta_{\nu-2}A_{\nu-2}} &\geq \frac{\alpha_{\nu-1}}{\alpha_{\nu-2}}\,(\alpha_{\nu-2}n_{\nu-1} + \alpha_{\nu-2}n_{\nu-2} + 1) \\
&\qquad\qquad - \alpha_{\nu-1}(n_{\nu-1} - n_{\nu-2}) - 1 - (\alpha_{\nu-3}n_{\nu-2} + \alpha_{\nu-3}n_{\nu-3} + 1) \\
&\geq \frac{\alpha_{\nu-1}}{\alpha_{\nu-2}} - 1 + (2\alpha_{\nu-1} - \alpha_{\nu-3})n_{\nu-2} - \alpha_{\nu-3}n_{\nu-3} - 1 \\
&\geq \frac{\alpha_{\nu-1}}{\alpha_{\nu-2}} - 1 + \alpha_{\nu-3}(n_{\nu-2} - n_{\nu-3}) - 1 \geq 0.
\end{aligned}$$

On a donc montré que pour tout $\nu \geq 4$, si $q_{\nu-2} \leq \delta_{\nu-2}A_{\nu-2}$, alors $q_\nu \leq \delta_\nu A_\nu$. La démonstration du lemme est complète. $\square$

9.2. **Démonstration du Théorème 9.** La récurrence $n_{\nu+1} = \alpha_\nu(n_\nu^2 + 1) + n_\nu$ et la convergence des produits $\mathscr{C}_i$ et $\mathscr{C}_p$ (définis en (9.2)) assurent que les produits suivants sont tous convergents non-nuls :

$$\mathscr{A}_i = \prod_{\nu=0}^{\infty}\left(1 + \frac{n_{2\nu+1}}{n_{2\nu+2}} + \frac{1}{\alpha_{2\nu+1}n_{2\nu+2}}\right), \quad \mathscr{A}_p = \prod_{\nu=0}^{\infty}\left(1 + \frac{n_{2\nu}}{n_{2\nu+1}} + \frac{1}{\alpha_{2\nu}n_{2\nu+1}}\right),$$

$$\mathscr{B}_i = \prod_{\nu=1}^{\infty}\frac{n_{2\nu+1}}{n_{2\nu}^{D+2}}, \quad \mathscr{B}_p = \prod_{\nu=0}^{\infty}\frac{n_{2\nu+2}}{n_{2\nu+1}^{D+2}}, \quad \mathscr{D} = q_1\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1 + \frac{q_{\nu-1}}{\alpha_\nu A_\nu q_\nu}\right), \quad \mathscr{P} = \prod_{\nu=1}^{\infty}\sqrt{1 + \frac{1}{n_\nu^2}}.$$

Les produits $\mathscr{P}$ et $\mathscr{N}_{D+2} = \mathscr{B}_i\mathscr{B}_p$ ont déjà été introduits au paragraphe 6. On note $\mathscr{C} = \mathscr{C}_i\mathscr{C}_p$ et $\mathscr{N} = \mathscr{N}_{D+2}$ pour simplifier.

On commence par montrer le lemme suivant.

Lemme 6. *On a*

$$\lim_{\nu\to+\infty} \frac{q_{\nu+1}}{q_\nu^{D+2}} \sqrt{\frac{A_{\nu-1}^{D+2}}{A_\nu}} = \left(\frac{\mathscr{N}}{\mathscr{C}\mathscr{D}\mathscr{P}}\right)^{D+1} \tag{9.5}$$

et

$$\lim_{\nu\to+\infty} \frac{A_{2\nu}}{A_{2\nu-1}^{D+2}} = \frac{\mathscr{A}_p\mathscr{B}_i\mathscr{B}_p^D\mathscr{C}_p}{\big(\mathscr{A}_i\mathscr{C}_i\big)^{D+2}} \quad \text{et} \quad \lim_{\nu\to+\infty} \frac{A_{2\nu+1}}{A_{2\nu}^{D+2}} = \frac{\mathscr{A}_i\mathscr{B}_p\mathscr{B}_i^D\mathscr{C}_i}{\big(\mathscr{A}_p\mathscr{C}_p\big)^{D+2}}. \tag{9.6}$$

Démonstration. On exploite le fait que $\alpha_\nu \approx n_\nu^D$ et $n_{\nu+1} \approx n_\nu^{D+2}$, les erreurs commises étant prises en compte dans les divers produits définis au début de ce paragraphe.

La relation de récurrence $q_{\nu+1} = \alpha_\nu A_\nu q_\nu + q_{\nu-1}$ sous la forme $\dfrac{q_{\mu+1}}{\alpha_\mu A_\mu q_\mu} = 1 + \dfrac{q_{\mu-1}}{\alpha_\mu A_\mu q_\mu}$ nous donne

$$\frac{q_{\nu+1}}{\prod\limits_{\mu=1}^{\nu}(\alpha_\mu A_\mu)} = q_1 \prod_{\mu=1}^{\nu+1} \frac{q_{\mu+1}}{\alpha_\mu A_\mu q_\mu} = q_1 \prod_{\mu=1}^{\nu}\left(1 + \frac{q_{\mu-1}}{\alpha_\mu A_\mu q_\mu}\right) = (1+o(1))\,\mathscr{D}.$$

De plus,

$$\prod_{\mu=1}^{\nu}(\alpha_\mu A_\mu) = \left(\prod_{\mu=1}^{\nu}\alpha_\mu\right)\prod_{\mu=1}^{\nu}\sqrt{A_\mu^2} = \left(\prod_{\mu=1}^{\nu}\frac{\alpha_\mu}{n_\mu^D}\right)\left(\prod_{\mu=1}^{\nu} n_\mu^D\right)\sqrt{A_1(A_1A_2)\cdots(A_{\nu-1}A_\nu)A_\nu}$$

$$= (1{+}o(1))\,\mathscr{C}\left(\prod_{\mu=1}^{\nu} n_\mu^D\right)\sqrt{A_1A_\nu}\sqrt{(n_1^2+1)\cdots(n_{\nu-1}^2+1)} = (1{+}o(1))\,\mathscr{C}\mathscr{P}\,\sqrt{A_\nu}\,n_\nu^D\left(\prod_{\mu=1}^{\nu-1} n_\mu^{D+1}\right).$$

(En cours de route, on a utilisé $A_1 = 1$ et la relation $A_\mu A_{\mu+1} = n_\mu^2 + 1$.) Donc

$$q_{\nu+1} = (1+o(1))\,\mathscr{C}\mathscr{D}\mathscr{P}\sqrt{A_\nu}\,n_\nu^D\left(\prod_{\mu=1}^{\nu-1} n_\mu^{D+1}\right). \tag{9.7}$$

Or, cette relation peut aussi s'écrire avec ν à la place de $\nu+1$: en prenant la puissance $(D+2)$–ième et en appliquant ensuite l'approximation $n_\mu^{D+2} \approx n_{\mu+1}$, on obtient (avec $n_1 = 1$)

$$\begin{aligned} q_\nu^{D+2} &= (1+o(1))\big(\mathscr{C}\mathscr{D}\mathscr{P}\big)^{D+2}\sqrt{A_{\nu-1}^{D+2}}\,n_{\nu-1}^{D(D+2)}\left(\prod_{\mu=1}^{\nu-2} n_\mu^{(D+1)(D+2)}\right) \\ &= (1+o(1))\big(\mathscr{C}\mathscr{D}\mathscr{P}\big)^{D+2}\mathscr{N}^{-D-1}\sqrt{A_{\nu-1}^{D+2}}\,n_\nu^D\left(\prod_{\mu=1}^{\nu-1} n_\mu^{D+1}\right). \end{aligned} \tag{9.8}$$

En comparant (9.7) et (9.8), on obtient la limite (9.5) attendue.

Pour déterminer les deux autres limites portant sur la suite $(A_\nu)_{\nu\geq 0}$, la méthode est similaire. On remarque tout d'abord que la relation $A_{\nu+2} = (\alpha_\nu n_{\nu+1} + \alpha_\nu n_\nu + 1)A_\nu$, sous la forme $A_{\nu+2} = \alpha_\nu n_{\nu+1}\left(1 + \dfrac{n_\nu}{n_{\nu+1}} + \dfrac{1}{\alpha_\nu n_{\nu+1}}\right)A_\nu$, montre que

$$A_{2\nu} = (1 + o(1))\ \alpha_0 n_1 \alpha_2 n_3 \cdots \alpha_{2\nu-2} n_{2\nu-1}\, \mathscr{A}_p$$

et

$$A_{2\nu+1} = (1 + o(1))\ \alpha_1 n_2 \alpha_3 n_4 \cdots \alpha_{2\nu-1} n_{2\nu}\, \mathscr{A}_i.$$

En utilisant de nouveau le fait que $\alpha_\nu \approx n_\nu^D$ et $n_{\nu+1} \approx n_\nu^{D+2}$, on parvient à relier les comportement asymptotiques de A_ν et $A_{\nu-1}^{D+2}$, selon la parité de ν. On omet les détails qui ne présentent pas de difficultés. On trouve (avec $\alpha_0 = 1$)

$$A_{2\nu-1}^{D+2} = \frac{(\mathscr{A}_i\mathscr{C}_i)^{D+2}}{\mathscr{B}_i\mathscr{B}_p^D}\left(n_2^D n_3 n_4^D n_5 \cdots n_{2\nu-2}^D n_{2\nu-1}\right)\ (1 + o(1))$$

et

$$A_{2\nu} = \mathscr{A}_p\mathscr{C}_p\left(n_2^D n_3 n_4^D n_5 \cdots n_{2\nu-2}^D n_{2\nu-1}\right)\ (1 + o(1)),$$

dont découle la première limite de (9.6). De même

$$A_{2\nu}^{D+2} = \frac{(\mathscr{A}_p\mathscr{C}_p)^{D+2}}{\mathscr{B}_p\mathscr{B}_i^D}\left(n_1^D n_2 n_3^D n_4 n_5^D \cdots n_{2\nu-1}^D n_{2\nu}\right)\ (1 + o(1))$$

et

$$A_{2\nu+1} = \mathscr{A}_i\mathscr{C}_i\left(n_1^D n_2 n_3^D n_4 n_5^D \cdots n_{2\nu-1}^D n_{2\nu}\right)\ (1 + o(1)),$$

dont découle la deuxième limite de (9.6) $\square$

Nous sommes maintenant en position de prouver le Théorème 9. On a :

$$\frac{1}{q_\nu(q_{\nu+1} + q_\nu)} < \left|X - \frac{p_\nu}{q_\nu}\right| < \frac{1}{q_\nu q_{\nu+1}}.$$

Comme $q_\nu = o(q_{\nu+1})$, on en déduit que

$$\left|X - \frac{p_\nu}{q_\nu}\right| = \frac{1 + o(1)}{q_\nu q_{\nu+1}}. \tag{9.9}$$

L'équation (9.5) montre alors que

$$\left|X - \frac{p_\nu}{q_\nu}\right| = \frac{1 + o(1)}{q_\nu^{D+3}}\left(\frac{\mathscr{C}\,\mathscr{D}\,\mathscr{P}}{\mathscr{N}}\right)^{D+1}\sqrt{\frac{A_{\nu-1}^{D+2}}{A_\nu}}.$$

Compte-tenu des deux limites (9.6), on a donc bien

$$\lim_{\nu\to+\infty} q_{2\nu+1}^{D+3}\left|X - \frac{p_{2\nu+1}}{q_{2\nu+1}}\right| = L_i \quad \text{et} \quad \lim_{\nu\to+\infty} q_{2\nu}^{D+3}\left|X - \frac{p_{2\nu}}{q_{2\nu}}\right| = L_p, \tag{9.10}$$

avec[3]

$$L_i = \left(\frac{\mathscr{C}\mathscr{D}\mathscr{P}}{\mathscr{N}}\right)^{D+1}\sqrt{\frac{\mathscr{A}_i\mathscr{B}_p\mathscr{B}_i^D\mathscr{C}_i}{(\mathscr{A}_p\mathscr{C}_p)^{D+2}}} \quad \text{et} \quad L_p = \left(\frac{\mathscr{C}\mathscr{D}\mathscr{P}}{\mathscr{N}}\right)^{D+1}\sqrt{\frac{\mathscr{A}_p\mathscr{B}_i\mathscr{B}_p^D\mathscr{C}_p}{(\mathscr{A}_i\mathscr{C}_i)^{D+2}}}. \tag{9.11}$$

Il nous reste à montrer que $L_iL_p = (1+X^2)^{-(D+1)}$. La démonstration de ce fait suit les grandes lignes de celle de Lehmer dans le cas où $\alpha_\nu = 1$. Notons tout d'abord que, puisque $q_{\nu+1} = \alpha_\nu A_\nu q_\nu\,(1+o(1))$, les équations (9.9) et (9.10) montrent que

$$\lim_{\nu\to+\infty}\left(\frac{q_\nu^{D+1}}{\alpha_\nu A_\nu}\frac{q_{\nu+1}^{D+1}}{\alpha_{\nu+1}A_{\nu+1}}\right) = L_iL_p.$$

Poursuivons en démontrant que

$$p_{\nu+1}p_\nu + q_{\nu+1}q_\nu = n_{\nu+1}.$$

Pour cela, rappelons que puisque $n_\mu^2 + 1 = A_\mu A_{\mu+1}$, l'équation (2.4) donne dans notre situation

$$P_{\nu+2}P_{\nu+1} + Q_{\nu+2}Q_{\nu+1} = n_{\nu+1}(A_0A_1)(A_1A_2)\dots(A_\nu A_{\nu+1}). \tag{9.12}$$

Par ailleurs, on a montré au Théorème 7 que

$$P_{\nu+1} = (A_0A_1\cdots A_\nu)\,p_\nu \quad \text{et} \quad Q_{\nu+1} = (A_0A_1\cdots A_\nu)\,q_\nu \tag{9.13}$$

(et les analogues avec $\nu+2$ à la place de $\nu+1$). En reportant (9.13) dans (9.12) et en simplifiant le résultat, on obtient bien que $p_{\nu+1}p_\nu + q_{\nu+1}q_\nu = n_{\nu+1}$. Considérons alors la suite

$$F_\nu = \frac{q_\nu^{D+1}}{\alpha_\nu A_\nu}\frac{q_{\nu+1}^{D+1}}{\alpha_{\nu+1}A_{\nu+1}}\left(\frac{p_{\nu+1}}{q_{\nu+1}}\frac{p_\nu}{q_\nu}+1\right)^{D+1}.$$

D'un côté, on peut affirmer que

$$\lim_{\nu\to+\infty} F_\nu = L_iL_p(1+X^2)^{D+1}.$$

D'un autre côté, comme $\alpha_\nu A_\nu A_{\nu+1} = n_{\nu+1} - n_\nu$, on obtient

$$F_\nu = \frac{(p_{\nu+1}p_\nu + q_{\nu+1}q_\nu)^{D+1}}{(n_{\nu+1}-n_\nu)\,\alpha_{\nu+1}} = \frac{n_{\nu+1}^{D+1}}{(n_{\nu+1}-n_\nu)\,\alpha_{\nu+1}}.$$

Comme $\alpha_{\nu+1}/n_{\nu+1}^D \to 1$ quand $\nu\to+\infty$, on a alors

$$\lim_{\nu\to+\infty} F_\nu = 1.$$

La comparaison des deux valeurs obtenues pour la limite de F_ν montrent que

$$L_iL_p\,(1+X^2)^{D+1} = 1.$$

[3]Bien que particulièrement compliquées, les expressions (9.11) de L_i et L_p ont l'intérêt de n'utiliser que des quantités calculables à une précision arbitraire sans avoir à « connaître » X à l'avance, contrairement à (9.10) qui fait intervenir explicitement X.

Remerciements

Je remercie Marius Iosifescu pour m'avoir signalé le livre [6], Éric Saias pour m'avoir laissé reproduire ici sa démonstration du Théorème 3 et l'arbitre pour sa relecture très attentive.

Bibliographie

[1] S. Finch, *Mathematical Constants*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications **94**, Cambridge University Press, 2003.

[2] M. Iosifescu et C. Kraaikamp, *Metrical theory of continued fractions*, Mathematics and its Applications **547**, Kluwer Academic Publishers, 2002.

[3] D. H. Lehmer, *A cotangent analogue of continued fractions*, Duke Math. J. **4**(1938), 323–340.

[4] F. Le Lionnais, *Les nombres remarquables*, Actualités scientifiques et industrielles **1407**, Hermann, 1983.

[5] K. F. Roth, *Rational approximations to algebraic numbers*, Mathematika **2** (1955), 1–20. Corrigendum, 168.

[6] F. Schweiger, *Ergodic Theory of Fibred Systems and Metric Number Theory*, Clarendon Press, Oxford, 1995.

[7] J. O. Shallit, *Predictable regular continued cotangent expansions*, J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B 80B (1976), no. 2, 285–290.

[8] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, Publication de l'Institut Élie Cartan **13**, Université de Nancy, 1990.

[9] W. Leighton, *Proper continued fractions*, Amer. Math. Monthly **47** (1940), 274–280.

Institut Fourier, CNRS UMR 5582 / Université Grenoble 1, 100 rue des Maths, BP 74, 38402 Saint-Martin d'Hères cedex, France

E-mail address: rivoal@ujf-grenoble.fr