

POINTS ALGÈBRIQUES DE LA FONCTION SIGMA DE WEIERSTRASS

ETIENNE BESSON

RÉSUMÉ. En suivant une méthode inspirée de l'article [« Rational values of the Riemann zeta function », *Journal of Number Theory* **131** (2011), 2037–2046] de Masser, on établit pour presque tout réseau du plan complexe un nouveau lemme de zéros pour les polynômes en z et $\sigma(z)$, où σ est la fonction sigma de Weierstraß. En utilisant un lemme de Bombieri-Pila, on en déduit une majoration pour la quantité de nombres algébriques de valeur absolue, degré et hauteur (de Weil) bornés dont l'image par la fonction sigma est également algébrique de degré et hauteur bornés.

1. INTRODUCTION ET NOTATIONS

1.1. Introduction. Cet article est consacré aux points algébriques de degré, hauteur et module bornés sur le graphe de la fonction sigma de Weierstraß. Plus précisément, on fixe un réseau du plan complexe $\Lambda = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}\tau$ ($\text{Im } \tau > 0$) et on s'intéresse au cardinal de l'ensemble

$$S(R, d, H) = \{z \in \mathbf{C} : |z| \leq R, [\mathbf{Q}(z, \sigma(z)) : \mathbf{Q}] \leq d, H(z) \leq H, H(\sigma(z)) \leq H\}$$

lorsque R , d et H varient ($H(\alpha)$ désigne la hauteur absolue non-logarithmique du nombre algébrique α , voir partie 1.2).

L'étude des propriétés diophantiennes des valeurs de la fonction sigma n'est en aucun cas un sujet neuf. On peut notamment mentionner l'étonnant résultat de Waldschmidt (cité dans [7, p. 26]) $\sigma(1/2) = 2^{5/4}\pi^{1/2}e^{\pi/8}\Gamma(1/4)^{-2}$ dans le cas du réseau carré, qui suggère un lien entre les valeurs de la fonction sigma et celles de la fonction Gamma.

Par ailleurs, l'inventaire mené par Diaz dans [5] témoigne d'un certain nombre de théorèmes et de conjectures concernant les propriétés de transcendance et d'indépendance algébrique de grandeurs liées aux réseaux, notamment le théorème de Nesterenko $\text{degtr}_{\mathbf{Q}}(g_2, g_3, \omega_1, \omega_2, \eta_1, \eta_2, \exp(2i\pi\omega_2/\omega_1)) \geq 3$. Une meilleure connaissance des propriétés de la fonction sigma permettrait probablement d'effectuer des progrès dans la direction de résultats de ce type.

Notre objectif dans cet article est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 1.1. *Pour presque tout réseau $\Lambda = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}\tau$, il existe une constante $c > 0$ effective telle que, pour tous $d \geq 1$ entier, $H \geq 3$ et $R \geq 2$ réels,*

$$|S(R, d, H)| \leq cR^{10} \log(R) \frac{d^4(\log(H))^2}{\log(d \log(H))}.$$

Le sens de ce « presque tout » sera précisé dans les parties 3 et 4 ; on peut d'ores et déjà mentionner qu'il s'agit d'une condition technique liée à la géométrie du réseau (mais pas à ses propriétés arithmétiques) dont on conjecture qu'il est possible de s'affranchir.

Dans [9], Surroca obtient la borne $|S(R, d, H)| \leq c(R)d^3(\log(H))^2$ pour une classe assez générale de fonction transcendentes, où la constante $c(R)$ peut être rendue arbitrairement petite. Notre théorème 1.1 fournit une borne moins fine, mais valable pour tous $d \geq 1$ et $H \geq 3$, alors que le résultat de Surroca n'est valable que pour des sous-suites infinies non-explicites de valeurs de d et H .

Pour démontrer notre résultat, on va suivre la stratégie proposée par Masser pour la fonction zêta de Riemann dans [8] : on commence par exploiter la répartition des petites valeurs de la fonction sigma et la formule d'interpolation de Lagrange pour obtenir dans la partie 3 le lemme de zéros suivant :

Théorème 1.2. *Pour presque tout réseau $\Lambda = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}\tau$, il existe une constante effective $c > 0$ telle que, pour tout entier $L \geq 1$, pour tout réel $R \geq 2$ et pour tout polynôme non nul $P(z, w) \in \mathbf{C}[z, w]$ de degré au plus L suivant chaque variable, la fonction $P(z, \sigma(z))$ admet au plus $cL(R + \sqrt{L})^2 \log(R + L)$ zéros (comptés avec multiplicité) dans le disque $|z| \leq R$.*

Puis, dans la partie 4, on combine ce lemme de zéros avec l'application d'un théorème de Bombieri-Pila [3] à l'ensemble $S(R, d, H)$ pour achever la démonstration.

Cette méthode, outre son utilisation par Masser pour la fonction zêta, a déjà permis d'obtenir des résultats de nature similaire pour la fonction Gamma d'Euler [1] et a été adaptée par Boxall et Jones pour deux classes bien plus générales de fonctions analytiques [4].

1.2. Notations. Dans toute la suite, pour $R \geq 0$, on note $B(R)$ le disque fermé de centre 0 et de rayon R dans \mathbf{C} ou \mathbf{R}^2 muni de sa norme euclidienne (suivant le contexte). Si f est une fonction holomorphe sur un ouvert contenant $B(R)$, on note $|f|_R = \max\{|f(z)|, z \in B(R)\}$. Pour un polynôme $P(z, w) = \sum_{0 \leq i, j \leq d} a_{i,j} z^i w^j \in \mathbf{C}[x]$, on note $|P| = \max |a_{i,j}|$.

Si $\alpha = \alpha_1 \in \mathbf{C}$ est un nombre algébrique de degré d et de polynôme minimal $P(x) = a_d x^d + \dots + a_0 = a_d(x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_d) \in \mathbf{Z}[x]$, on note $H(\alpha)$ la *hauteur absolue* ou *hauteur de Weil* (non-logarithmique) de α , donnée par

$$H(\alpha) = \left(a_d \prod_{i=1}^d \max(1, |\alpha_i|) \right)^{1/d}.$$

En particulier, pour α rationnel écrit sous forme irréductible p/q , on a $H(\alpha) = \max(|p|, |q|)$ (on pourra se référer à [2, p. 16] pour plus d'informations).

2. FONCTION SIGMA DE WEIERSTRASS

2.1. Généralités. Cette partie est consacrée à un rappel des définitions et propriétés utiles de la fonction sigma de Weierstraß. Pour les démonstrations et des détails supplémentaires, on pourra se référer à [10, ch. 20], en prenant garde aux différences de conventions (en particulier, les auteurs notent $2\omega_1$ et $2\omega_2$ ce que nous écrirons ω_1 et ω_2).

Soient ω_1 et ω_2 deux nombres complexes tels que $\text{Im}(\omega_2/\omega_1) > 0$. On considère le réseau $\Lambda = \omega_1\mathbf{Z} \oplus \omega_2\mathbf{Z} \subset \mathbf{C}$. Dans toute la suite, on notera $\Lambda^* = \Lambda \setminus \{0\}$.

Définition 2.1 (Fonction sigma de Weierstraß). *Pour tout $z \in \mathbf{C}$, on pose*

$$\sigma(\Lambda, z) = z \prod_{\lambda \in \Lambda^*} \left(1 - \frac{z}{\lambda}\right) \exp\left(\frac{z}{\lambda} + \frac{z^2}{2\lambda^2}\right).$$

Cette expression définit une fonction entière dont les zéros sont exactement les points du réseau Λ et sont tous de multiplicité un.

Définition 2.2 (Fonction zêta de Weierstraß). *Pour tout $z \in \mathbf{C} \setminus \Lambda$, on pose*

$$\zeta(\Lambda, z) = \frac{\sigma'(\Lambda, z)}{\sigma(\Lambda, z)} = \frac{1}{z} + \sum_{\lambda \in \Lambda^*} \left(\frac{1}{z - \lambda} + \frac{1}{\lambda} + \frac{z}{\lambda^2}\right).$$

Ceci définit une fonction méromorphe possédant un pôle simple à chacun des points du réseau Λ .

Proposition 2.3 (Homogénéité). *Soit α un nombre complexe non nul. Alors, pour tout $z \in \mathbf{C}$ (resp. $z \in \mathbf{C} \setminus \Lambda$), on a :*

- 1) $\sigma(\alpha\Lambda, \alpha z) = \alpha\sigma(\Lambda, z)$;
- 2) $\zeta(\alpha\Lambda, \alpha z) = \alpha^{-1}\zeta(\Lambda, z)$.

L'homogénéité des fonctions σ et ζ nous permet de nous restreindre au cas des réseaux de la forme $\Lambda = \mathbf{Z} \oplus \tau\mathbf{Z}$, avec $\tau \in \mathbf{C}$ de partie imaginaire strictement positive et de partie réelle comprise entre $-1/2$ et $1/2$. Dans la suite, on ne considèrera que des réseaux de ce type, et on omettra de préciser Λ dans les notations (on écrira $\sigma(z)$ à la place de $\sigma(\Lambda, z)$, etc.).

Proposition 2.4 (Quasi-périodicité). *Pour tout nombre complexe z tel que les formules soient bien définies et pour tous entiers relatifs m et n , on a :*

- 1) $\sigma(z + m + n\tau) = (-1)^{m+n+mn} e^{(m\eta_1 + n\eta_2)(m+n\tau+2z)} \sigma(z)$
- 2) $\zeta(z + m + n\tau) = \zeta(z) + 2m\eta_1 + 2n\eta_2$,

où les nombres $\eta_1 = \zeta(1/2)$ et $\eta_2 = \zeta(\tau/2)$ vérifient de plus l'égalité (dite de Legendre) $\eta_1\tau - \eta_2 = i\pi$.

En notant $|\sigma|_R$ le maximum du module de la fonction σ sur le disque fermé de centre 0 et de rayon R , on en déduit l'estimation de croissance suivante :

Corollaire 2.5 (Croissance radiale). *Pour tout $R \geq 1$, on a $|\sigma|_R \leq e^{c_1 R^2}$, avec $c_1 = \frac{1}{(\text{Im}\tau)^2} (3|\tau|\eta_1 + \pi)(|\tau|^2 + 4|\tau|) + \log |\sigma|_{|1+\tau|}$.*

Dans toute la suite, on supposera que $c_1 \geq 1$ (quitte à remplacer c_1 par $c_1^* = \max(1, c_1)$ dans la proposition ci-dessus).

2.2. Comportement global de la fonction sigma et discriminant. Sur un parallélogramme élémentaire donné du réseau Λ , la fonction σ s'annule aux quatre sommets et prend des valeurs non nulles sur l'intérieur. Grâce à l'équation de quasi-périodicité (prop. 2.4), on peut estimer le module de ces valeurs en fonction de l'emplacement du parallélogramme dans le plan complexe.

Notons $D = \{z = x + \tau y : -1/2 \leq x, y \leq 1/2\}$ le domaine fondamental qu'on va utiliser comme référence. Pour tout $z \in \mathbf{C}$, il existe $z_0 \in D$ et $m, n \in \mathbf{Z}$ tels que $z = z_0 + m + n\tau$. Dans ce cas,

$$\left| \frac{\sigma(z)}{\sigma(z_0)} \right| = \left| e^{(m\eta_1 + n\eta_2)(m + n\tau + 2z_0)} \right|,$$

et ce qui importe est donc d'étudier la partie réelle de l'exposant $(m\eta_1 + n\eta_2)(m + n\tau + 2z_0)$ lorsque m et n décrivent l'ensemble des entiers relatifs et z_0 parcourt le compact D . Posons

$$\begin{aligned} E(m, n, z) &= \operatorname{Re}((m\eta_1 + n\eta_2)(m + n\tau + 2z)) \\ &= \operatorname{Re}(\eta_1)m^2 + \operatorname{Re}(\eta_1\tau + \eta_2)mn + \operatorname{Re}(\eta_2\tau)n^2 + 2\operatorname{Re}(\eta_1z)m + 2\operatorname{Re}(\eta_2z)n. \end{aligned}$$

À z fixé, c'est un polynôme de degré exactement 2 en m et n ; en effet, on peut montrer facilement que l'annulation simultanée des trois premiers coefficients n'est pas possible, car elle impliquerait que $\eta_1 = \eta_2 = 0$ et que la fonction zêta est doublement périodique, ce qui ne peut pas être le cas car elle n'a qu'un pôle simple par période du réseau (voir [10, §20.41]). Le type de comportement de la fonction E lorsque m et n varient est gouverné par le signe du discriminant, défini par

$$\Delta = (\operatorname{Re}(\eta_1\tau + \eta_2))^2 - 4\operatorname{Re}(\eta_1)\operatorname{Re}(\eta_2\tau).$$

Dans la suite, il va être important pour nous de mettre en évidence des domaines sur lesquels on peut minorer $E(m, n, z)$. On va traiter ce problème successivement dans les cas $\Delta < 0$, $\Delta > 0$ et $\Delta = 0$ que l'on nommera respectivement *elliptique*, *hyperbolique* et *parabolique*. Nous commençons par énoncer un critère plus pratique permettant de distinguer ces cas.

Lemme 2.6. *Soit $\Delta' = |\eta_1|^2 \operatorname{Im}(\tau) - \pi \operatorname{Re}(\eta_1)$. Alors,*

- si $\Delta' < 0$, on est dans le cas elliptique;
- si $\Delta' > 0$, on est dans le cas hyperbolique;
- si $\Delta' = 0$, on est dans le cas parabolique.

Démonstration. On obtient l'expression de Δ' par simplification de celle de Δ . On utilise l'égalité de Legendre $\eta_1\tau - \eta_2 = i\pi$ (voir [10, §20.411]).

$$\begin{aligned}
\Delta &= (\operatorname{Re}(\eta_1\tau + \eta_2))^2 - 4\operatorname{Re}(\eta_1)\operatorname{Re}(\eta_2\tau) \\
&= (\operatorname{Re}(2\eta_1\tau - i\pi))^2 - 4\operatorname{Re}(\eta_1)\operatorname{Re}(\eta_1\tau^2 - i\pi\tau) \\
&= (2\operatorname{Re}(\eta_1\tau))^2 - 2\operatorname{Re}(\eta_1)\left(2\operatorname{Re}(\eta_1\tau^2) + 2\pi\operatorname{Im}(\tau)\right) \\
&= (\eta_1\tau + \bar{\eta}_1\bar{\tau})^2 - (\eta_1 + \bar{\eta}_1)\left(\eta_1\tau^2 + \bar{\eta}_1\bar{\tau}^2 + 2\pi\operatorname{Im}(\tau)\right) \\
&= 2|\eta_1|^2(|\tau|^2 - \operatorname{Re}(\tau^2)) - 4\pi\operatorname{Re}(\eta_1)\operatorname{Im}(\tau) \\
&= 2|\eta_1|^2\left((\operatorname{Re}(\tau)^2 + \operatorname{Im}(\tau)^2) - (\operatorname{Re}(\tau)^2 - \operatorname{Im}(\tau)^2)\right) - 4\pi\operatorname{Re}(\eta_1)\operatorname{Im}(\tau) \\
&= 4\operatorname{Im}(\tau)\left(|\eta_1|^2\operatorname{Im}(\tau) - \pi\operatorname{Re}(\eta_1)\right),
\end{aligned}$$

et comme la partie imaginaire de τ est strictement positive, le signe de Δ est donné par $\Delta' = |\eta_1|^2\operatorname{Im}(\tau) - \pi\operatorname{Re}(\eta_1)$. \square

C'est donc sur le calcul du nombre $\eta_1 = \zeta(1/2)$ que repose la détermination du comportement de la fonction σ . Par souci de simplicité, nous n'aborderons pas ici ce calcul de façon approfondie, mais nous contenterons d'estimations numériques obtenues à partir de fonctions thêta.

En effet, d'après [10, §21.43], on peut écrire

$$\eta_1 = -\frac{\pi^2}{6} \frac{\vartheta_1'''(0, q)}{\vartheta_1'(0, q)},$$

où

$$q = e^{i\pi\tau} \quad \text{et} \quad \vartheta_1(z, q) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+1/2)^2} \sin((2n+1)z).$$

On en déduit donc :

$$\eta_1 = \frac{\pi^2}{6} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1)^3 e^{i\pi\tau(n+1/2)^2}}{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) e^{i\pi\tau(n+1/2)^2}}.$$

Cette formule converge extrêmement rapidement (pour τ de partie imaginaire proche de 1, on obtient déjà plus de dix chiffres significatifs avec les sommes partielles d'ordre 2 ou 3) et permet de calculer le signe de Δ' pour n'importe quel réseau donné.

| τ | Δ' | type de comportement |
|-----------------------|-----------|----------------------|
| i | -2,467... | elliptique |
| $i \cdot 1,910 \dots$ | 0 | parabolique |
| $2i$ | 0,243... | hyperbolique |
| $5i$ | 8,361... | hyperbolique |
| $e^{i\pi/3}$ | -2,849... | elliptique |

TABLEAU 1. Valeurs approchées de Δ' pour certains réseaux

La tendance générale semble être que les réseaux proches du réseau carré (angle proche de $\pi/2$ et rapport entre les longueurs des côtés pas trop importants) donnent lieu à des fonctions σ de type elliptique, tandis que ceux dont la géométrie est moins régulière donnent lieu à des fonctions σ de type hyperbolique, le type parabolique se trouvant assez naturellement à la frontière entre les deux.

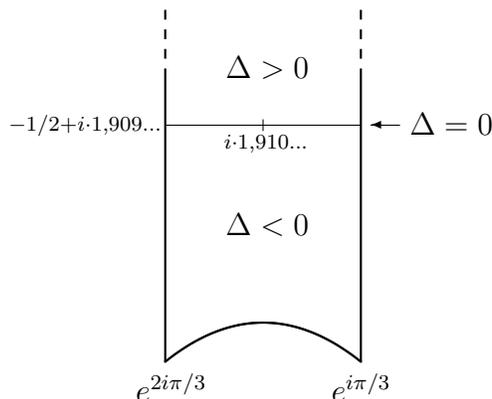


FIGURE 1. Répartition du signe de Δ selon la valeur de τ

3. LEMME DE ZÉROS

L'objectif de cette partie est de préciser et de démontrer le théorème 1.2, c'est-à-dire borner le nombre de zéros de la fonction $F(z) = P(z, \sigma(z))$ sur le disque $B(R) \subset \mathbf{C}$ en fonction de R et du degré du polynôme P , de manière analogue à la proposition 1 de [8]. Comme Masser, on obtient ce résultat en comparant deux expressions de $|P|$: l'une obtenue en étudiant la croissance d'une fonction auxiliaire faisant intervenir F et ses zéros, l'autre en recalculant P à partir de la formule d'interpolation de Lagrange sur un jeu de « w -points » bien choisis.

3.1. Distribution des w -points. On appelle w -points les solutions de l'équation $\sigma(z) = w$ lorsque w est un petit nombre complexe. La première étape de la démonstration consiste à estimer la distribution de ces points dans le plan complexe, et on va voir que cette distribution est fortement liée au signe du discriminant Δ .

Dans toute la suite, on notera $\epsilon = \min(1/4, |\tau|/4)$, D' le parallélogramme D privé du disque ouvert de centre 0 et de rayon ϵ et u le minimum de $|\sigma(z)|$ lorsque z parcourt D' .

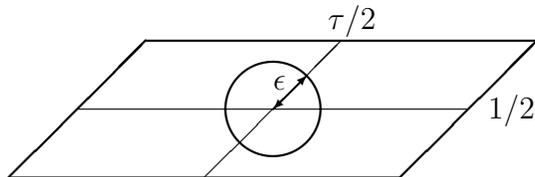


FIGURE 2. D et D'

3.1.1. *Cas elliptique.* Si $\Delta = (\operatorname{Re}(\eta_1\tau + \eta_2))^2 - 4\operatorname{Re}(\eta_1)\operatorname{Re}(\eta_2\tau) < 0$, alors nécessairement $\operatorname{Re}(\eta_1) \neq 0$ et on peut alors écrire

$$(1) \quad E(m, n, z) = a \left(m + \frac{b}{2a}n + \frac{d(z)}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \left(n + \frac{bd(z) - 2ae(z)}{\Delta} \right)^2 - \frac{d(z)^2 + e(z)^2}{4a} - \frac{bd(z)e(z)}{4a^2} + \frac{b^2d(z)^2}{16a^3},$$

où $a = \operatorname{Re}(\eta_1)$, $b = \operatorname{Re}(\eta_1\tau + \eta_2) = 2\operatorname{Re}(\eta_2)$, $c = \operatorname{Re}(\eta_2\tau)$, $d(z) = 2\operatorname{Re}(\eta_1z)$ et $e(z) = 2\operatorname{Re}(\eta_2z)$.

Remarquons que $a > 0$, sinon $E(m, n, z)$ serait majorée uniformément pour $m, n \in \mathbf{Z}$ et $z \in D$ et la fonction σ serait alors bornée, ce qui contredirait le théorème de Liouville. On en déduit que la fonction E est minorée sur $\mathbf{Z}^2 \times D$ par un réel μ_e .

Soit maintenant $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z - \lambda| \geq \epsilon$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. Il existe un couple $(m, n) \in \mathbf{Z}^2$ tel qu'on puisse écrire $z = z_0 + m + n\tau$, avec $z_0 \in D'$. Alors

$$|\sigma(z)| = |\sigma(z_0)|e^{E(m, n, z_0)} \geq ue^{\mu_e}.$$

Posons, pour tout $X \geq 0$, $\mathcal{Z}_e(X) = \{z = m + n\tau : -X \leq m, m \leq X\}$, et notons $r_0 = \frac{1}{2}ue^{\mu_e}$. On va montrer le résultat suivant :

Lemme 3.1. *Pour tout $w \in \mathbf{C}$ tel que $|w| \leq r_0$ et pour tout $X \geq 1$, le nombre $\mathcal{N}(X, w)$ de solutions (comptées avec multiplicité) à l'équation $\sigma(z) = w$ dans le domaine $\mathcal{Z}_e(X)$ vérifie :*

$$|\mathcal{N}(X, w) - 4X^2| \leq 12X.$$

De plus, deux solutions distinctes sont toujours distantes d'au moins 2ϵ .

Démonstration. Cas où $w = 0$: comme σ admet un zéro simple en chaque point du réseau, on a $\mathcal{N}(X, w) = (2[X] + 1)^2 = 4X^2 + 1 + R(X)$ avec $|R(X)| \leq 4X$. En particulier, si γ désigne le contour de la région $\mathcal{Z}_e(X)$ orienté positivement, d'après le théorème des résidus, on a :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} dz = \mathcal{N}(X, 0) = 4X^2 + 1 + R(X),$$

à condition que cette intégrale soit bien définie, c'est-à-dire que X ne soit pas entier.

Soit maintenant $w \neq 0$. Commençons par prendre $X \geq 0$ et vérifiant $|X - n| \geq \frac{1}{4}$ pour tout entier n . Alors, d'après le théorème des résidus,

$$\mathcal{N}(X, w) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z) - w} dz,$$

cette intégrale étant bien définie car, grâce à la contrainte sur X , le contour γ ne passe jamais à moins de ϵ d'un point du réseau, donc on a toujours $|\sigma(z)| > r_0 \geq |w|$. On peut

alors écrire :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(X, w) - \mathcal{N}(X, 0) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z) - w} - \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} dz \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{d}{dz} \left(\log \left(1 + \frac{w}{\sigma(z)} \right) \right) dz \\ &= 0, \end{aligned}$$

ce qui démontre que $\mathcal{N}(X, w) = 4X^2 + 1 + R(X)$ avec $|R(X)| \leq 4X$.

Reste à traiter le cas où il existe un entier n tel que $|X - n| < \frac{1}{4}$. Dans ce cas, on peut encadrer X par des réels X_- et X_+ tels que $|X_{\pm} - n| \geq \frac{1}{4}$ pour tout n et $|X_{\pm} - X| \leq \frac{1}{2}$. On aura alors $\mathcal{N}(X_-, w) \leq \mathcal{N}(X, w) \leq \mathcal{N}(X_+, w)$, et comme d'après le paragraphe précédent de la démonstration, on a $\mathcal{N}(X_{\pm}, w) = 4X_{\pm}^2 + 1 + R(X_{\pm})$, on en déduit :

$$\begin{aligned} 4X_-^2 + 1 - 4X_- &\leq \mathcal{N}(X, w) \leq 4X_+^2 + 1 + 4X_+ \\ 4 \left(X - \frac{1}{2} \right)^2 - 4X + 1 &\leq \mathcal{N}(X, w) \leq 4 \left(X + \frac{1}{2} \right)^2 + 1 + 4 \left(X + \frac{1}{2} \right) \\ 4X^2 - 8X + 2 &\leq \mathcal{N}(X, w) \leq 4X^2 + 8X + 4. \end{aligned}$$

Au final, on a donc $|\mathcal{N}(X, w) - 4X^2| \leq 8X + 4 \leq 12X$.

Pour ce qui est de la seconde partie de l'énoncé, on peut montrer que chaque disque centré en un point du réseau et de rayon $\epsilon/4$ contient exactement une solution (par exemple en réécrivant la comparaison d'intégrales ci-dessus en ayant pris pour γ le bord du disque considéré). \square

3.1.2. Cas hyperbolique. Si $\Delta > 0$, l'expression (1) reste valable dans le cas où $\text{Re}(\eta_1) \neq 0$, cas auquel on va se restreindre dans la suite¹. Fixons alors $z \in D$ et intéressons-nous aux coniques de la forme $\{(m, n) \in \mathbf{R}^2 : E(m, n, z) = \alpha\}$ pour $\alpha \in \mathbf{R}$. Ce sont des hyperboles (éventuellement des hyperboles dégénérées, *i.e.* deux droites sécantes) dont les asymptotes sont données par

$$\begin{cases} 2a\sqrt{\Delta}m + (b - \sqrt{\Delta})\sqrt{\Delta}n - d(z)(b - \sqrt{\Delta}) + 2ae(z) = 0 & (L_z^1) \\ 2a\sqrt{\Delta}m + (b + \sqrt{\Delta})\sqrt{\Delta}n + d(z)(b + \sqrt{\Delta}) - 2ae(z) = 0 & (L_z^2). \end{cases}$$

Ces deux droites sécantes partitionnent \mathbf{R}^2 en quatre quarts de plan de la façon suivante :

- une région $\mathcal{Q}^+(z)$, réunion de deux quarts de plans opposés par le sommet, à l'intérieur de laquelle $E(m, n, z)$ est minoré et tend vers $+\infty$ lorsque $\|m, n\|$ grandit ;
- la région complémentaire $\mathcal{Q}^-(z)$, réunion des deux autres quarts de plan, à l'intérieur de laquelle $E(m, n, z)$ est majoré et tend vers $-\infty$ lorsque $\|m, n\|$ grandit.

Ce découpage n'est modifié que d'une translation lorsque z varie. En effet, les asymptotes (L_z^i) sont simplement translatées (car leurs coefficients directeurs sont indépendants de z), et les limites de $E(m, n, z)$ dans les différentes directions sont inchangées (car les coefficients

¹. Dans le cas contraire, tout le raisonnement reste valable en intervertissant a et c , m et n et $d(z)$ et $e(z)$.

devant les termes de degré 2 en m et n dans l'expression de $E(m, n, z)$ sont indépendants de z).

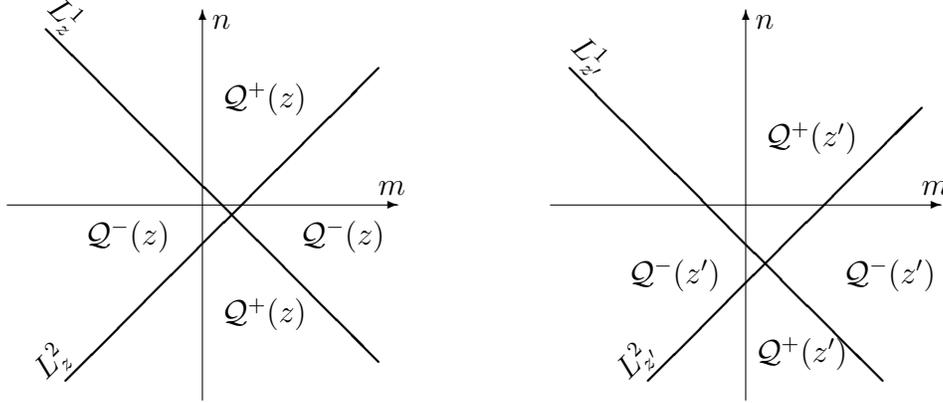


FIGURE 3. Exemple de régions $\mathcal{Q}^+(z)$ et $\mathcal{Q}^-(z)$ lorsque z varie

On pose alors $\mathcal{Q}^+ = \bigcap_{z \in D} \mathcal{Q}^+(z)$; c'est une réunion de deux secteurs angulaires qui sont symétriques l'un de l'autre par rapport à l'origine du plan \mathbf{R}^2 (car $E(-m, -n, -z) = E(m, n, z)$ et le domaine $D \subset \mathbf{C}$ est symétrique par rapport à 0). La fonction $E(m, n, z)$ est alors minorée sur $\mathcal{Q}^+ \times D$ par $\mu_h = \min_{z \in D} \left(\min_{(m,n) \in \mathcal{Q}^+(z)} E(m, n, z) \right)$, ce minimum étant bien défini car $\min_{(m,n) \in \mathcal{Q}^+(z)} E(m, n, z)$ peut s'exprimer continûment en fonction de z et le domaine D est compact.

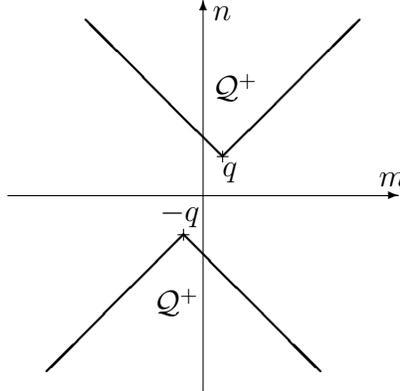


FIGURE 4. Exemple de région \mathcal{Q}^+

Regardons l'une des deux composantes connexes de \mathcal{Q}^+ (l'autre s'en déduit par symétrie centrale). Les deux demi-droites qui forment la frontière de la composante sont supportées respectivement par $L_{z_1}^1$ et $L_{z_2}^2$ pour un certain couple (z_1, z_2) d'éléments de D . Le sommet $q = (m, n)$ de la composante est alors donné par l'intersection des droites $L_{z_1}^1$

et $L_{z_2}^2$, donc la solution du système

$$\begin{cases} 2a\sqrt{\Delta}m + (b - \sqrt{\Delta})\sqrt{\Delta}n - d(z_1)(b - \sqrt{\Delta}) + 2ae(z_1) = 0 & (L_{z_1}^1) \\ 2a\sqrt{\Delta}m + (b + \sqrt{\Delta})\sqrt{\Delta}n + d(z_2)(b + \sqrt{\Delta}) - 2ae(z_2) = 0 & (L_{z_2}^2), \end{cases}$$

donnée (en utilisant la \mathbf{R} -linéarité de d et e) par

$$\begin{cases} m = \frac{1}{2\Delta} \left(2cd(z_1 + z_2) + (\sqrt{\delta} - b)e(z_1 + z_2) + 2\sqrt{\delta}e(z_1) \right) \\ n = \frac{1}{2\Delta} \left(-bd(z_1 + z_2) + \sqrt{\Delta}d(z_1 - z_2) + 2ae(z_1 + z_2) \right). \end{cases}$$

Les nombres z_1 et z_2 sont dans D donc de module inférieur à $\frac{1+|\tau|}{2}$, et on en déduit alors des bornes effectives pour $|m|$ et $|n|$, puis $\|q\|$.

On peut également exprimer explicitement l'ouverture angulaire θ des deux composantes de \mathcal{Q}^+ . Il s'agit simplement de l'angle géométrique entre les familles de droites L^1 et L^2 et il peut être donné par

$$\theta = \left| \arctan \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) - \arctan \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \right|.$$

Soit maintenant $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z - \lambda| \geq \epsilon$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. Il existe un couple $(m, n) \in \mathbf{Z}^2$ tel qu'on puisse écrire $z = z_0 + m + n\tau$, avec $z_0 \in D'$. Alors, si $(m, n) \in \mathcal{Q}^+$,

$$|\sigma(z)| = |\sigma(z_0)|e^{E(m,n,z)} \geq ue^{\mu_h}.$$

Posons, pour tout $X \geq 0$, $\mathcal{Z}_h(X) = \{z = m + n\tau \in \mathbf{C} : (m, n) \in \mathcal{Q}^+ \cap B(X)\}$, et notons $r_0 = \frac{1}{2}u \exp(\mu_h)$. On va montrer le résultat suivant :

Lemme 3.2. *Pour tout $w \in \mathbf{C}$ tel que $|w| \leq r_0$ et pour tout $X \geq 1$, le nombre $\mathcal{N}(X, w)$ de solutions (comptées avec multiplicité) à l'équation $\sigma(z) = w$ dans le domaine $\mathcal{Z}_h(X)$ vérifie :*

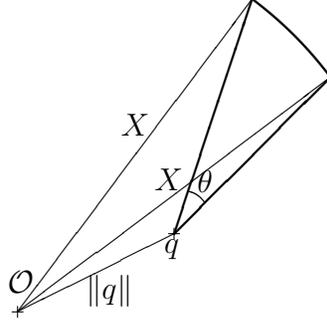
$$\mathcal{N}(X, w) \geq \theta X^2 - c_h X,$$

où $c_h = \|q\|^2 + (2\sqrt{2}(8 + \pi) + 4)\|q\| + 4\sqrt{2}(4 + \pi + 2\theta) + 2 + \theta > 0$.

De plus, cette borne est toujours respectée en imposant la condition supplémentaire que deux solutions distinctes soient toujours distantes d'au moins 2ϵ .

Démonstration. Commençons par le cas où $w = 0$: il s'agit de compter les zéros de σ , c'est-à-dire les points du réseau Λ , à l'intérieur de la région $\mathcal{Z}_h(X)$. Cela revient exactement à compter les points de \mathbf{R}^2 à coordonnées entières dans le domaine $\mathcal{Q}^+ \cap B(X)$, et c'est cette approche que l'on va privilégier. Le nombre de points à coordonnées entières dans $\mathcal{Q}^+ \cap B(X)$ est approximativement égal à $\mathcal{A}(X)$, l'aire de $\mathcal{Q}^+ \cap B(X)$; on va donc commencer par estimer cette aire.

Pour X assez grand, la région $\mathcal{Q}^+ \cap B(X)$ est la réunion de deux « triangles » identiques, dont l'un des « côtés » est en fait un arc de cercle de rayon X . Intéressons-nous à l'un de ces triangles. Tous les points de l'arc de cercle sont à une distance X de l'origine donc, d'après l'inégalité triangulaire, à une distance de q comprise entre $X - \|q\|$ et $X + \|q\|$. On en déduit, en encadrant le « triangle » par deux secteurs circulaires de rayon respectif $X - \|q\|$

FIGURE 5. Un des « triangles » formant $\mathcal{Q}^+ \cap B(X)$

et $X + \|q\|$, que son aire $\mathcal{A}(X)/2$ vérifie $\theta/2 \cdot (X - \|q\|)^2 \leq \mathcal{A}(X)/2 \leq \theta/2 \cdot (X + \|q\|)^2$, d'où

$$(2) \quad |\mathcal{A}(X) - \theta X^2| \leq 2X\|q\| + \|q\|^2.$$

Estimons maintenant la différence entre $\mathcal{A}(X)$ et $\mathcal{N}(X, 0)$ suivant la méthode développée par Gauß pour résoudre son « problème du cercle » (citée dans [6, p. 67]) : on a $|\mathcal{A}(X) - \mathcal{N}(X, 0)| \leq \mathcal{I}(X)$, où $\mathcal{I}(X)$ est le nombre de cellules du réseau \mathbf{Z}^2 qui intersectent le bord de $\mathcal{Q}^+ \cap B(X)$. Si on considère la bande de largeur $2\sqrt{2}$ obtenue en épaississant le bord de $\mathcal{Q}^+ \cap B(X)$, on voit que toutes les cellules de \mathbf{Z}^2 qui intersectent le bord de $\mathcal{Q}^+ \cap B(X)$ sont entièrement contenues à l'intérieur de cette bande. Les cellules de \mathbf{Z}^2 étant d'aire unité, on en déduit que $\mathcal{I}(X)$ est inférieur à l'aire de la bande, qui est inférieure à $2\sqrt{2}$ fois le périmètre de $\mathcal{Q}^+ \cap B(X)$. Enfin, on peut voir facilement que ce périmètre est inférieur à $4(X + \|q\|) + \pi(X + \|q\|)$. On en déduit donc :

$$\mathcal{I}(X) \leq 2\sqrt{2}(4 + \pi)(X + \|q\|).$$

En combinant cette équation avec (2), on obtient

$$\mathcal{N}(X, 0) = \theta X^2 + R(X), \quad \text{où} \quad |R(X)| \leq (2\sqrt{2}(4 + \pi) + 2\|q\|)X + \|q\|^2 + 2\sqrt{2}(4 + \pi)\|q\|.$$

Passons au cas où $w \neq 0$. Comme pour le cas elliptique, on va procéder par comparaison entre notre estimation pour $\mathcal{N}(X, 0)$ et la formule pour $\mathcal{N}(X, w)$ donnée par le théorème des résidus. Cependant, en raison de la forme plus compliquée de la région $\mathcal{Z}(X, w)$, il faut être plus prudent dans le choix du contour d'intégration γ .

Définissons γ comme étant le bord d'une des deux composantes connexes de $\mathcal{Z}_h(X)$, orienté positivement, et avec la modification suivante : pour chaque point λ de Λ distant de moins de ϵ du bord de $\mathcal{Z}_h(X)$, γ contourne λ par l'intérieur en faisant un arc de cercle de rayon ϵ centré en λ . On a alors, pour tout z sur le contour γ , $|\sigma(z)| > r_0$.

Pour tout $w \in \mathbf{C}$ tel que $|w| \leq r_0$, on pose $\mathcal{N}'(X, w)$ le nombre de solutions (comptées avec multiplicité) à l'équation $\sigma(z) = w$ à l'intérieur du contour γ . D'après le théorème des

résidus, on a

$$\mathcal{N}'(X, w) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z) - w} dz,$$

l'intégrale étant bien définie car $|\sigma(z)| > r_0 \geq |w|$ pour tout $z \in \gamma$. Alors,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}'(X, w) - \mathcal{N}'(X, 0) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z) - w} - \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} dz \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{d}{dz} \left(\log \left(1 + \frac{w}{\sigma(z)} \right) \right) dz \\ &= 0. \end{aligned}$$

Maintenant, il s'agit de relier les quantités $\mathcal{N}'(X, \cdot)$ à $\mathcal{N}(X, \cdot)$. Comme la région délimitée par γ représente un peu moins d'une des deux moitiés identiques de $\mathcal{Z}_h(X)$, on a $\mathcal{N}(X, \cdot) = 2\mathcal{N}'(X, \cdot) + E(X, \cdot)$, où $E(X, \cdot)$ est un terme d'erreur positif restant à estimer.

Commençons par le cas de $E(X, 0)$. Il s'agit de compter le nombre de points du réseau à l'intérieur de $\mathcal{Z}_h(X)$ et proches à moins de ϵ de son bord. On peut faire correspondre ces points à un sous-ensemble des points entiers de $\mathcal{Q}^+ \cap B(X)$ situés à une distance inférieure à $1/4$ du bord. Comme précédemment, cette dernière quantité est facilement majorée par l'aire d'un ruban de largeur $1/2 + 2\sqrt{2}$ obtenu par épaissement du bord de $\mathcal{Q}^+ \cap B(X)$. Au final, on a

$$0 \leq E(X, 0) \leq (1 + 4\sqrt{2}) ((2 + \theta)X + 2\|q\|).$$

Dans le cas de $E(X, w)$, il semble moins facile d'obtenir un encadrement, mais on peut au moins affirmer que $E(X, w) \geq 0$. En regroupant tous les ingrédients, on a donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(X, w) &= \mathcal{N}(X, 0) - E(X, 0) + E(X, w) \\ &\geq \theta X^2 - R(X) - E(X, 0) \\ &\geq \theta X^2 - (4\sqrt{2}(4 + \pi + 2\theta) + 2 + \theta + 2\|q\|) X - \|q\|^2 - (2\sqrt{2}(8 + \pi) + 2)\|q\| \\ &\geq \theta X^2 - c_h X, \end{aligned}$$

où $c_h = \|q\|^2 + (2\sqrt{2}(8 + \pi) + 4)\|q\| + 4\sqrt{2}(4 + \pi + 2\theta) + 2 + \theta$.

La deuxième partie du lemme provient du fait qu'on n'a en fait compté que les solutions à l'intérieur de la région délimitée par γ . Ces solutions sont localisées dans des disques de rayon ϵ centrés en les points du réseau, chaque disque contenant au plus une solution. Par définition de ϵ , deux points du réseau sont distants d'au moins 4ϵ , d'où le résultat. \square

3.1.3. Cas parabolique. Si $\Delta = 0$, comme dans le cas hyperbolique, on va supposer que $\text{Re}(\eta_1) \neq 0$ pour mener les calculs². On peut alors écrire, en conservant les notations de la formule (1),

$$(3) \quad E(m, n, z) = a \left(m + \frac{b}{2a}n + \frac{d(z)}{2a} \right)^2 + \left(e(z) - \frac{bd(z)}{2a} \right) n - \frac{d(z)^2}{4a}.$$

². cf note 1 p. 8

Comme dans les cas précédents, on cherche à obtenir une minoration de $E(m, n, z)$ qui soit uniforme pour tout $z \in D$ et pour (m, n) occupant une région du plan la plus étendue possible. Le terme $-d(z)^2/4a$ étant borné, on s'intéresse, suivant les valeurs de z , aux lieux géométriques du plan $\{(m, n) \in \mathbf{R}^2\}$ définis par les inéquations

$$(4) \quad a \left(m + \frac{b}{2a}n + \frac{d(z)}{2a} \right)^2 + \left(e(z) - \frac{bd(z)}{2a} \right) n \geq \alpha$$

pour $\alpha \in \mathbf{R}$.

Il est clair qu'il s'agit de régions situées, suivant le signe de a , à l'intérieur (cas $a < 0$) ou à l'extérieur (cas $a > 0$) de paraboles. Ces paraboles se déplacent et se déforment lorsque z varie : elles subissent une translation (due au terme $d(z)/2a$ à l'intérieur du carré), une dilatation transversalement à leur axe (due à la variation du coefficient devant n) et éventuellement un retournement (lorsque ce coefficient change de signe). Cependant, du fait des bornes sur $d(z)$ et $e(z)$, ces transformations restent limitées ; les paraboles atteignent ainsi une largeur maximale lorsque $e(z) - bd(z)/2a$ est extrémal, et un déplacement maximal lorsque $d(z)/2a$ l'est. On a ainsi quatre « paraboles extrémales » données par les équations :

$$a \left(m + \frac{b}{2a}n \pm \max_{z \in D} \left| \frac{d(z)}{2a} \right| \right)^2 \pm d'n = \alpha \quad (P_{\pm\pm}^\alpha),$$

où $d' = \max_{z \in D} \left| e(z) - \frac{bd(z)}{2a} \right|$. Dans le cas particulier où $\alpha = \alpha_0 = \max |d(z)|^2/(4a)$, ces paraboles sont concourantes en $m = n = 0$

Ceci permet de résoudre totalement le cas où $a > 0$. En effet, dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} E(m, n, z) &= a \left(m + \frac{b}{2a}n + \frac{d(z)}{2a} \right)^2 + \left(e(z) - \frac{bd(z)}{2a} \right) n - \frac{d(z)^2}{4a} \\ &\geq a \left(m + \frac{b}{2a}n + \frac{d(z)}{2a} \right)^2 + \left(e(z) - \frac{bd(z)}{2a} \right) n - \alpha_0, \end{aligned}$$

donc l'ensemble $\{(m, n) \in \mathbf{R}^2 : \forall z \in D \ E(m, n, z) \geq 0\}$ contient l'intersection des extérieurs des quatre paraboles $P_{\pm\pm}^{\alpha_0}$, qu'on va noter \mathcal{P}^+ .

Soit maintenant $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z - \lambda| \geq \epsilon$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. Il existe un couple $(m, n) \in \mathbf{Z}^2$ tel qu'on puisse écrire $z = z_0 + m + n\tau$, avec $z_0 \in D'$. Alors, si $(m, n) \in \mathcal{P}^+$,

$$|\sigma(z)| = |\sigma(z_0)|e^{E(m, n, z)} \geq u.$$

Posons, pour tout $X \geq 0$, $\mathcal{Z}_p(X) = \{z = m + n\tau \in \mathbf{C} : (m, n) \in \mathcal{P}^+ \cap B(X)\}$, et notons $r_0 = u/2$. On va montrer le résultat suivant :

Lemme 3.3. *Supposons $a > 0$ (ou $c > 0$). Alors, pour tout $w \in \mathbf{C}$ tel que $|w| \leq r_0$ et pour tout $X \geq 1 + \alpha_0/d' + \sqrt{\alpha_0/a} + |b|\alpha_0/(2ad')$, le nombre $\mathcal{N}(X, w)$ de solutions (comptées avec multiplicité) à l'équation $\sigma(z) = w$ dans le domaine $\mathcal{Z}_e(X)$ vérifie :*

$$\mathcal{N}(X, w) \geq \pi X^2 - c_p X^{3/2},$$

avec $c_p = (1 + 8\sqrt{2})(8 + \pi + \alpha_0/d') + 32\sqrt{2}/(3\sqrt{a}) \cdot \sqrt{d' + \alpha_0}$.

De plus, cette borne est toujours respectée en imposant la condition supplémentaire que deux solutions distinctes soient toujours distantes d'au moins 2ϵ .

Démonstration. Comme dans le cas hyperbolique, on commence par traiter le cas $w = 0$, ce qui revient à compter les points à coordonnées entières à l'intérieur de $\mathcal{Z}_\epsilon(X)$. Réutilisons la méthode de Gauß : l'aire de $B(X)$ est de πX^2 , desquels il faut ôter les aires découpées par les paraboles. Un peu de géométrie élémentaire³ montre que l'aire découpée par chaque parabole est bornée par

$$\frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{a}}\sqrt{d' + \alpha_0} \cdot X^{3/2},$$

donc l'aire $\mathcal{A}(X)$ de $\mathcal{Z}_\epsilon(X)$ vérifie $\pi X^2 - cX^{3/2} \leq \mathcal{A}(X) \leq \pi X^2$, avec

$$c = \frac{32\sqrt{2}}{3\sqrt{a}}\sqrt{d' + \alpha_0}.$$

Maintenant, le périmètre de $\mathcal{Z}_\epsilon(X)$ est grossièrement inférieur à la circonférence du cercle délimitant $B(X)$, soit $2\pi X$, à laquelle on ajoute la longueur d'arc des quatre morceaux de parabole. Après un peu de géométrie, on obtient un périmètre inférieur à

$$(16 + 2\pi)X + \frac{2\alpha_0}{d'},$$

et la formule de Gauß donne alors

$$\pi X^2 - cX^{3/2} - 4\sqrt{2}(8 + \pi)X - \frac{4\sqrt{2}\alpha_0}{d'} \leq \mathcal{N}(X, 0) \leq \pi X^2 + 4\sqrt{2}(8 + \pi)X + \frac{4\sqrt{2}\alpha_0}{d'},$$

donc

$$|\mathcal{N}(X, 0) - \pi X^2| \leq c'X^{3/2}, \quad \text{avec} \quad c' = \frac{32\sqrt{2}}{3\sqrt{a}}\sqrt{d' + \alpha_0} + 4\sqrt{2}\left(8 + \pi + \frac{\alpha_0}{d'}\right).$$

Passons au cas où $w \neq 0$. Comme dans les deux cas précédents, on procède par comparaison entre notre estimation pour $\mathcal{N}(X, 0)$ et la formule pour $\mathcal{N}(X, w)$ donnée par le théorème des résidus.

On définit le contour d'intégration γ comme étant le bord de $\mathcal{Z}_p(X)$, orienté positivement, et avec la modification suivante : pour chaque point λ de Λ distant de moins de ϵ du bord de $\mathcal{Z}_p(X)$, γ contourne λ par l'intérieur en faisant un arc de cercle de rayon ϵ centré en λ . On a alors, pour tout z sur le contour γ , $|\sigma(z)| > r_0$.

Comme dans la démonstration du lemme 3.2, on a, pour tout $w \in \mathbf{C}$ tel que $|w| \leq r_0$, $\mathcal{N}'(X, w) = \mathcal{N}'(X, 0)$, où $\mathcal{N}'(X, w)$ désigne le nombre de solutions (comptées avec multiplicité) à l'équation $\sigma(z) = w$ à l'intérieur du contour γ . Par ailleurs, on peut écrire $\mathcal{N}(X, \cdot) = \mathcal{N}'(X, \cdot) + E(X, \cdot)$, où $E(X, \cdot)$ est un terme d'erreur positif à estimer.

Le nombre $E(X, 0)$ est le nombre de points du réseau à l'intérieur de $\mathcal{Z}_h(X)$ et proches à moins de ϵ de son bord, qu'on peut majorer par l'aire d'un ruban de largeur $1/2 + 2\sqrt{2}$

3. la condition $X \geq 1 + \alpha_0/d' + \sqrt{\alpha_0/a} + |b|\alpha_0/(2ad')$ assure que le disque $B(X)$ contient bien les sommets des paraboles

obtenu par épaississement du bord de $\mathcal{Z}_p(X)$, donc

$$0 \leq E(X, 0) \leq (1 + 4\sqrt{2})(8 + \pi)X + (1 + 4\sqrt{2})\frac{\alpha_0}{d'}.$$

Par ailleurs, $E(X, w) \geq 0$, d'où

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(X, w) &= \mathcal{N}(X, 0) - E(X, 0) + E(X, w) \\ &\geq \pi X^2 - c'X^{3/2} - E(X, 0) \\ &\geq \theta X^2 - c_p X^{3/2}, \end{aligned}$$

avec $c_p = (1 + 8\sqrt{2})(8 + \pi + \alpha_0/d') + 32\sqrt{2}/(3\sqrt{a}) \cdot \sqrt{d' + \alpha_0}$.

Comme précédemment, la deuxième partie du lemme est une conséquence immédiate de la méthode de démonstration. \square

Cette démonstration ne fonctionne pas dans le cas où a ou c est strictement négatif. Dans ce cas, en effet, les solutions des inéquations $E(m, n, z) \geq 0$ sont situées à l'intérieur des paraboles ; l'intersection pour tous les z de ces lieux géométriques est alors une partie bornée du plan, ce qui ne permet pas de poursuivre le raisonnement. Une analyse plus fine est probablement nécessaire pour déterminer le comportement de la fonction sigma dans ce cas, si tant est qu'il peut effectivement être rencontré (ce qui ne semble pas évident à déterminer).

Dans toute la suite, on ne traitera donc pas ce cas $\Delta = 0$ et a ou $c < 0$, qu'on qualifiera de *parabolique défavorable*.

3.2. Démonstration du lemme de zéros. On va maintenant exploiter les informations dont on dispose sur la distribution des w -points pour déterminer un jeu de « points d'interpolation » sur le graphe de la fonction sigma (vu comme une partie de \mathbf{C}^2). Ces points vérifient de bonnes propriétés de disposition et d'espacement, ce qui va nous permettre de contrôler la taille des coefficients apparaissant dans la formule d'interpolation de Lagrange.

Lemme 3.4. *Si l'on n'est pas dans le cas parabolique défavorable, alors pour tout entier $L \geq 1$, il existe des nombres complexes w_l ($l = 0, \dots, L$) et $z_{k,l}$ ($k, l = 0, \dots, L$) vérifiant, pour tous k, l , $\sigma(z_{k,l}) = w_l$, avec :*

- 1) $|w_l| \leq r_0$ pour tout l ;
- 2) $|w_l - w_i| \geq c_2 L^{-1/2}$ pour tous $l \neq i$;
- 3) $|z_{k,l} - 1| \geq 1$ pour tous k, l ;
- 4) $|z_{k,l}| \leq c_3 L^{1/2}$ pour tous k, l ;
- 5) $|z_{k,l} - z_{j,l}| \geq 2\epsilon$ pour tous l et $j \neq k$,

où les valeurs des constantes r_0 , c_2 et c_3 sont données suivant les cas par le tableau 2.

Démonstration. Pour tout $|w| \leq r_0$, le lemme 3.1 (respectivement 3.2, 3.3) nous donne une estimation du nombre de solutions de l'équation $\sigma(z) = w$ dans la région $\mathcal{Z}_e(X)$ (resp. $\mathcal{Z}_h(X)$, $\mathcal{Z}_p(X)$) (on va choisir un X convenable par la suite). Quitte à écarter un nombre dénombrable de w , on peut en fait supposer que ces solutions sont toutes de multiplicité

| | r_0 | c_2 | c_3 |
|------|-------------------|-------------------|---|
| ell. | $u \exp(\mu_e)/2$ | $u \exp(\mu_e)/4$ | $(1 + \tau) \left(\left(8 + \frac{3}{\text{Im} \tau} \right)^2 + 2 \right)$ |
| hyp. | $u \exp(\mu_h)/2$ | $u \exp(\mu_h)/4$ | $(1 + \tau) \left(\frac{2}{\sqrt{\theta}} + 4 \frac{(c_h+3+6/\text{Im} \tau)^2}{\theta^2} + 1 \right)$ |
| par. | $u/2$ | $u/4$ | $(1 + \tau) \left(3 + \frac{(c_p+3+6/\text{Im} \tau)^2}{2} \right)$ |

TABLEAU 2. Valeurs des constantes r_0 , c_2 et c_3

1. En effet, s'il existe un z qui soit une solution double de $\sigma(z) = w$, alors $\sigma'(z) = 0$, ce qui peut arriver pour au plus un nombre dénombrable de z . il suffit donc d'écartier les $w = \sigma(z)$ correspondants.

Soit donc $|w| \leq r_0$ hors de cet ensemble dénombrable. Pour X vérifiant les hypothèses du lemme 3.1 (resp. 3.2, 3.3), on a alors $\mathcal{N}(X, w)$ solutions distinctes et deux à deux distantes de 2ϵ à l'équation $\sigma(z) = w$ dans la région $\mathcal{Z}_e(X)$ (resp. $\mathcal{Z}_h(X)$). D'après les lemmes 3.1, 3.2 et 3.3, on a $\mathcal{N}(X, w) \geq \alpha X^2 - \beta X^{3/2}$ où α et β sont des constantes positives dont les valeurs sont données par le tableau suivant :

| | elliptique | hyperbolique | parabolique |
|----------|------------|--------------|-------------|
| α | 4 | θ | π |
| β | 12 | c_h | c_p |

TABLEAU 3. Valeurs des constantes α et β

À cause de la condition 3), on doit éliminer les solutions « trop proches de 1 », et il est facile de voir que ces solutions sont au nombre d'au plus $\gamma = 6/\text{Im}(\tau) + 3$. On dispose donc d'au moins $\alpha X^2 - \beta X^{3/2} - \gamma$ solutions utilisables, et si $X \geq 4(\beta + \gamma)^2/\alpha^2 + 1$, alors $\alpha X^2 - \beta X^{3/2} - \gamma \geq \alpha/2 \cdot X^2$. Si on impose de plus d'avoir $X \geq 2/\sqrt{\alpha} \cdot L^{1/2}$, le nombre de solutions sera alors supérieur à $2L$, donc à $L + 1$.

Chaque solution z est alors dans $\mathcal{Z}_e(X)$ (resp. $\mathcal{Z}_h(X)$, $\mathcal{Z}_p(X)$), donc en particulier dans $B(X)$. Elle vérifie alors $|z| \leq (1 + |\tau|)X \leq (1 + |\tau|)(2/\sqrt{\alpha} \cdot L^{1/2} + X_0) \leq c_3 L^{1/2}$ avec $c_3 = (1 + |\tau|) \left((2/\sqrt{\alpha} + X_0) \right) \geq 1$ et $X_0 = 4(\beta + \gamma)^2/\alpha^2 + 1$.

Pour chaque choix de w vérifiant 1), on trouve $L + 1$ solutions z vérifiant 3), 4) et 5). Il reste juste à voir qu'on peut choisir $L + 1$ valeurs de w différentes tout en vérifiant la condition 2) : cela revient à faire rentrer $L + 1$ disques disjoints de rayon $c_2 L^{-1/2}$ à l'intérieur d'un disque de rayon r_0 , ce qui ne pose aucune difficulté en choisissant $c_2 \leq r_0/2$ (en disposant les centres des petits disques suivant une grille carrée, par exemple). \square

Reste à énoncer et démontrer le lemme de zéros.

Théorème 3.5. *Si l'on n'est pas dans le cas parabolique défavorable, alors il existe une constante absolue $c > 0$ telle que, pour tout entier $L \geq 1$, pour tout réel $R \geq 2$ et pour tout polynôme non nul $P(z, w)$ de degré au plus L suivant chaque variable, la fonction*

$P(z, \sigma(z))$ admet au plus $cL(R + \sqrt{L})^2 \log(R + L)$ zéros (comptés avec multiplicité) dans le disque $|z| \leq R$.

La constante c vérifie $c = \frac{c_2^2 \log(c_3)}{\log(2)} (7 + 37c_1 + \log(2(1 + c_2c_3)(1 + r_0)) - \log(c_2c_3\epsilon) + 3)$, où c_1 est définie à la proposition 2.5 et c_2, c_3 et r_0 au tableau 2.

Démonstration. Notons $F(z) = P(z, \sigma(z))$ et z_1, \dots, z_N ses zéros comptés avec multiplicité. Posons alors

$$\phi(z) = F(z) \prod_{n=1}^N (z - z_n)^{-1},$$

ce qui définit une fonction entière ne s'annulant pas sur le disque $|z| \leq R$.

Notons $S = R + c_3L^{1/2}$ pour le c_3 du lemme 3.4. D'après le principe du maximum, on a

$$(5) \quad |\phi|_S \leq |\phi|_{5S}.$$

D'autre part, la fonction σ étant d'ordre 2 (proposition 2.5), on a l'inégalité $|F|_{5S} \leq (L + 1)^2 |P|(5S)^L e^{25c_1LS^2} \leq |P|S^{c_4LS^2}$, avec $c_4 = 7 + 37c_1$ donc

$$(6) \quad |\phi|_{5S} \leq |P|S^{c_4LS^2} (4S)^{-N}.$$

Par ailleurs, pour tout z vérifiant $|z - 1| \geq 1$ et $|z| \leq S$, on a :

$$|F(z)| = |\phi(z)| \prod_{n=1}^N |z - z_n| \leq |\phi|_S (2S)^N.$$

De cette inégalité ainsi que de (5) et (6), on déduit que $|F(z)| \leq |P|S^{c_4LS^2} 2^{-N}$. Ceci s'applique en particulier aux $z = z_{k,l}$ du lemme 3.4, donc on a, pour tous $k, l = 0, \dots, L$:

$$(7) \quad |P(z_{k,l}, w_l)| \leq |P|S^{c_4LS^2} 2^{-N}.$$

On va maintenant utiliser deux fois la formule d'interpolation de Lagrange pour les points du lemme 3.4. D'abord :

$$P(z, w) = \sum_{l=0}^L \left(\prod_{0 \leq i \leq L, i \neq l} \frac{w - w_i}{w_l - w_i} \right) P(z, w_l),$$

puis

$$P(z, w_l) = \sum_{k=0}^L \left(\prod_{0 \leq j \leq L, j \neq k} \frac{z - z_{j,l}}{z_{k,l} - z_{j,l}} \right) P(z_{k,l}, w_l).$$

Au final :

$$P(z, w) = \sum_{k=0}^L \sum_{l=0}^L \left(\prod_{0 \leq i \leq L, i \neq l} \frac{w - w_i}{w_l - w_i} \cdot \prod_{0 \leq j \leq L, j \neq k} \frac{z - z_{j,l}}{z_{k,l} - z_{j,l}} \right) P(z_{k,l}, w_l).$$

Le coefficient d'indices (p, q) de P est donc donné par :

$$a_{p,q} = \sum_{k=0}^L \sum_{l=0}^L \left((-1)^{p+q} \sigma_{L-p}(w_0, \dots, \widehat{w}_l, \dots, w_L) \sigma_{L-q}(z_{0,l}, \dots, \widehat{z}_{k,l}, \dots, z_{L,l}) \right. \\ \left. \prod_{0 \leq i \leq L, i \neq l} (w_l - w_i)^{-1} \prod_{0 \leq j \leq L, j \neq k} (z_{k,l} - z_{j,l})^{-1} \right) P(z_{k,l}, w_l),$$

où $(x_0, \dots, \widehat{x}_k, \dots, x_L)$ désigne le L -uplet obtenu en omettant x_k dans (x_0, \dots, x_L) et les σ_p sont les fonctions symétriques élémentaires :

$$\sigma_p(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} x_{i_1} \cdots x_{i_p}.$$

On utilise maintenant les conditions du lemme 3.4 sur w_l et $z_{k,l}$ ainsi que l'inégalité (7) pour borner cette expression :

$$|a_{p,q}| \leq (L+1)^2 \binom{L}{L-p} \binom{L}{L-q} \max_l |w_l|^{L-p} \max_{k,l} |z_{k,l}|^{L-q} \\ \left(\min_{i \neq l} |w_l - w_i| \right)^{-L} \min_{k,l} \left(\prod_{0 \leq j \leq L, j \neq k} |z_{k,l} - z_{j,l}| \right)^{-1} |P(z_{k,l}, w_l)| \\ \leq \frac{(L+1)^2 2^{2L} r_0^{L-p} (c_3 L^{1/2})^{L-q}}{(c_2 L^{-1/2})^L (2\epsilon)^L} |P| S^{c_4 L S^2} 2^{-N} \\ \leq |P| S^{c_5 L S^2} 2^{-N},$$

avec $c_5 = c_4 + \log(2(1 + c_2 c_3)(1 + r_0)) - \log(c_2 c_3 \epsilon) + 3$.

Or, par définition, $\max_{p,q} |a_{p,q}| = |P|$, donc $2^N \leq S^{c_5 L S^2}$, d'où

$$N \leq \frac{c_5}{\log(2)} L S^2 \log(S) \\ \leq \frac{c_5}{\log(2)} L (R + c_3 \sqrt{L})^2 \log(R + c_3 \sqrt{L}) \\ \leq c_6 L (R + \sqrt{L})^2 \log(R + L),$$

avec $c_6 = c_5 c_3^2 \log(c_3) / \log(2)$. □

Si on fixe le degré L et qu'on laisse le rayon R croître, la borne est équivalente à $cLR^2 \log R$, qui est atteinte au facteur $c \log R$ près en prenant $F(z) = \sigma(z)^L$ (de l'ordre de R^2 zéros dans un disque de rayon R , tous de multiplicité L).

Au contraire, à R fixé, notre borne est équivalente à $cL^2 \log L$. Or, on si on considère le rang du système linéaire $[F^{(k)}(0) = 0]_{0 \leq k \leq K}$ (dont les inconnues sont les $(L+1)^2$ coefficients du polynôme P), on voit qu'il existe nécessairement des solutions non nulles lorsque $K = (L+1)^2$. En d'autres termes, il existe un polynôme $P(z, w)$ non nul de degré au plus L en chaque variable et tel que $P(z, \sigma(z))$ admette un zéro d'ordre au moins $(L+1)^2$ en $z = 0$.

La borne $cL^2 \log L$ est donc essentiellement atteinte, à la constante c et au facteur $\log L$ près.

Dans le cas général, on estime que le théorème 3.5 surestime la réalité d'un facteur d'ordre $\log(R + L)$. Faire disparaître ce facteur supplémentaire ne semble pas facilement réalisable avec notre méthode ; on pourra cependant voir que cela n'améliorerait pas significativement le résultat final (on gagnerait un facteur de l'ordre de $\log(d \log(H))$).

4. POINTS ALGÈBRIQUES

L'objectif de cette partie est de démontrer le théorème suivant, qui estime la répartition des points algébriques le long du graphe de la fonction σ en fonction de leur degré et de leur hauteur :

Théorème 4.1. *Soient $d \geq 1$ et $n \geq 2$ des entiers et $H \geq 3$ et $R \geq 2$ des réels. Alors, si l'on n'est pas dans le cas parabolique défavorable, le nombre $\mathcal{N}(R, d, H)$ de nombres complexes z tels que :*

- 1) $|z| \leq R$;
- 2) $[\mathbf{Q}(z, \sigma(z)) : \mathbf{Q}] \leq d$;
- 3) $H(z) \leq H, H(\sigma(z)) \leq H,$

vérifie

$$\mathcal{N}(R, d, H) \leq c' R^{10} \log(R) \frac{d^4 (\log(H))^2}{\log(d \log(H))},$$

où $c' = 9 \cdot 2^{30} c_1^2 \log(2c_1)c$, la constante c_1 étant celle de la proposition 2.5 et c celle du théorème 3.5.

La démonstration se déroule de la façon suivante. Soit $S \subset \mathbf{C}^2$ l'ensemble des couples $(z, \sigma(z))$ où z satisfait les conditions 1, 2 et 3. On va commencer par estimer le degré minimal d'une courbe algébrique passant par tous les points de S , puis utiliser notre lemme de zéros (théorème 3.5) pour en déduire une borne sur le cardinal de S .

Dans toute la suite, on notera $\omega(S)$ le degré minimal d'une courbe algébrique passant par tous les points de S . Pour l'estimer, on va utiliser le résultat suivant, qui est une reformulation par Masser d'un résultat dû à Bombieri et Pila ([3]) :

Proposition 4.2 ([8, Proposition 2]). *Soient $d \geq 1$ et $T \geq \sqrt{8d}$ des entiers, $A > 0, Z > 0, M > 0$ et $H \geq 1$ des réels, f_1 et f_2 des fonctions analytiques sur un voisinage ouvert du disque $|z| \leq 2Z$ et bornées par M sur ce disque. Soit \mathcal{Z} une partie finie de \mathbf{C} vérifiant les propriétés suivantes :*

- 1) $|z| \leq Z$ pour tout $z \in \mathcal{Z}$;
- 2) $|z - z'| \leq A^{-1}$ pour tous $z, z' \in \mathcal{Z}$;
- 3) $[\mathbf{Q}(f_1(z), f_2(z)) : \mathbf{Q}] \leq d$ pour tout $z \in \mathcal{Z}$;
- 4) $H(f_1(z)) \leq H, H(f_2(z)) \leq H$ pour tout $z \in \mathcal{Z}$.

On suppose enfin que la condition suivante est vérifiée :

$$(8) \quad (AZ)^T > (4T)^{96d^2/T} (M+1)^{16d} H^{48d^2}.$$

Alors, en notant $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$, on a $\omega(\mathbf{f}(\mathcal{Z})) \leq T$.

Démonstration du théorème. Soit $T \geq \sqrt{8d}$ un entier dont on précisera le choix par la suite. On va appliquer la proposition 4.2 à l'ensemble \mathcal{Z} des points $z \in \mathbf{C}$ satisfaisant les hypothèses du théorème et aux fonctions entières $f_1(z) = z$ et $f_2(z) = \sigma(z)$. On va avoir $\omega(\mathbf{f}(\mathcal{Z})) \leq T$, sous réserve que les conditions suivantes soient vérifiées :

- 1) Les éléments de \mathcal{Z} sont de module inférieur à Z ;
- 2) \mathcal{Z} est contenu dans un disque de diamètre A^{-1} ;
- 3) $[\mathbf{Q}(z, \sigma(z)) : \mathbf{Q}] \leq d$ pour tout $z \in \mathcal{Z}$;
- 4) $H(z) \leq H$, $H(\sigma(z)) \leq H$ pour tout $z \in \mathcal{Z}$;
- 5) $(AZ)^T > (4T)^{96d^2/T} (M+1)^{16d} H^{48d^2}$,

où M est un majorant de $|z|$ et de $|\sigma(z)|$ sur le disque $|z| \leq 2Z$.

D'après les hypothèses du théorème, pour tout choix de $Z \geq R$ et $A \leq (2R)^{-1}$, les conditions 1 à 4 sont directement vérifiées.

La fonction σ étant d'ordre 2 (proposition 2.5), on peut prendre $M = (2Z)^{4c_1 Z^2}$, donc

$$\begin{aligned} (4T)^{96d^2/T} (M+1)^{16d} H^{48d^2} &\leq (4T)^{96d^2/T} (3Z)^{64c_1 d Z^2} H^{48d^2} \\ &\leq e^{384d^2} (3Z)^{64c_1 d Z^2} H^{48d^2}. \end{aligned}$$

Pour que la condition 5 soit réalisée, il suffit donc d'avoir

$$T \log(AZ) > 384d^2 + 64c_1 d Z^2 \log(3Z) + 48d^2 \log(H),$$

qui peut se réécrire

$$(T - 64c_1 d Z^2) \log(AZ) > 384d^2 + 64c_1 d Z^2 \log(3/A) + 48d^2 \log(H).$$

Si on suppose maintenant $AZ > 1$ et $T \geq 128c_1 d Z^2$, il suffit désormais d'avoir

$$64c_1 d Z^2 \log(AZ) > 384d^2 + 64c_1 d Z^2 \log(3/A) + 48d^2 \log(H),$$

soit encore

$$64c_1 Z^2 \log(ZA^2) > 384d + 48d \log(H).$$

ce qui se ramène à la condition suffisante

$$(9) \quad 28d \log(H) \leq c_1 Z^2 \log(ZA^2).$$

Pour assurer l'inégalité, prenons pour A la plus grande valeur possible, soit $A = (2R)^{-1}$.

Il suffit alors de choisir $Z = 4R^2 \sqrt{\frac{8d \log(H)}{\log(8d \log(H))}}$.

En effet, dans ces conditions,

$$\begin{aligned} c_1 Z^2 \log(ZA^2) &= c_1 64R^4 \frac{d \log(H)}{\log(8d \log(H))} (\log(8d \log(H)) - \log \log(8d \log(H))) \\ &= c_1 64R^4 d \log(H) \left(1 - \underbrace{\frac{\log \log(8d \log(H))}{\log(8d \log(H))}}_{\leq 1/e} \right) \\ &\geq c_1 40R^4 d \log(H) \geq 28d \log(H), \end{aligned}$$

car $c_1 \geq 1$.

On prend donc $Z = 4R^2 \sqrt{\frac{8d \log(H)}{\log(8d \log(H))}}$ et T un entier supérieur ou égal à $128c_1 dZ^2$, mais du même ordre de grandeur – disons, la partie entière supérieure de $128c_1 dZ^2$; on a donc $T \leq 256c_1 dZ^2$.

On peut alors appliquer la proposition 4.2, qui nous dit donc que $\omega(\mathbf{f}(\mathcal{Z})) \leq T$, c'est-à-dire qu'il existe un polynôme P en deux variables, de degré total au plus T , tel que tous les points de $\mathbf{f}(\mathcal{Z})$ soient des zéros de P . Autrement dit, pour tout z vérifiant les hypothèses du théorème, on a $P(z, \sigma(z)) = 0$.

Le degré de P en chaque variable est majoré par T , donc on peut utiliser le théorème 3.5 pour borner le nombre de zéros de $P(z, \sigma(z))$ dans un disque de rayon R , donc a fortiori le nombre de points de l'ensemble \mathcal{Z} , c'est-à-dire les points satisfaisant les hypothèses du théorème :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(n, d, H) &\leq c_6 T (R + \sqrt{T})^2 \log(R + \sqrt{T}) \\ &\leq 2c_6 \left(\frac{c_1 2^{14} d^2 R^5 \log(H)}{\log(8d \log(H))} \right)^2 \log \left(R + 2^7 d R^2 \sqrt{\frac{c_1 \log(H)}{\log(8d \log(H))}} \right) \\ &\leq 2^{29} c_1^2 c_6 d^4 R^{10} \left(\frac{\log(H)}{\log(8d \log(H))} \right)^2 18 \log(2c_1) \log(R) \log(8d \log(H)) \\ &\leq c_7 d^4 R^{10} \log(R) \frac{(\log(H))^2}{\log(8d \log(H))} \leq c_7 d^4 R^{10} \log(R) \frac{(\log(H))^2}{\log(d \log(H))}, \end{aligned}$$

avec $c_7 = 9 \cdot 2^{30} c_1^2 \log(2c_1) c_6$. □

RÉFÉRENCES

- [1] E. BESSON – « Points rationnels de la fonction Gamma d'Euler », *Archiv der Mathematik* **103** (2014), no. 1, p. 61–73.
- [2] E. BOMBIERI et W. GUBLER – *Heights in diophantine geometry*, Cambridge University Press, 2007.
- [3] E. BOMBIERI et J. PILA – « The number of integral points on arcs and ovals », *Duke Math. Jour.* **59** (1989), no. 2, p. 337–357.
- [4] G. J. BOXALL et G. O. JONES – « Algebraic values of certain analytic functions », *International Mathematics Research Notices* (2013).

- [5] G. DIAZ – « Transcendance et indépendance algébrique : liens entre les points de vue elliptique et modulaire », *Ramanujan J.* **4** (2000), no. 2, p. 157–199.
- [6] G. H. HARDY – *Ramanujan : twelve lectures on subjects suggested by his life and work*, 3^e éd., New York : Chelsea, 1999.
- [7] F. LE LIONNAIS – *Les nombres remarquables*, Hermann, 1983.
- [8] D. MASSER – « Rational values of the Riemann zeta function », *Journal of Number Theory* **131** (2011), no. 11, p. 2037–2046.
- [9] A. SURROCA – « Valeurs algébriques de fonctions transcendentes », *Int. Math. Res. Not.* **2006** (2006), p. 1–31.
- [10] E. T. WHITTAKER et G. N. WATSON – *A course of modern analysis*, 4^{ème} éd., Cambridge Mathematical Library, 1996.

INSTITUT FOURIER, UNIVERSITÉ GRENOBLE 1, CNRS UMR 5582, 100 RUE DES MATHÉMATIQUES,
BP 74, 38402 SAINT-MARTIN D'HÈRES, FRANCE

E-mail address: `etienne.besson@ujf-grenoble.fr`

URL: `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~bessonnet/`