Bounded height problems and Silverman Specialization Theorem (joint work with D. Masser and U. Zannier).

Let $\mathcal{C}$ be a curve defined over $\overline{\mathbb{Q}}$. Bombieri, Masser and Zannier proved a result which may be rephrased as a toric analogue of Silverman's Specialization Theorem: *Let $\Gamma \subset \mathbb{G}_{\mathrm{m}}(\mathcal{C})$ be a finitely generated subgroup of non zero rational functions on $\mathcal{C}$ which does not contain non trivial constant functions. Then the set of $P \in \mathcal{C}(\overline{\mathbb{Q}})$ such that the restriction of the specialization map $\sigma_P \colon \mathbb{G}_{\mathrm{m}}(\mathcal{C}) \to \mathbb{G}_{\mathrm{m}}(\overline{\mathbb{Q}})$, $x \mapsto x(P)$ to Γ is not injective is a set of bounded height.*

It turns out that in fact a weaker assumption suffices to have bounded height: *Let V be an algebraic subvariety of $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^r(\mathcal{C})$ and let $\sigma_P \colon \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^r(\mathcal{C}) \to \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^r(\overline{\mathbb{Q}})$ be the specialization map. Then the set of $P \in \mathcal{C}(\overline{\mathbb{Q}})$ such that for some $\mathbf{x} \in \Gamma^r \backslash V$ we have $\sigma_P(\mathbf{x}) \in \sigma_P(V)$ is a set of bounded height.*

As a corollary we obtain a bounded height result for some degenerate unlikely intersections.

Résultats de hauteur bornée et

théorème de spécialisation de Silverman

(travail en collaboration avec D. Masser and U. Zannier).

Soit $\mathcal{C}$ une courbe définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Bombieri, Masser and Zannier ont montré un résultat de hauteur bornée qui peut être vu comme un analogue d'un théorème de spécialisation de Silverman. Soit Γ un sous groupe de type fini du groupe $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}(\mathcal{C})$ des fonctions rationnelles non nulles sur $\mathcal{C}$. Supposons que $\Gamma \cap \overline{\mathbb{Q}}^* = \{1\}$. Le cas torique de ce théorème de Silverman s'énonce ainsi :

L'ensemble des points $P \in \mathcal{C}(\overline{\mathbb{Q}})$ tels que la restriction à Γ du morphisme de restriction

$$\begin{aligned} \sigma_P \colon \mathbb{G}_{\mathrm{m}}(\mathcal{C}) &\to \mathbb{G}_{\mathrm{m}}(\overline{\mathbb{Q}}), \\ x &\mapsto x(P) \end{aligned}$$

n'est pas injective est un ensemble de hauteur bornée.

Nous montrerons :

Soit V une sous-variété algébrique de $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^r(\mathcal{C})$ et

$$\begin{aligned} \sigma_P \colon \mathbb{G}_{\mathrm{m}}(\mathcal{C})^r &\to \mathbb{G}_{\mathrm{m}}(\overline{\mathbb{Q}})^r, \\ \mathbf{x} &\mapsto \mathbf{x}(P) \end{aligned}$$

le morphisme de spécialisation. L'ensemble des points $P \in \mathcal{C}(\overline{\mathbb{Q}})$ tels qu'il existe $\mathbf{x} \in \Gamma^r \backslash V$ tel que $\sigma_P(\mathbf{x}) \in \sigma_P(V)$ est un ensemble de hauteur bornée.

Nous en déduirons comme corollaire un résultat de hauteur bornée pour certaines intersections improbables dégénérées.