Algébricité de la série génératrice complète des chemins de Gessel

Alin Bostan

Considérons les questions suivantes de combinatoire énumérative :

(1) Une tour peut se déplacer d'un nombre arbitraire de cases, horizontalement et verticalement, sur un échiquier $N \times N$. En supposant que la tour se déplace tout le temps soit vers la droite, soit vers le haut, combien de chemins différents peut-elle emprunter entre la case $(1,1)$ et la case (N,N) ? Quid de l'analogue tridimensionnel de cette question ?

(2) Une puce effectue une marche aléatoire biaisée dans le réseau $\mathbb{Z}^2$: elle part du point $(0,0)$ et à chaque étape elle saute soit vers le nord ou le sud avec probabilité $1/4$, soit vers l'ouest avec probabilité $1/20$, soit vers l'est avec probabilité $9/20$. Quelle est la probabilité que la puce revienne en $(0,0)$ à un moment donné pendant son voyage ?

(3) Combien de façons y a-t-il de se déplacer dans le quart de plan $\mathbb{N}^2$, en partant de l'origine $(0,0)$ et utilisant un nombre fixe n de pas de longueur un vers l'est, le sud-ouest, l'est ou le nord-est ?

Dans cet exposé, nous montrerons comment de tels problèmes peuvent être résolus de façon systématique en utilisant une approche de type mathématiques expérimentales guidée par des algorithmes modernes du calcul formel. Le but est de donner une vue d'ensemble de plusieurs techniques et outils permettant de *conjecturer* et de *prouver* les réponses suivantes (exprimées en termes de séries génératrices pour (1) et (3)) :

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1-t}{\sqrt{(1-t)(1-9t)}}\right) \quad \text{et} \quad 1+6\cdot\int_0^t \frac{{}_2F_1\left(\begin{matrix}1/3 & 2/3\\ & 2\end{matrix}\,\middle|\,\frac{27x(3x-2)}{(4x-1)^3}\right)}{(4x-1)(64x-1)}\,dx \quad \text{pour (1),}$$

$$1-\frac{2}{5}\frac{\sqrt{6}}{{}_2F_1\left(\begin{matrix}1 & 1\\ 1/2 & \end{matrix}\,\middle|\,5/8\right)} \quad \text{pour (2),}$$

$$\text{et} \quad \frac{1}{2t}\cdot{}_2F_1\left(\begin{matrix}-1/12 & 1/4\\ 2/3 & \end{matrix}\,\middle|\,-\frac{64t(4t+1)^2}{(4t-1)^4}\right)-1 \quad \text{pour (3).}$$

Les chemins apparaissant dans l'énoncé de la question (3) sont appelés *chemins de Gessel*. Soit $g(n,i,j)$ le nombre de tels chemins utilisant n pas et joignant l'origine au point (i,j). Nous présenterons la découverte et la preuve assistées par ordinateur du résultat récent suivant, obtenu en collaboration avec Manuel Kauers : la série génératrice complète de la suite $g(n,i,j)$ est une fonction algébrique.

The complete generating function for Gessel walks is algebraic

Alin Bostan

Let us consider the following questions of enumerative combinatorics:

(1) A chess Rook can move any number of squares horizontally or vertically on an $N \times N$ chess board. Assuming that the Rook moves right or up at every step, how many different paths can the Rook travel in moving from the lower-left corner to the upper-right corner on the board? What about the three-dimensional analogue of this question?

(2) A flea starts at $(0,0)$ on the infinite two-dimensional integer lattice and executes a biased random walk: at each step it hops north or south with probability $1/4$, west with probability $1/20$ and east with probability $9/20$. What is the probability that the flea returns to $(0,0)$ sometime during its wanderings?

(3) How many ways are there to walk from the origin $(0,0)$ through the quarter plane $\mathbb{N}^2$ using a fixed number n of unit steps going either west, south-west, east, or north-east?

In this lecture we will show how such problems can be systematically tackled using an experimental-mathematics approach combined with modern computer algebra algorithms. The aim is to give an overview of several techniques and tools leading to the computer-driven *discovery* and *proof* of the following answers, expressed in terms of generating series for (1) and (3):

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1-t}{\sqrt{(1-t)(1-9t)}}\right) \quad \text{and} \quad 1+6\cdot\int_0^t \frac{{}_2F_1\left(\begin{matrix}1/3 & 2/3\\ & 2\end{matrix}\,\middle|\,\frac{27x(3x-2)}{(4x-1)^3}\right)}{(4x-1)(64x-1)}\,dx \quad \text{for (1)},$$

$$1-\frac{2}{5}\frac{\sqrt{6}}{{}_2F_1\left(\begin{matrix}1 & 1\\ & 1/2\end{matrix}\,\middle|\,5/8\right)} \quad \text{for (2)},$$

$$\text{and} \quad \frac{1}{2t}\cdot {}_2F_1\left(\begin{matrix}-1/12 & 1/4\\ & 2/3\end{matrix}\,\middle|\,-\frac{64t(4t+1)^2}{(4t-1)^4}\right)-1 \quad \text{for (3)}.$$

The walks appearing in question (3) are called *Gessel walks*. Let $g(n,i,j)$ denote the number of such walks using n steps and ending at the point (i,j). We will describe a computer-assisted proof of the following recent result, obtained jointly with Manuel Kauers: the trivariate generating series of the sequence $g(n,i,j)$ is an algebraic function.