Irrationalité d'une infinité de valeurs de la fonction zêta aux entiers impairs

Keith Ball et Tanguy Rivoal

1 Introduction

Au contraire des nombres $\zeta(2n) = \sum_{k\geq 1} 1/k^{2n} = (-1)^{n-1}2^{2n-1}B_{2n}\pi^{2n}/(2n)!$ $(n \geq 1)$, dont la transcendance est une conséquence de celle de π, peu de résultats sont actuellement connus sur la nature arithmétique des nombres $\zeta(2n+1) = \sum_{k\geq 1} 1/k^{2n+1}$. On peut citer en particulier les résultats suivants.

- En 1978, Apéry [1] est parvenu à montrer l'irrationalité de $\zeta(3)$, mais sa démonstration n'a pas pu être généralisée aux nombres $\zeta(2n+1)$ avec $n \geq 2$: voir Van der Poorten [20], Cohen [6] et Reyssat [14] pour des exposés de la méthode d'Apéry. D'autres démonstrations ont été données depuis par Beukers [2,4,5], Nesterenko [11], Sorokin [19] et Prévost [13].

- Des mesures d'irrationalité de $\zeta(3)$ ont aussi été établies par Apéry [1], Dvornicich-Viola [7], Hata [9] et Rhin-Viola [16].

- En 1979, Gutnik [8] a démontré que, pour tout $q \in \mathbb{Q}$, au moins un des deux nombres suivants est irrationnel
$$3\zeta(3) + q\zeta(2)\ , \quad \zeta(2) + 2q\log(2)\ .$$

- En 1981, Beukers [3] a indiqué des résultats similaires à ceux de Gutnik : les deux ensembles qui suivent contiennent au moins un nombre irrationnel
$$\left\{\frac{\pi^4}{\zeta(3)}\ , \quad \frac{7\pi^4\log(2)}{\zeta(3)} - 15\pi^2\ , \quad \frac{7\pi^6}{3240\zeta(3)} - \zeta(3)\right\}$$
$$\left\{\frac{\zeta(3)}{\pi^2}\ , \quad \frac{\zeta(3)^2}{\pi^2} - \frac{\pi^4}{360}\ , \quad \zeta(3)\pi^2 - 30\zeta(5)\ , \quad \frac{\zeta(3)\zeta(5)}{\pi^2} - \frac{\pi^6}{2268}\right\}.$$

Dans cet article, nous démontrons qu'une infinité de valeurs de la fonction ζ aux entiers impairs sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$. De façon plus précise, nous prouvons le

Théorème 1 *Soit a un entier impair ≥ 3 et notons $\delta(a)$ la dimension du $\mathbb{Q}-$espace vectoriel engendré par 1, $\zeta(3)$, $\zeta(5)$, $\ldots$, $\zeta(a)$. On a alors*

$$\delta(a) \geq \frac{1}{3}\log(a).$$

De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $A(\varepsilon)$ tel que si $a > A(\varepsilon)$,

$$\delta(a) \geq \frac{1-\varepsilon}{1+\log(2)}\log(a).$$

Nous montrons également le

Théorème 2 *Il existe un entier impair $j \leq 169$ tel que 1, $\zeta(3)$ et $\zeta(j)$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$.*

Les démonstrations de ces théorèmes sont données au paragraphe 3, après celles des résultats auxiliaires, énoncés au paragraphe 2.

Les méthodes de cet article s'inspirent du travail de Nikishin [12] sur l'approximation simultanée des polylogarithmes $\mathrm{Li}_n(z)$ en des valeurs rationnelles. Ces fonctions sont définies par le développement en série entière, pour $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$,

$$\mathrm{Li}_n(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{(k+1)^n}.$$

En particulier, $\mathrm{Li}_1(z) = -\log(1-z)/z$ diverge au voisinage de 1, alors que si $n \geq 2$, $\mathrm{Li}_n(1) = \zeta(n)$. La démarche de Nikishin le conduit à introduire des séries de la forme

$$N_{n,a,b}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k(k-1)\cdots(k-an-b+2)}{(k+1)^a(k+2)^a\cdots(k+n)^a(k+n+1)^b} z^{-k}$$

avec a, b, n entiers ≥ 1, $1 \leq b \leq a$ et z un nombre complexe de module ≥ 1, $z \neq 1$. Ces séries fournissent des approximants de Padé de type I des polylogarithmes : spécialisées en $z = -1$, elles donnent donc des combinaisons linéaires à coefficients rationnels en les ζ impairs, les ζ pairs et $\log(2)$. La croissance en a des coefficients est néanmoins trop rapide pour obtenir un résultat arithmétique non trivial dans ce cas.

Plus récemment, Sorokin [18] a proposé une méthode pour éliminer (en particulier) les ζ impairs : pour cela, il résout explicitement un problème d'approximation simultanée de certaines fonctions multizêtas, parvenant ainsi à donner une nouvelle mesure de transcendance de π. Dans la direction opposée, en généralisant les intégrales de Beukers [2], Vasilyev [21] a construit une combinaison linéaire (à coefficients a_n, b_n et c_n entiers) $J_n(5) = a_n\zeta(5) + b_n\zeta(3) + c_n$ tendant vers 0 quand n tend vers $+\infty$: la présence de $\zeta(3)$ ne permet malheureusement pas la démonstration directe de l'irrationalité de $\zeta(5)$.

Reyssat [15] a utilisé les approximants de Padé simultanés des puissances de $\log(1-x)$ pour montrer, avec $a/b > 1$ rationnel fixé, l'indépendance linéaire sur $\mathbb{Q}$ d'une infinité des nombres $\log^k(a/b)$ (où $k \in \mathbb{N}$), ce qui suffit pour prouver la transcendance de $\log(a/b)$.

Ce dernier résultat suggère que, plutôt que la recherche, à la manière d'Apéry, de l' irrationalité de chacune des valeurs de la fonction ζ aux entiers impairs, il peut être fructueux de les considérer tous ensemble, afin de prouver leur indépendance linéaire sur $\mathbb{Q}$, ou un résultat dans cette direction. Pour parvenir à cela, deux autres idées sont nécessaires. La première consiste à modifier la série de Nikishin de la façon suivante :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{q_n(k)}{(k+1)^a \cdots (k+n+1)^a} z^{-k}$$

où $q_n(k)$ est un polynôme qui est une fonction paire de $k+n/2+1$. La parité de q_n assure en effet qu'une fois la fraction rationnelle décomposée en fractions partielles, les polynômes correspondant aux dénominateurs avec une puissance paire s'annulent pour $z = 1$: on obtient ainsi des combinaisons linéaires à coefficients rationnels uniquement en les ζ impairs. La deuxième idée est de paramétrer le nombre de zéros entiers de q_n par un entier r et d'ajuster celui-ci de sorte que les coefficients des combinaisons linéaires aient une croissance moins importante que pour la série de Nikishin, tout en gardant une décroissance rapide de la combinaison elle-même.

Pour cela, nous introduisons la série

$$S_{n,a,r}(z) = n!^{a-2r} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k \cdots (k-rn+1)(k+n+2)\cdots(k+(r+1)n+1)}{(k+1)^a(k+2)^a \cdots (k+n+1)^a} z^{-k}$$

où n, r et a sont des entiers vérifiant $1 \leq r < a/2$, $n \in \mathbb{N}$. Les conditions sur a et r assurent que $S_{n,a,r}(z)$ converge pour tout complexe z de module ≥ 1. Pour simplifier l'exposé des résultats, nous écrirons cette série sous la forme

$$S_n(z) = n!^{a-2r} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k-rn+1)_{rn}(k+n+2)_{rn}}{(k+1)_{n+1}^a} z^{-k}$$

où $(\alpha)_k$ est le symbole de Pochammer :

$$(\alpha)_0 = 1 \quad \text{et} \quad (\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1) \quad \text{si} \quad k = 1, 2, \ldots$$

Comme nous l'a suggéré le referee, il est aussi utile de remarquer que $S_n(z)$ est une fonction hypergéométrique généralisée :

$$\begin{aligned} S_n(z) = z^{-rn-1} n!^{a-2r} & \frac{\Gamma(rn+1)^{a+1}\Gamma((2r+1)n+2)}{\Gamma((r+1)n+2)^{a+1}} \\ & \times {}_{a+2}F_{a+1}\left(\left. \begin{matrix} rn+1, \ldots, rn+1, (2r+1)n+2 \\ (r+1)n+2, \ldots, (r+1)n+2 \end{matrix} \right| z^{-1} \right) . \end{aligned}$$

Le paragraphe 2 est consacré à l'étude précise de cette série : le Lemme 1 montre que la série $S_n(1)$ fournit bien des combinaisons linéaires à coefficients rationnelles en les ζ impairs lorsque n est pair. Le Lemme 2 donne une expression intégrale similaire à celles de Beukers [2] et de Dvornicich-Viola [7], §1.3, ce qui permet d'estimer facilement $\lim\limits_{n\to+\infty} |S_n(1)|^{1/n}$ (Lemme 3). Nous suivons ensuite Nikishin pour la démonstration des Lemmes 4 et 5, qui concernent les propriétés asymptotiques et arithmétiques des coefficients des combinaisons linéaires. Enfin, pour montrer que les séries $N_{n,a,b}(z)$ fournissent des approximations des polylogarithmes linéairement indépendantes, Nikishin évalue un déterminant : nous évitons cette complication en appliquant un critère d'indépendance linéaire, dû à Nesterenko [12].

Remerciements. Nous remercions le referee, dont les remarques ont permis de simplifier les démonstrations des Lemmes 2 et 4. Le second auteur tient par ailleurs à exprimer toute sa gratitude à F. Amoroso pour ses précieux conseils qui ont permis de grandement améliorer une précédente version, ainsi qu'à M. Waldschmidt pour sa patiente relecture et son soutien constant.

2 Résultats auxiliaires

Dans toute la suite, on pose $D_\lambda = \frac{1}{\lambda!}\frac{d^\lambda}{dt^\lambda}$ et

$$R_n(t) = n!^{a-2r} \frac{(t-rn+1)_{rn}(t+n+2)_{rn}}{(t+1)_{n+1}^a}$$

de sorte que

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} R_n(k) z^{-k}.$$

Pour $l \in \{1, \ldots, a\}$ et $j \in \{0, \ldots, n\}$, on note aussi

$$c_{l,j,n} = D_{a-l}\left(R_n(t)(t+j+1)^a\right)_{|t=-j-1} \in \mathbb{Q}\ , \tag{1}$$

$$P_{0,n}(z) = -\sum_{l=1}^{a}\sum_{j=1}^{n} c_{l,j,n} \sum_{k=0}^{j-1} \frac{1}{(k+1)^l} z^{j-k} \text{ et } P_{l,n}(z) = \sum_{j=0}^{n} c_{l,j,n} z^j. \tag{2}$$

Les $P_{l,n}(z)$ sont donc des polynômes à coefficients rationnels.

Lemme 1 *On a :*

$$S_n(1) = P_{0,n}(1) + \sum_{l=2}^{a} P_{l,n}(1)\zeta(l). \tag{3}$$

De plus,

$$\text{si } (n+1)a + l \text{ est impair, alors } P_{l,n}(1) = 0. \tag{4}$$

En particulier, si n est pair et a impair ≥ 3, $P_{l,n}(1) = 0$ pour tout $l \in \{2, \ldots, a\}$ pair et $S_n(1)$ est alors une combinaison linéaire uniquement en les ζ impairs :

$$S_n(1) = P_{0,n}(1) + \sum_{l=1}^{(a-1)/2} P_{2l+1,n}(1)\zeta(2l+1). \tag{5}$$

Démonstration
En décomposant $R_n(t)$ en fractions partielles, on obtient :

$$R_n(t) = \sum_{l=1}^{a}\sum_{j=0}^{n} \frac{c_{l,j,n}}{(t+j+1)^l}.$$

D'où si $|z| > 1$

$$\begin{aligned}
S_n(z) &= \sum_{l=1}^{a}\sum_{j=0}^{n} c_{l,j,n} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{z^k}\frac{1}{(k+j+1)^l} \\
&= \sum_{l=1}^{a}\sum_{j=0}^{n} c_{l,j,n} z^j \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{z^k}\frac{1}{(k+1)^l} - \sum_{k=0}^{j-1} \frac{1}{z^k}\frac{1}{(k+1)^l} \right) \\
&= \sum_{l=1}^{a} \mathrm{Li}_l(1/z) \sum_{j=0}^{n} c_{l,j,n} z^j - \sum_{l=1}^{a}\sum_{j=1}^{n} c_{l,j,n} \sum_{k=0}^{j-1} \frac{1}{(k+1)^l} z^{j-k}.
\end{aligned}$$

On a donc

$$S_n(z) = \sum_{l=1}^{a} P_{l,n}(z)\mathrm{Li}_l(1/z) + P_{0,n}(z). \tag{6}$$

Comme $2r < a$, le degré total de la fraction rationnelle $R_n(t)$ est ≤ -2, donc $P_{1,n}(1) = \sum_{j=0}^{n} \mathrm{Res}_{t=-j}(R_n(t)) = 0$ et

$$\lim_{\substack{z\to 1\\ |z|>1}} (P_{1,n}(z)\mathrm{Li}_1(1/z)) = 0\,,$$

ce qui montre (3).
Montrons maintenant (4) et pour cela reformulons (1) sous la forme

$$c_{l,j,n} = (-1)^{a-l} D_{a-l}(\Phi_{n,j}(x))_{|x=j}$$

où

$$\begin{aligned}\Phi_{n,j}(x) &= R_n(-x-1)(j-x)^a \\ &= n!^{a-2r}\frac{(-x-rn)_{rn}(-x+n+1)_{rn}}{(-x)_{n+1}^a}(j-x)^a.\end{aligned}$$

On a

$$\Phi_{n,n-j}(n-x) = n!^{a-2r}\frac{(x-(r+1)n)_{rn}(x+1)_{rn}}{(x-n)_{n+1}^a}(x-j)^a. \tag{7}$$

En appliquant l'identité $(\alpha)_l = (-1)^l(-\alpha-l+1)_l$ aux trois symboles de Pochammer de (7), on obtient

$$\begin{aligned}&\Phi_{n,n-j}(n-x) \\ &\quad = n!^{a-2r}\frac{(-1)^{rn}(-x+n+1)_{rn}(-1)^{rn}(-x-rn)_{rn}}{(-1)^{(n+1)a}(-x)_{n+1}^a}(-1)^a(j-x)^a \\ &\quad = (-1)^{na}\Phi_{n,j}(x).\end{aligned}$$

Donc pour tout $k \geq 0$,

$$\Phi_{n,n-j}^{(k)}(n-x) = (-1)^k(-1)^{na}\Phi_{n,j}^{(k)}(x).$$

En particulier avec $k = a-l$ et $x = j$, on a donc

$$c_{l,n-j,n} = (-1)^{a-l}(-1)^{an}c_{l,j,n},$$

ce qui implique la relation

$$P_{l,n}(1) = (-1)^{(n+1)a+l}P_{l,n}(1).$$

Si $(n+1)a+l$ est impair, on en déduit que $P_{l,n}(1) = 0$.

Définissons maintenant l'intégrale

$$I_n(z) = \int_{[0,1]^{a+1}} \left(\frac{\prod_{l=1}^{a+1} x_l^r(1-x_l)}{(z-x_1x_2\cdots x_{a+1})^{2r+1}}\right)^n \frac{\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_{a+1}}{(z-x_1x_2\cdots x_{a+1})^2}$$

qui converge a priori pour tout complexe z tel que $|z| > 1$.

Lemme 2 *La série $S_n(z)$ admet la représentation intégrale, pour $|z| \geq 1$:*

$$S_n(z) = \frac{((2r+1)n+1)!}{n!^{2r+1}} z^{(r+1)n+2} I_n(z). \tag{8}$$

Démonstration
La série $S_n(z)$ est une fonction hypergéométrique généralisée dont les paramètres sont tels qu'elle peut s'exprimer sous la forme intégrale voulue pour $|z| > 1$ (voir par exemple [17], p. 108). Il s'agit de montrer que cette représentation est encore valide si $|z| = 1$.
Pour cela posons $E = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1\}$ et définissons la fonction

$$F(x,z) = \begin{cases} \frac{\prod_{l=1}^{a+1} x_l^r(1-x_l)}{(z-x_1\cdots x_{a+1})^{2r+1}} & \text{si } (x,z) \in [0,1]^{a+1} \times E \text{ et } (x,z) \neq (1,1,\ldots,1); \\ 0 & \text{si } (x,z) = (1,1,\ldots,1). \end{cases}$$

La fonction $F(x,z)$ est continue sur $[0,1]^{a+1} \times E$: en effet, pour $x \in [0,1]^{a+1}$, il est clair que pour tout $l \in \{1,\ldots,a+1\}$, on a $1 - x_1 \cdots x_{a+1} \geq 1 - x_l$, d'où

$$(1 - x_1 \cdots x_{a+1})^{a+1} \geq \prod_{l=1}^{a+1} (1 - x_l).$$

Donc pour tout $(x,z) \in [0,1]^{a+1} \times E$ tel que $(x,z) \neq (1,1,\ldots,1)$,

$$|F(x,z)| \leq F(x,1) \leq \prod_{l=1}^{a+1} \left(x_l^r (1-x_l)^{\frac{a-2r}{a+1}} \right).$$

Il en résulte que la fonction $F(x,z)$ est continue sur $[0,1]^{a+1} \times E$, puisque $a > 2r$.

Par ailleurs, la fonction $G(x,z) = (z - x_1 \cdots x_{a+1})^{-2}$ est intégrable sur $[0,1]^{a+1}$, ce qui résulte de la continuité, pour $|t| \leq 1$, de la fonction

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w}{(1-uvwt)^2} = \mathrm{Li}_2(t).$$

Notons $\tilde{S}_n(z)$ le membre de droite de (8) et $u(x,z) = F(x,z)^n G(x,z)$. Alors

- pour tout $z \in E$, $|u(x,z)| \leq u(x,1)$ et $u(x,1)$ est intégrable sur $[0,1]^{a+1}$
- pour tout $x \in [0,1]^{a+1}$, $x \neq (1,\ldots,1)$, la fonction $u(x,z)$ est continue sur E.

Donc $\tilde{S}_n(z)$ est continue sur E. Comme $S_n(z)$ est aussi continue sur E et $S_n(z) = \tilde{S}_n(z)$ si $|z| > 1$, cette dernière égalité est encore vraie sur E, ce qui termine la démonstration du Lemme 2.

Considérons le polynôme

$$Q_{r,a}(s) = rs^{a+2} - (r+1)s^{a+1} + (r+1)s - r \ .$$

On remarque que $Q_{r,a}(s) = s^{a+1}(rs - r - 1) + ((r+1)s - r) < 0$ sur $[0, \frac{r}{r+1}]$. De plus

$$Q'_{r,a}(s) = r(a+2)s^{a+1} - (r+1)(a+1)s^a + r + 1$$

et

$$Q''_{r,a}(s) = (a+1)s^{a-1}(r(a+2)s - (r+1)a) \ .$$

D'où $Q'_{r,a}(0) = r + 1 > 0$, $Q'_{r,a}(1) = 2r - a < 0$ et $Q''_{r,a}(s) < 0$ sur $[0, 1]$. On en déduit que $Q_{r,a}$ a une seule racine s_0 dans $[0, 1[$ et que $s_0 \in]\frac{r}{r+1}, 1[$.

Lemme 3 *On a*

$$\lim_{n\to+\infty} |S_n(1)|^{1/n} = \varphi_{r,a} \tag{9}$$

où

$$\varphi_{r,a} = ((r+1)s_0 - r)^r (r + 1 - rs_0)^{r+1} (1 - s_0)^{a-2r}.$$

De plus, on a l'encadrement

$$0 < \varphi_{r,a} \le \frac{2^{r+1}}{r^{a-2r}}.$$

Nous allons donner une première démonstration en utilisant le Lemme 2, puis une seconde démonstration en utilisant directement la série.

Première démonstration

En vertu de la formule de Stirling,

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{((2r+1)n + 1)!}{n!^{2r+1}} \right)^{1/n} = (2r+1)^{2r+1}.$$

L'expression intégrale (8) et le Lemme 2 impliquent que $\lim\limits_{n\to+\infty} |S_n(1)|^{1/n}$ existe et vaut

$$\varphi_{r,a} = (2r+1)^{2r+1} \max_{(x_1,\ldots,x_{a+1})\in[0,1]^{a+1}} \left(\frac{\prod_{l=1}^{a+1} x_l^r (1 - x_l)}{(1 - x_1 x_2 \cdots x_{a+1})^{2r+1}} \right) > 0.$$

Posons

$$F(x) = F(x_1, \ldots, x_{a+1}) = \frac{\prod_{l=1}^{a+1} x_l^r (1 - x_l)}{(1 - x_1 x_2 \cdots x_{a+1})^{2r+1}}$$

et $f(x) = \log(F(x))$: les extrema de F doivent vérifier pour tout $l \in \{1, \ldots, a+1\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x_l}(x) = \frac{1}{x_l}\left(r - \frac{x_l}{1-x_l} + (2r+1)\frac{x_1x_2\cdots x_{a+1}}{1-x_1x_2\cdots x_{a+1}}\right) = 0$$

Le maximum de F est donc atteint sur la diagonale $x_1 = x_2 = \cdots = x_{a+1}$ et on a

$$\varphi_{r,a} = (2r+1)^{2r+1} \max_{s\in[0,1]}\left(\frac{s^{r(a+1)}(1-s)^{a+1}}{(1-s^{a+1})^{2r+1}}\right).$$

On vérifie que ce maximum est atteint pour $s = s_0$, racine dans $]0,1[$ du polynôme $Q_{r,a}$. De la relation $rs_0^{a+2} - (r+1)s_0^{a+1} + (r+1)s_0 - r = 0$, on déduit que

$$s_0^{a+1} = \frac{(r+1)s_0 - r}{r+1-rs_0}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\varphi_{r,a} &= (2r+1)^{2r+1}\frac{s_0^{r(a+1)}(1-s_0)^{a+1}}{(1-s_0^{a+1})^{2r+1}} \\
&= ((r+1)s_0 - r)^r(r+1-rs_0)^{r+1}(1-s_0)^{a-2r} \\
&\leq \frac{(2r+1)^{r+1}}{(r+1)^{a-r+1}} \leq \frac{(2r+2)^{r+1}}{(r+1)^{a-r+1}} \leq \frac{2^{r+1}}{r^{a-2r}}
\end{aligned}$$

en utilisant l'encadrement $\frac{r}{r+1} < s_0 < 1$.

Deuxième démonstration
Ecrivons $R_n(k) = (k+1)^{-a}\tilde{R}_n(k)$ où

$$\tilde{R}_n(k) = n!^{a-2r}\frac{(k-rn+1)_{rn}(k+n+2)_{rn}}{(k+2)_n^a}.$$

Puisque $\tilde{R}_n(k) = 0$ pour $0 \leq k \leq rn-1$ et que $r < a/2$, on voit facilement qu'il existe $c = c(a,r) > 0$ tel que

$$\max_{k\geq 0}\tilde{R}_n(k) = \max_{rn\leq k\leq cn}\tilde{R}_n(k).$$

Notons M_n ce maximum : comme $\sum\limits_{k\geq rn}(k+1)^{-a} < 1$ et $\tilde{R}_n(k) \geq 0$, on a

$$\frac{1}{(cn)^a}M_n \leq S_n(1) \leq M_n.$$

Il suffit donc de montrer que $M_n^{1/n}$ converge vers $\varphi_{r,a}$. La formule de Stirling montre que pour $rn \leq k \leq cn$

$$\tilde{R}_n(k) = \rho_n(k) \frac{k^{k(a+1)}(k+(r+1)n)^{k+(r+1)n} n^{n(a-2r)}}{(k+n)^{(k+n)(a+1)}(k-rn)^{k-rn}}$$

où $\rho_n(k)^{1/n}$ tend vers 1. Posons

$$\tilde{F}(x) = \frac{x^{x(a+1)}(x+r+1)^{x+r+1}}{(x+1)^{(x+1)(a+1)}(x-r)^{x-r}}.$$

Alors

$$\max_{x\in[r,c]} \tilde{F}(x) = \lim_{n\to+\infty} \max_{rn\leq k\leq cn} \tilde{F}\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} M_n^{1/n}.$$

De plus, on peut choisir c de telle sorte que $\max\limits_{x\in[r,c]} \tilde{F}(x) = \max\limits_{x\in[r,+\infty[} \tilde{F}(x)$.
Donc

$$\lim_{n\to+\infty} |S_n(1)|^{1/n} = \max_{x\in[r,+\infty[} \tilde{F}(x).$$

Un calcul montre que $\max\limits_{x\in[r,+\infty[} \tilde{F}(x) = \tilde{F}(x_0)$ où $x_0 = s_0/(1-s_0)$, et que $\tilde{F}(x_0) = \varphi_{r,a}$.

Notons enfin que la majoration $\varphi_{r,a} \leq 2^{r+1}/r^{a-2r}$ découle immédiatement de l'inégalité $k+(r+1)n < 2^{1+1/r}k$ pour $k > rn$. En effet, pour $k > rn$ on a

$$\tilde{R}_n(k) < n^{(a-2r)n} \frac{k^{rn}(2^{1+1/r}k)^{rn}}{k^{an}} = \left(2^{r+1}\left(\frac{n}{k}\right)^{a-2r}\right)^n < \left(\frac{2^{r+1}}{r^{a-2r}}\right)^n.$$

Lemme 4 *Pour tout* $l \in \{0,\ldots,a\}$,

$$\limsup_{n\to+\infty} |P_{l,n}(1)|^{1/n} \leq 2^{a-2r}(2r+1)^{2r+1}. \qquad (10)$$

Démonstration
Si $l \in \{1,\ldots,a\}$, il suffit de majorer les coefficients $c_{l,j,n}$ puisque $P_{l,n}(1) = \sum_{j=0}^n c_{l,j,n}$. Pour cela on utilise la formule de Cauchy :

$$c_{l,j,n} = \frac{1}{2i\pi}\int_{|z+j+1|=1/2} R_n(z)(z+j+1)^{l-1}\mathrm{d}z$$

où $|z+j+1| = 1/2$ désigne le cercle de centre $-j-1$ et de rayon $1/2$. Sur ce cercle, on a

$$|(z-rn+1)_{rn}| \leq (j+2)_{rn} \ ,$$

$$|(z+n+2)_{rn}| \leq (n-j+2)_{rn} \ ,$$

$$\text{et} \ \ |(z+1)_{n+1}| \geq 2^{-3}(j-1)!(n-j-1)!\ .$$

En posant $\mu_{n,j,a} = (j(n-j))^a 8^a$, on a alors

$$\begin{aligned}
&|c_{l,j,n}| \\
&\quad \leq \frac{(rn+j+1)!}{(j+1)!(j!(n-j)!)^r} \cdot \frac{((r+1)n-j+1)!}{(n-j+1)!(j!(n-j)!)^r} \cdot \left(\frac{n!}{j!(n-j)!}\right)^{a-2r} \cdot \mu_{n,j,a} \\
&\quad \leq (2r+1)^{(2r+1)n+2} 2^{(a-2r)n} (2n^2)^a
\end{aligned}$$

en remarquant que les coefficients multinômiaux

$$\frac{(rn+j+1)!}{(j+1)!(j!(n-j)!)^r} \quad \text{et} \quad \frac{((r+1)n-j+1)!}{(n-j+1)!(j!(n-j)!)^r}$$

sont majorés respectivement par $(2r+1)^{rn+j+1}$ et $(2r+1)^{(r+1)n-j+1}$. On a donc

$$\limsup_{n\to+\infty} |P_{l,n}(1)|^{1/n} \leq 2^{a-2r}(2r+1)^{2r+1}.$$

Il nous reste à majorer $P_{0,n}(1)$, dont on a déterminé l'expression (2)

$$P_{0,n}(1) = -\sum_{l=1}^{a}\sum_{j=1}^{n} c_{l,j,n} \sum_{k=0}^{j-1} \frac{1}{(k+1)^l}.$$

Comme

$$\sum_{k=0}^{j-1} \frac{1}{(k+1)^l} \leq \sum_{k=0}^{j-1} \frac{1}{k+1} \leq j \leq n$$

on a bien là aussi

$$\limsup_{n\to+\infty} |P_{0,n}(1)|^{1/n} \leq 2^{a-2r}(2r+1)^{2r+1}.$$

Lemme 5 *On pose* $d_n = \mathrm{ppcm}(1, 2, \ldots, n)$. *Alors pour* $l \in \{0, \ldots, a\}$

$$d_n^{a-l} P_{l,n}(z) \in \mathbb{Z}\,[z]. \tag{11}$$

Démonstration
L'évaluation du dénominateur des coefficients $c_{l,j,n}$ repose sur une réécriture de $R_n(t)$. Fixons les entiers n et j. On décompose alors le numérateur de $R_n(t)$ en $2r$ produits de n facteurs consécutifs :

$$R_n(t)(t+j+1)^a = \left(\prod_{l=1}^{r} F_l(t)\right) \times \left(\prod_{l=1}^{r} G_l(t)\right) \times H(t)^{a-2r}$$

où pour $l \in \{1, \ldots, r\}$,

$$F_l(t) = \frac{(t-nl+1)_n}{(t+1)_{n+1}}(t+j+1)\,, \qquad G_l(t) = \frac{(t+nl+2)_n}{(t+1)_{n+1}}(t+j+1)\,,$$

$$H(t) = \frac{n!}{(t+1)_{n+1}}(t+j+1).$$

Décomposons $F_l(t)$, $G_l(t)$ et $H(t)$ en fractions partielles :

$$F_l(t) = 1+\sum_{\substack{p=0\\p\neq j}}^{n} \frac{(j-p)f_{p,l}}{t+p+1}\,,\ G_l(t) = 1+\sum_{\substack{p=0\\p\neq j}}^{n} \frac{(j-p)g_{p,l}}{t+p+1}\,,\ H(t) = \sum_{\substack{p=0\\p\neq j}}^{n} \frac{(j-p)h_p}{t+p+1}$$

où

$$\begin{aligned} f_{p,l} &= \frac{(-p-nl)_n}{\displaystyle\prod_{\substack{h=0\\p\neq p}}^{n}(-p+h)} \\ &= \frac{(-1)^n((l-1)n+p+1)_n}{(-1)^p p!(n-p)!} = (-1)^{n-p}\binom{nl+p}{n}\binom{n}{p} \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{p,l} &= \frac{(-p+nl+1)_n}{\displaystyle\prod_{\substack{h=0\\p\neq p}}^{n}(-p+h)} \\ &= \frac{(-1)^p((l+1)n-p)!}{(nl-p)!p!(n-p)!} = (-1)^p\binom{n(l+1)-p}{n}\binom{n}{p} \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

et

$$h_p = \frac{n!}{\displaystyle\prod_{\substack{h=0\\p\neq p}}^{n}(-p+h)} = \frac{(-1)^p n!}{p!(n-p)!} = (-1)^p\binom{n}{p} \in \mathbb{Z}\,.$$

On a alors pour tout entier $\lambda \geq 0$:

$$(D_\lambda F_l(t))_{|t=-j-1} = \delta_{0,\lambda} + \sum_{\substack{p=0\\p\neq j}}^{n}(-1)^\lambda \frac{(j-p)f_{p,l}}{(p-j)^{\lambda+1}}\,,$$

$$(D_\lambda G_l(t))_{|t=-j-1} = \delta_{0,\lambda} + \sum_{\substack{p=0\\p\neq j}}^{n}(-1)^\lambda \frac{(j-p)g_{p,l}}{(p-j)^{\lambda+1}}\,,$$

$$(D_\lambda H(t))_{|t=-j-1} = \sum_{\substack{p=0\\p\neq j}}^{n} (-1)^\lambda \frac{(j-p)h_p}{(p-j)^{\lambda+1}}$$

avec $\delta_{0,\lambda} = 1$ si $\lambda = 0$, $\delta_{0,\lambda} = 0$ si $\lambda > 0$. On a donc montré que

$$d_n^\lambda (D_\lambda F_l)_{|t=-j-1}\ , \quad d_n^\lambda (D_\lambda G_l)_{|t=-j-1} \quad \text{et} \quad d_n^\lambda (D_\lambda H_l)_{|t=-j-1}$$

sont des entiers pour tout $\lambda \in \mathbb{N}$. Grâce à la formule de Leibniz

$$D_{a-l}(R(t)(t+j+1)^a) = \\ \sum_{\mu} (D_{\mu_1} F_1) \cdots (D_{\mu_r} F_r)(D_{\mu_{r+1}} G_1) \cdots (D_{\mu_{2r}} G_r)(D_{\mu_{2r+1}} H) \cdots (D_{\mu_a} H)$$

(où la somme est sur tous les multi-indices $\mu \in \mathbb{N}^a$ tels que $\mu_1 + \cdots + \mu_a = a - l$), on en déduit alors que $d_n^{a-l} c_{l,j,n} \in \mathbb{Z}$ et donc que $d_n^{a-l} P_{l,n}(z) \in \mathbb{Z}[z]$.

3 Irrationalité d'une infinité de ζ impairs

Nous appliquons le critère suivant pour démontrer la Proposition 1 ci-dessous. Les Théorèmes 1 et 2 sont des conséquences de cette Proposition.

Critère d'indépendance linéaire de Nesterenko
Considérons N réels $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N$ ($N \geq 2$) et supposons qu'il existe N suites $(p_{l,n})_{n\geq 0}$ tels que :
(i) $\forall l \in \{1, \ldots, N\}$, $p_{l,n} \in \mathbb{Z}$ *;*

(ii) $\alpha_1^{n+o(n)} \leq |\sum_{l=1}^{N} p_{l,n}\theta_l| \leq \alpha_2^{n+o(n)}$ *avec* $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 < 1$ *;*

(iii) $\forall l \in \{1, \ldots, N\}$, $|p_{l,n}| \leq \beta^{n+o(n)}$ *avec* $\beta > 1$.

Dans ces conditions,

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}\,\theta_1 + \mathbb{Q}\,\theta_2 + \cdots + \mathbb{Q}\,\theta_N) \geq \frac{\log(\beta) - \log(\alpha_1)}{\log(\beta) - \log(\alpha_1) + \log(\alpha_2)}.$$

Proposition 1 *Soit a un entier impair ≥ 3. Pour tout entier r tel que $1 \leq r < a/2$, on a la minoration*

$$\delta(a) \geq \frac{(a-2r)\log(2) + (2r+1)\log(2r+1) - \log(\varphi_{r,a})}{a + (a-2r)\log(2) + (2r+1)\log(2r+1)} \tag{12}$$

où

$$\varphi_{r,a} = ((r+1)s_0 - r)^r (r+1-rs_0)^{r+1}(1-s_0)^{a-2r}$$

et s_0 est l'unique racine dans $]0,1[$ du polynôme $Q(s) = rs^{a+2} - (r+1)s^{a+1} + (r+1)s - r$. En particulier

$$\delta(a) \geq \frac{\log(r) + \frac{a-r}{a+1}\log(2)}{1 + \log(2) + \frac{2r+1}{a+1}\log(r+1)} \tag{13}$$

Démonstration
Notons tout d'abord que d'après le Théorème des nombres premiers,

$$d_n = e^{n+o(n)}. \tag{14}$$

Définissons pour tout entier $n \geq 0$, $\ell_n = d_{2n}^a S_{2n}(1)$,

$$p_{0,n} = d_{2n}^a P_{0,2n}(1) \text{ et } p_{l,n} = d_{2n}^a P_{2l+1,2n}(1) \text{ pour } l \in \{1, \ldots, (a-1)/2\}.$$

(5) montre que ℓ_n est une combinaison linéaire en les ζ impairs :

$$\ell_n = p_{0,n} + \sum_{l=1}^{(a-1)/2} p_{l,n}\zeta(2l+1). \tag{15}$$

(11) montre que pour tout $l \in \{0, \ldots, (a-1)/2\}$ et pour tout $n \geq 0$, $p_{l,n} \in \mathbb{Z}$.
(9) et (14) montrent que

$$\log|\ell_n| = 2n\log(\kappa) + o(n) \quad \text{avec} \quad \kappa = e^a\varphi_{r,a}.$$

Enfin, (10) et (14) impliquent que pour tout $l \in \{0, \ldots, (a-1)/2\}$:

$$\log|p_{l,n}| \leq 2n\log(\tau) + o(n) \quad \text{avec} \quad \tau = e^a 2^{a-2r}(2r+1)^{2r+1}.$$

On peut donc appliquer le critère de Nesterenko avec $N = (a+1)/2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \kappa^2$ et $\beta = \tau^2$:

$$\begin{aligned}\delta(a) \geq & \frac{\log(\tau) - \log(\kappa)}{\log(\tau)} \\ & = \frac{(a-2r)\log(2) + (2r+1)\log(2r+1) - \log(\varphi_{r,a})}{a + (a-2r)\log(2) + (2r+1)\log(2r+1)}.\end{aligned}$$

En utilisant la majoration $\varphi_{r,a} \leq 2^{r+1}/r^{a-2r}$ donnée au Lemme 3 et l'encadrement $2r \leq 2r+1 \leq 2(r+1)$, on obtient l'inégalité (13).

Démonstration du Théorème 2
On choisit $a = 169$ et $r = 10$ dans la Proposition 1 : un calcul par ordinateur montre que

$$s_0 \approx 0,90909093 \quad \text{et} \quad \log(\varphi_{10,169}) \approx -505,73453$$

d'où $\delta(169) > 2,001$. Il existe donc deux entiers impairs j et k tels que $3 \leq j,k \leq 169$ et 1, $\zeta(j)$ et $\zeta(k)$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. L'irrationalité de $\zeta(3)$ nous permet de supposer $k = 3$, ce qui prouve le Théorème 2.

Démonstration du Théorème 1

Supposons a impair. Nous allons distinguer plusieurs cas :

- $3 \leq a \leq 167 < e^6$: le Théorème d'Apéry donne $\delta(3) \geq 2$, d'où $\delta(a) \geq 2 \geq \frac{1}{3}\log(a)$.
- $169 \leq a \leq 8.10^3 - 1 < e^9$: le Théorème 2 donne $\delta(169) \geq 3$ d'où $\delta(a) \geq 3 \geq \frac{1}{3}\log(a)$.
- $8.10^3 + 1 \leq a \leq 10^5 - 1 < e^{12}$: la Proposition 1 (avec $r = 200$) donne $\delta(8.10^3 + 1) > 3$ d'où $\delta(a) \geq 4 \geq \frac{1}{3}\log(a)$.
- $10^5 + 1 \leq a \leq 10^6 - 1 < e^{15}$: la Proposition 1 (avec $r = 600$) donne $\delta(10^5 + 1) > 4$ d'où $\delta(a) \geq 5 \geq \frac{1}{3}\log(a)$.
- $a \geq 10^6 + 1$: on choisit $r = [a^{3/5} + 1] < a/2$ dans la proposition 1. On obtient
$$\delta(a) \geq \frac{3}{5c(a)}\log(a)$$
où $c(a) = 1+\log(2)+\frac{2a^{3/5}+3}{a+1}\log(a^{3/5}+1)$ est décroissante et $c(10^6+1) < 9/5$. Donc là aussi $\delta(a) \geq \frac{1}{3}\log(a)$.

Montrons maintenant la deuxième partie : on choisit pour cela $r = r(a)$ comme l'entier $< a/2$ le plus proche de $a(\log(a))^{-2}$. On a alors

$$\log(r) + \frac{a-r}{a+1}\log(2) = (1 + o(1))\log(a)$$

et

$$1 + \log(2) + \frac{2r+1}{a+1}\log(r+1) = 1 + \log(2) + o(1).$$

D'où

$$\delta(a) \geq \frac{(1 + o(1))\log(a)}{1 + \log(2) + o(1)}$$

ce qui prouve le Théorème 1.

Références

[1] R. Apéry, *Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$*, Astérisque **61**, 11-13 (1979).

[2] F. Beukers, *A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$*, Bull. London. Math. Soc. **11**, no. 33, 268-272 (1978).

[3] F. Beukers, *The values of Polylogarithms*, "Topics in classical number theory", 219-228, Colloq. Math. Soc. János Bolyai, Budapest (1981).
[4] F. Beukers, *Padé approximations in Number Theory* dans "Padé approximation and its applications", Amsterdam 1980, LNM 888, 90-99, Springer (1981).
[5] F. Beukers, *Irrationality proofs using modular forms*, Journées arithmétiques de Besançon (Besançon, 1985). Astérisque No. 147-148 (1987).
[6] H. Cohen, *Démonstration de l'irrationalité de* $\zeta(3)$ *(d'après Apéry)*, Séminaire de Théorie des Nombres de Grenoble, VI.1-VI.9 (1978).
[7] R. Dvornicich and C. Viola, *Some remarks on Beukers' integrals*, dans Number Theory, Vol. II, 637-657, Budapest (1987). Colloq. Math. Soc. János Bolyai, 51, Budapest.
[8] L.A. Gutnik, *The irrationality of certain quantities involving* $\zeta(3)$, Russ. Math. Surv. **34**, no. 3, 200 (1979). En russe dans Acta Arith. **42**, no. 3, 255-264 (1983).
[9] M. Hata, *A new irrationality measure for* $\zeta(3)$, Acta. Arith. **92**, no. 1, 47-57.
[10] Y.V. Nesterenko, *On the linear independence of numbers*, Mosc. Univ. Math. Bull. **40**, no. 1, 69-74 (1985) traduction de Vest. Mosk. Univ., Ser. I, no. 1, 46-54 (1985).
[11] Y.V. Nesterenko, *A few remarks on* $\zeta(3)$, Math. Notes, **59**, no. 6, 625-636 (1996).
[12] E.M. Nikishin, *On the irrationality of the values of the functions* $F(x, s)$, Mat. Sbornik **37**, no. 3, 381-388 (1979).
[13] M. Prévost, *A new proof of the irrationality of* $\zeta(3)$ *using Padé approximants*, J. Comput. Appl. Math. **67**, 219-235 (1996).
[14] E. Reyssat, *Irrationalité de* $\zeta(3)$*, selon Apéry*, Séminaire Delange-Pisot-Poitou, 20ème année (1978-1979), exposé no. 6, 6pp.
[15] E. Reyssat, *Mesures de transcendance pour les logarithmes de nombres rationnels*, "Approximations diophantiennes et nombres transcendants", Luminy 1982, 235-245, Progress in Mathematics, Birkhäuser (1983).
[16] G. Rhin and C. Viola, *The group structure for* $\zeta(3)$, Acta Arith. **97**, 269-293 (2001).
[17] L.J. Slater, *Generalized Hypergeometric Functions*, Cambridge University Press (1966).
[18] V.N. Sorokin, *A transcendence measure for* π^2, Mat. Sbornik **187**, no. 12, 1819-1852 (1996).
[19] V.N. Sorokin, *Apéry's Theorem*, Mosc. Univ. Math. Bull. **53** , no. 3, 48-52 (1998).
[20] A. Van der Poorten, *A proof that Euler missed... Apéry's proof of the irrationality of* $\zeta(3)$, Math. Intellig. **1**, 195-203, 1979.
[21] D.V. Vasilyev, *On small linear forms for the values of the Riemann zeta function at odd integers*, soumis Dokl. Nat. Acad. Sci. of Belarus.

Keith M. Ball,
Department of Mathematics, UCL
Gower Street, London WC1E 6BT.
kmb@math.ucl.ac.uk

Tanguy Rivoal,
Laboratoire SDAD, CNRS FRE 2271,
Département de Mathématiques,
Université de Caen,
Campus II, BP 186, F-14032 Caen cédex.
rivoal@math.unicaen.fr