Линейные формы от дзета-значений, возникающие из интегралов типа Сорокина

Т. РИВОАЛЬ
Университет им. Ж. Фурье (Гренобль-1), Франция
e-mail: rivoal@ujf-grenoble.fr

УДК 511.4

Ключевые слова: дзета-значения, линейные формы, кратные интегралы.

Аннотация

В работе рассматриваются некоторые кратные интегралы, которые представляются в виде линейных комбинаций дзета-значений с рациональными коэффициентами.

Abstract

T. Rivoal, Linear forms in zeta values arising from certain Sorokin-type integrals, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 5, pp. 1—12.

The paper is devoted to certain multiple integrals which can be represented as from in zeta-values with rational coefficients.

1. Формулировка результата

Для некоторых фиксированных целых чисел $n \geqslant 0$ и $s \geqslant 3$ определим *интеграл типа Сорокина*:

$$I_n(s) := \int\limits_{[0,1]^s} \frac{\prod\limits_{j=1}^{s} z_j^n (1-z_j)^n}{\prod\limits_{j=2}^{s} (1 - z_1 z_2 \cdots z_j)^{n+1}} \, \mathrm{d}z_1 \ldots \mathrm{d}z_s.$$

В. Н. Сорокин доказал в [6], что

$$I_n(3) = a_n \zeta(3) + b_n \in \mathbb{Q}\zeta(3) + \mathbb{Q}, \tag{1.1}$$

где a_n и b_n есть в точности последовательности, полученные Р. Апери [7] при доказательстве иррациональности $\zeta(3)$. Его метод состоит в решении подходящей проблемы аппроксимации Паде и с трудом поддаётся обобщениям.

В настоящей статье мы получим обобщение (1.1) совершенно другим методом. Как обычно, мы полагаем $\mathrm{d}_n := \text{НОК}\{1, 2, \ldots, n\}$.

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 5, с. 1—12.

Теорема 1. *Для любых фиксированных целых чисел $n \geqslant 0$ и $s \geqslant 3$ существуют $s-1$ последовательностей рациональных чисел $(p_{j,n,s})_{n\geqslant 0}$, $j = 0, 3, \ldots, s$, таких что*

$$I_n(s) = p_{0,n,s} + \sum_{j=3}^{s} p_{j,n,s}\zeta(j) \in \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\zeta(3) + \mathbb{Q}\zeta(4) + \ldots + \mathbb{Q}\zeta(s).$$

Кроме того, $\mathrm{d}_n^{s-j} p_{j,n,s} \in \mathbb{Z}$ для любого j.

Заметим, что коэффициент при $\zeta(2)$ априори равен нулю. Хотя это нетривиальный факт, совершенно не ясно, какие новые диофантовы результаты могут быть получены из этой теоремы. Тем не менее она представляет определённый интерес по следующим причинам. В [3, 12] доказано, что интегралы типа Сорокина могут быть представлены в виде линейной формы с рациональными коэффициентами от кратных дзета-значений. Предполагается, что эти формы в общем случае не могут быть сведены к линейным формам от (однократных) дзета-значений (значений дзета-функции Римана в натуральных точках). Например, рассмотрим следующий интеграл типа Сорокина:

$$U_n = \int\limits_{[0,1]^5} \frac{\prod\limits_{j=1}^{5} z_j^n (1-z_j)^n}{(1-z_1z_2z_3)^{n+1}(1-z_1z_2z_3z_4z_5)^{n+1}}\, \mathrm{d}z_1 \ldots \mathrm{d}z_5.$$

При $n = 0$ $U_0 = \zeta(3,2) = -11\zeta(5)/2 + 3\zeta(2)\zeta(3)$, а при $n = 1, 2, 3$ U_n — линейная форма с рациональными коэффициентами от $\zeta(2)$, $\zeta(3)$, $\zeta(4)$, $\zeta(5)$, $\zeta(2,2)$ и $\zeta(3,2)$. Но согласно предположению Гончарова—Загира $\zeta(3,2)$ и U_n не являются линейными формами с рациональными коэффициентами от дзета-значений.

Таким образом, $I_n(s)$ представляется в таком виде, можно сказать, случайно. Однако это не единственная случайность. Действительно, обобщения Д. В. Васильева [1] знаменитых интегралов Ф. Бёкерса [9] могут быть выражены через интегралы типа Сорокина и благодаря теореме Зудилина [25] также являются линейными комбинациями очень особого вида от значений дзета-функции: в них могут появляться только нечётные или только чётные дзета-значения в зависимости от чётности размерности интеграла. Эти «дихотомические» линейные формы совпадают с линейными формами, построенными в [8, 22] для доказательства бесконечности числа линейно независимых нечётных дзета-значений. Таким образом, подобные интегралы очень полезны при изучении диофантовой природы кратных дзета-значений, и представляется крайне интересным найти другие семейства интегралов, выражение которых в виде линейных форм от кратных дзета-значений имеет особые свойства. Для этого может быть полезна эффективная реализация [13] в системе компьютерной алгебры PARI/GP алгоритма, описанного в [12]. Действительно, теорема 1 была буквально угадана с помощью применения этого алгоритма к ряду $S_n(s)$, определённого ниже в (1.2), для некоторых s и n. В [11, 15] даны другие примеры кратных рядов, свойства которых изначально были обнаружены экспериментально.

Доказательство теоремы 1 непрямое и будет получено с помощью последовательных упрощений. Положим по определению

$$(\alpha)_0 := 1, \quad (\alpha)_m := \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+m-1) \ \text{ при } \ m \geqslant 1.$$

Отныне, если не оговорено противное, мы предполагаем, что целые числа n и s удовлетворяют неравенствам $n \geqslant 0$ и $s \geqslant 3$.

1. Сначала, используя общее разложение интегралов типа Сорокина в кратные ряды, доказанное в [12, с. 11, 12, предложение 1], мы получаем, что

$$I_n(s) = n! \sum_{k_1 \geqslant k_2 \geqslant \ldots \geqslant k_{s-1} \geqslant 1} \frac{(k_1-k_2+1)_n}{(k_1)_{n+1}^2} \prod_{j=2}^{s-1} \frac{(k_j-k_{j+1}+1)_n}{(k_j)_{n+1}} =: S_n(s), \tag{1.2}$$

   где по договорённости $k_s = n+1$.
2. Следующий факт менее очевиден. Мы также имеем

$$S_n(s) = \int\limits_{[0,1]^s} \frac{\prod_{j=1}^{s} z_j^n (1-z_j)^n}{(1-(1-z_1\cdots z_{s-1})z_s)^{n+1}} \,\mathrm{d}z_1 \ldots \mathrm{d}z_s =: J_n(s), \tag{1.3}$$

   откуда следует, что $I_n(s) = J_n(s)$.
3. Далее заменой переменных и n-кратным интегрированием по частям мы доказываем, что

$$J_n(s) = -\int\limits_{[0,1]^{s-1}} \frac{P_n(z_1)P_n(z_2)\prod_{j=3}^{s-1}(1-z_j)^n}{1-z_1\cdots z_{s-1}} \times$$
$$\times \log(z_1\cdots z_{s-1})\,\mathrm{d}z_1 \ldots \mathrm{d}z_{s-1} =: B_n(s), \tag{1.4}$$

   где $P_n(x) = (x^n(1-x)^n)^{(n)}/n!$ обозначает n-й многочлен Лежандра на $[0,1]$ и где при $s=3$ величина пустого произведения полагается равной 1.
4. От $B_n(s)$ мы совершим последний переход

$$B_n(s) = -n!^{s-3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial k} \left(\frac{(k-n)_n^2}{(k)_{n+1}^{s-1}} \right) =: D_n(s) \tag{1.5}$$

   с помощью процесса, использованного автором в [24] для доказательства того, что (1.5) справедливо при $s=3$.
5. Наконец, $D_n(s)$ может быть представлено в виде линейной формы от дзета-значений, скажем $Z_n(s)$, которая имеет вид, указанный в теореме 1.

Таким образом, мы получили цепочку нетривиальных равенств

$$I_n(s) = S_n(s) = J_n(s) = B_n(s) = D_n(s) = Z_n(s), \tag{1.6}$$

и $I_n(s) = Z_n(s)$ в точности выражает содержание теоремы 1. Заметим, что при $s = 3$ цепочка (1.6) хорошо известна: равенства $I_n(3) = Z_n(3)$, $J_n(3) = B_n(3) = Z_n(3)$ и $D_n(3) = Z_n(3)$ более или менее подробно доказаны в [6], [9] и [2, 5, 10] соответственно. Доказательство равенства $I_n(3) = J_n(3)$ было независимо получено в [14] и [4].

2. Обобщения Нестеренко и Рена—Виолы и дальнейшие проблемы

Было бы интересно получить более прямое доказательство равенства $I_n(s) = Z_n(s)$ и обобщить его на случай разных показателей степени, т. е. рассмотреть интегралы

$$I_{\underline{l},\underline{m},\underline{n}}(s) := \int\limits_{[0,1]^s} \frac{\prod_{j=1}^{s} z_j^{n_j}(1-z_j)^{m_j}}{\prod_{j=2}^{s}(1-z_1z_2\cdots z_j)^{l_j+1}}\,\mathrm{d}z_1\ldots\mathrm{d}z_s$$

с подходящими целыми параметрами $l_j, m_j, n_j \geqslant 0$. Независимо от автора Ж. Рен и К. Виола [21] недавно смогли с помощью остроумной замены переменных* доказать, что при определённых условиях имеет место соотношение

$$I_{\underline{l},\underline{m},\underline{n}}(s) = J_{l',\underline{m}',\underline{n}'}(s) \in \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\zeta(2) + \mathbb{Q}\zeta(3) + \mathbb{Q}\zeta(4) + \ldots + \mathbb{Q}\zeta(s),$$

где

$$J_{l',\underline{m}',\underline{n}'}(s) := \int\limits_{[0,1]^s} \frac{\prod_{j=1}^{s} z_j^{n'_j}(1-z_j)^{m'_j}}{(1-(1-z_1\cdots z_{s-1})z_s)^{l'+1}}\,\mathrm{d}z_1\ldots\mathrm{d}z_s \tag{2.1}$$

представляет собой соответствующее обобщение нашего $J_n(s)$ и l', m'_j, n'_j зависят от l_j, m_j, n_j. Неясно, когда можно убрать $\zeta(2)$ (даже при $s = 3$ это не всегда возможно для произвольных показателей степеней, см. [20]): в общем случае шаг 3 можно совершить не всегда, поскольку трюк с «n-кратным интегрированием по частям» не всегда работает для произвольного интеграла $J_{l',\underline{m}',\underline{n}'}(s)$. Следовательно, *узконаправленные* методы Рена—Виолы, развитые в [19, 20], чтобы избежать этой сложности, могут быть полезны для определения естественных ограничений на l_j, m_j, n_j, при которых некоторые коэффициенты при дзета-значениях в разложении $I_{\underline{l},\underline{m},\underline{n}}(s)$ равны 0.

Необходимо также упомянуть, что функциональная версия (с переменной, скажем, x) интеграла (2.1) впервые была изучена Ю. В. Нестеренко [18]. Он доказал, что данный интеграл равен комплексному интегралу типа Барнса

*Наше доказательство равенства $I_n(s) = J_n(s)$ не использует замены переменных. Вместо этого мы следуем методу С. А. Злобина [4]. Мы не пытались убедиться, что общее тождество Рена—Виолы $I_{\underline{l},\underline{m},\underline{n}}(s) = J_{l',\underline{m}',\underline{n}'}(s)$ также может быть доказано этим способом, но, в принципе, проверить это несложно.

(см. [18, с. 547, теорема 2]) при определённых условиях на коэффициенты, из чего он вывел представление в виде линейной формы от полилогарифмов от x. Приравняв x к 1, он получил линейные формы от 1, $\zeta(3)$, $\zeta(4)$ и т. д. Следовательно, как только мы докажем, что «наши» интегралы $I_n(s)$ и $J_n(s)$ равны, мы сможем применить теоремы Ю. В. Нестеренко для завершения доказательства. Наш подход представляется нам интересным потому, что он проще, чем метод Ю. В. Нестеренко, и потому, что он помогает по-новому посмотреть на эти задачи.

Другой подход к выражению $I_{\underline{l},\underline{m},\underline{n}}(s)$ в терминах дзета-значений может быть следующим. Заметим, что тождество $S_n(s) = D_n(s)$ связывает кратный гипергеометрический ряд с «дифференцированным» гипергеометрическим рядом. Оно, таким образом, похоже на предельные случаи тождества Эндрюса, которые были рассмотрены в [16] для получения нового доказательства упомянутой выше теоремы Зудилина. Эти тождества связывают кратный гипергеометрический ряд с вполне уравновешенным гипергеометрическим рядом. Хотя, строго говоря, $D_n(s)$ не является гипергеометрическим рядом, из [17, гл. 16] можно позаимствовать трюк, позволяющий взглянуть на $D_n(3)$ как на предельный случай линейной комбинации двух гипергеометрических рядов. Поэтому представляется разумным ожидать существования тождества, связывающего $S_{\underline{l},\underline{m},\underline{n}}(s)$ (т. е. кратный интеграл, «тривиально» равный $I_{\underline{l},\underline{m},\underline{n}}(s)$) с подходящим гипергеометрическим рядом, предельным случаем которого будет $D_n(s)$.

3. Доказательство равенства (1.3): $S_n(s) = J_n(s)$

Приведённое ниже доказательство достаточно длинное, но не сложное. Это модификация оригинального метода С. А. Злобина [4] (см. также [16, с. 215, предложение 2]). Положим

$$Q_s(z_1, z_2, \ldots, z_s) = 1 - (1 - z_s z_{s-1} \cdots z_2) z_1 \quad \text{при} \quad s \geqslant 2.$$

Можно немедленно убедиться, что при $s \geqslant 3$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} Q_s(z_1, z_2, \ldots, z_s) &= Q_{s-1}(z_1, \ldots, z_{s-1}) - (1 - z_s) z_{s-1} \cdots z_1 = \\ &= Q_{s-1}(z_1, \ldots, z_{s-1}) \left(1 - \frac{(1 - z_s) z_{s-1} \cdots z_1}{Q_{s-1}(z_1, \ldots, z_{s-1})}\right). \end{aligned}$$

Заметим, что

$$0 \leqslant (1 - z_s) z_{s-1} \cdots z_1 \leqslant Q_{s-1}(z_1, z_2, \ldots, z_{s-1})$$

и второе равенство возможно тогда и только тогда, когда $z_1 = 1$ и $z_2 = z_3 = \ldots = z_s$, т. е. на множестве A меры 0 в $[0,1]^s$. На множестве $[0,1]^s \setminus A$ можно использовать разложение

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{(1-z_s) z_{s-1} \cdots z_1}{Q_{s-1}(z_1, \ldots, z_{s-1})}\right)^{n+1}} = \sum_{l_s=0}^{\infty} \binom{n + l_s}{n} \frac{(1 - z_s)^{l_s} z_{s-1}^{l_s} \cdots z_1^{l_s}}{Q_{s-1}(z_1, \ldots, z_{s-1})^{l_s}}.$$

После умножения этого ряда на

$$\frac{\prod\limits_{j=1}^{s} z_j^n(1-z_j)^n}{Q_{s-1}(z_1,\ldots,z_{s-1})^{n+1}}$$

и интегрирования по $[0,1]^s$ благодаря положительности можно поменять местами суммирование и интегрирование. При $s \geqslant 3$ получаем

$$J_n(s) = \int\limits_{[0,1]^s} \frac{\prod\limits_{j=1}^{s} z_j^n(1-z_j)^n}{Q_{s-1}(z_1,\ldots,z_{s-1})^{n+1}\big(1-\frac{(1-z_s)z_{s-1}\cdots z_1}{Q_{s-1}(z_1,\ldots,z_{s-1})}\big)^{n+1}}\,\mathrm{d}z_1\ldots\mathrm{d}z_s =$$

$$= \sum_{l_s=0}^{\infty}\binom{n+l_s}{n}\int\limits_0^1 z_s^n(1-z_s)^{n+l_s}\mathrm{d}z_s \times$$

$$\times \int\limits_{[0,1]^{s-1}} \frac{\prod\limits_{j=1}^{s-1} z_j^{n+l_s}(1-z_j)^n}{Q_{s-1}(z_1,\ldots,z_{s-1})^{n+l_s+1}}\,\mathrm{d}z_1\ldots\mathrm{d}z_{s-1} =$$

$$= \sum_{l_s=0}^{\infty}\frac{\binom{n+l_s}{n}}{\binom{2n+l_s}{n+l_s}(2n+l_s+1)}\int\limits_{[0,1]^{s-1}} \frac{\prod\limits_{j=1}^{s-1} z_j^{n+l_s}(1-z_j)^n}{Q_{s-1}(z_1,\ldots,z_{s-1})^{n+l_s+1}}\,\mathrm{d}z_1\ldots\mathrm{d}z_{s-1}.$$

Очевидно, этот процесс можно применить к последнему интегралу и получить равенство

$$J_n(s) = \sum_{l_3,\ldots,l_s\geqslant 0}\frac{\binom{n+l_s}{l_s}\binom{n+l_s+l_{s-1}}{l_{s-1}}\cdots\binom{n+l_s+l_{s-1}+\ldots+l_3}{l_3}}{\binom{2n+l_s}{n+l_s}\binom{2n+l_s+l_{s-1}}{n+l_{s-1}}\cdots\binom{2n+l_s+l_{s-1}+\ldots+l_3}{n+l_3}}\times$$

$$\times\frac{1}{(2n+l_s+1)(2n+l_s+l_{s-1}+1)\cdots(2n+l_s+l_{s-1}+\ldots+l_3+1)}\times$$

$$\times\int\limits_{[0,1]^2}\frac{z_1^{n+l_s+\ldots+l_3}(1-z_1)^n z_2^{n+l_s+\ldots+l_3}(1-z_2)^n}{Q_2(z_1,z_2)^{n+l_s+\ldots+l_3+1}}\,\mathrm{d}z_1\,\mathrm{d}z_2.$$

Осталось вычислить двойной интеграл. Для простоты положим

$$m = l_s+\ldots+l_3.$$

Поскольку

$$Q_2(z_1,z_2) = 1-(1-z_1)z_2,$$

то, заменяя z_1 на $1-z_1$, мы находим, что

$$\int\limits_{[0,1]^2} \frac{z_1^{n+m}(1-z_1)^n z_2^{n+m}(1-z_2)^n}{Q_2(z_1,z_2)^{n+m+1}}\,\mathrm{d}z_1\,\mathrm{d}z_2 =$$

$$= \int\limits_{[0,1]^2} \frac{z_1^{n}(1-z_1)^{n+m} z_2^{n+m}(1-z_2)^n}{(1-z_1z_2)^{n+m+1}}\,\mathrm{d}z_1\,\mathrm{d}z_2 =$$

$$= \sum_{l_2=0}^{\infty} \binom{n+m+l_2}{l_2} \int\limits_0^1 z_1^{l_2+n}(1-z_1)^{n+m}\,\mathrm{d}z_1 \int\limits_0^1 z_2^{n+m+l_2}(1-z_1)^n\,\mathrm{d}z_2 =$$

$$= \sum_{l_2=0}^{\infty} \frac{\binom{n+m+l_2}{l_2}}{\binom{2n+m+l_2}{n+l_2}\binom{2n+m+l_2}{n}} \frac{1}{(2n+m+l_2+1)^2}.$$

Тогда

$$J_n(s) = \sum_{l_2,\ldots,l_s\geqslant 0} \frac{\binom{n+l_s}{l_s}\binom{n+l_s+l_{s-1}}{l_{s-1}}\cdots\binom{n+l_s+l_{s-1}+\ldots+l_2}{l_2}}{\binom{2n+l_s}{n+l_s}\binom{2n+l_s+l_{s-1}}{n+l_{s-1}}\cdots\binom{2n+l_s+l_{s-1}+\ldots+l_2}{n+l_2}} \times$$

$$\times \frac{1}{(2n+l_s+1)(2n+l_s+l_{s-1}+1)\cdots(2n+l_s+l_{s-1}+\ldots+l_2+1)} \times$$

$$\times \frac{1}{\binom{n+l_s+l_{s-1}+\ldots+l_2}{n}(2n+l_s+l_{s-1}+\ldots+l_2+1)},$$

а это абсолютно сходящийся ряд.

Теперь сделаем замену индексов $K_j = l_{j+1}+l_{j+2}+\ldots+l_s$ при $j=1,\ldots,s-1$ и получим

$$J_n(s) = \sum_{1\leqslant K_{s-1}\leqslant\ldots\leqslant K_1} \frac{\binom{n+K_{s-1}}{K_{s-1}}\binom{n+K_{s-2}}{K_{s-2}-K_{s-1}}\cdots\binom{n+K_1}{K_1-K_2}}{\binom{2n+K_{s-1}}{n+K_{s-1}}\binom{2n+K_{s-2}}{n+K_{s-2}-K_{s-1}}\cdots\binom{2n+K_1}{n+K_1-K_2}} \times$$

$$\times \frac{1}{(2n+K_{s-1}+1)(2n+K_{s-2}+1)\cdots(2n+K_1+1)} \frac{1}{\binom{n+K_1}{n}(2n+K_1+1)} =$$

$$= n! \sum_{1\leqslant K_{s-1}\leqslant\ldots\leqslant K_1} \frac{(K_{s-1}+1)_n(K_{s-2}-K_{s-1}+1)_n\cdots(K_1-K_2+1)_n}{(K_e+n+1)_{n+1}\cdots(K_2+n+1)_{n+1}(K_1+n+1)_{n+1}^2} =$$

$$= n! \sum_{1\leqslant k_{s-1}\leqslant\ldots\leqslant k_1} \frac{(k_{s-1}-n)_n(k_{s-2}-k_{s-1}+1)_n\cdots(k_1-k_2+1)_n}{(k_{s-1})_{n+1}\cdots(k_2)_{n+1}(k_1)_{n+1}^2} =: S_n(s).$$

В последнем равенстве мы положили $k_j = K_j+n+1$ при $j=1,\ldots,s-1$.

4. Доказательство равенства (1.4): $J_n(s) = B_n(s)$

Мы строго следуем методу Бёкерса (случай $s = 3$ рассмотрен в [9]). Имеем

$$\frac{\log(z_1 \cdots z_{s-1})}{1 - z_1 \cdots z_{s-1}} = -\int_0^1 \frac{\mathrm{d}w}{(1 - z_1 \cdots z_{s-1})w},$$

и следовательно,

$$B_n(s) := -\int\limits_{[0,1]^s} \frac{P_n(z_1)P_n(z_2)\prod_{j=3}^{s-1}(1-z_j)^n}{1 - z_1 \cdots z_{s-1}} \log(z_1 \cdots z_{s-1})\,\mathrm{d}z_1 \ldots \mathrm{d}z_{s-1} =$$

$$= \int\limits_{[0,1]^s} \frac{P_n(z_1)P_n(z_2)\prod_{j=3}^{s-1}(1-z_j)^n}{1 - (1 - z_1 \cdots z_{s-1})w}\,\mathrm{d}z_1 \ldots \mathrm{d}z_{s-1}\,\mathrm{d}w.$$

Мы n раз интегрируем по частям выражение в последнем интеграле относительно z_1. Получаем

$$B_n(s) = (-1)^n \int\limits_{[0,1]^s} \frac{z_1^n(1-z_1)^n z_2^n P_n(z_2)\prod_{j=3}^{s-1} z_j^n(1-z_j)^n}{(1 - (1 - z_1 \cdots z_{s-1})w)^{n+1}}\,\mathrm{d}z_1 \ldots \mathrm{d}z_{s-1}\,\mathrm{d}w.$$

Замена переменной $z_s = (1-w)/(1 - (1 - z_1 \cdots z_{s-1})w)$ даёт

$$B_n(s) = (-1)^n \int\limits_{[0,1]^s} \frac{(1-z_1)^n P_n(z_2)\prod_{j=3}^{s-1}(1-z_j)^n}{1 - (1 - z_1 \cdots z_{s-1})z_s}\,\mathrm{d}z_1 \ldots \mathrm{d}z_{s-1}\,\mathrm{d}z_s.$$

Наконец, n раз интегрируя по частям относительно z_2, получаем

$$B_n(s) = \int\limits_{[0,1]^s} \frac{\prod_{j=1}^{s} z_j^n(1-z_j)^n}{(1 - (1 - z_1 \cdots z_{s-1})z_s)^{n+1}}\,\mathrm{d}z_1 \ldots \mathrm{d}z_s =: J_n(s),$$

что и требовалось.

5. Доказательство равенства (1.5): $B_n(s) = D_n(s)$

Как и в предыдущем разделе, мы начинаем с альтернативного выражения для $\log(z_1 \cdots z_{s-1})/(1 - z_1 \cdots z_{s-1})$. Однако, чтобы избежать технических сложностей, мы вводим комплексный параметр x, такой что $|x| < 1$, а в конце доказательства положим $x \to 1$. Альтернативное выражение, которое мы будем использовать, имеет следующий вид:

$$\frac{\log(z_1\cdots z_{s-1})}{1-xz_1\cdots z_{s-1}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{(z_1\cdots z_{s-1})^t}{1-xz_1\cdots z_{s-1}}\right)\bigg|_{t=0}.$$

Более того, когда все z_j принадлежат $[0,1]$, можно воспользоваться разложением

$$\frac{1}{1-xz_1\cdots z_{s-1}} = \sum_{k=1}^{\infty}(xz_1\cdots z_{s-1})^{k-1}$$

и получить, что

$$\frac{\log(z_1\cdots z_{s-1})}{1-xz_1\cdots z_{s-1}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{k=1}^{\infty}x^{k-1}(z_1\cdots z_{s-1})^{k+t-1}\right)\bigg|_{t=0}. \tag{5.1}$$

Определим интеграл

$$B_n(s,x) := -\int\limits_{[0,1]^s}\frac{P_n(z_1)P_n(z_2)\prod\limits_{j=3}^{s-1}(1-z_j)^n}{1-xz_1\cdots z_{s-1}}\log(z_1\cdots z_{s-1})\,\mathrm{d}z_1\ldots\mathrm{d}z_{s-1},$$

для которого верно

$$\lim_{x\to 1}B_n(s,x) = B_n(s,1) = B_n(s).$$

Из (5.1) мы выводим, что

$$B_n(s,x) = -\sum_{k=1}^{\infty}x^{k-1}\times$$
$$\times\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int\limits_0^1 z_1^{k+t-1}P_n(z_1)\,\mathrm{d}z_1\int\limits_0^1 z_2^{k+t-1}P_n(z_2)\,\mathrm{d}z_2\prod_{j=3}^{s-1}\int\limits_0^1 z_j^{k+t-1}(1-z_j)^n\,\mathrm{d}z_j\right)\bigg|_{t=0}.$$

Различные перестановки интегрирования, суммирования и дифференцирования возможны, поскольку $|x|<1$ и интегралы ограниченны независимо от k.

Теперь мы вычислим два рассматриваемых интеграла. Во-первых,

$$\int\limits_0^1 z^{k+t-1}(1-z)^n\,\mathrm{d}z = \frac{n!}{(k+t)(k+t+1)\cdots(k+t+n)}. \tag{5.2}$$

Во-вторых, интегрируя n раз по частям и затем используя (5.2), мы получаем

$$\int\limits_0^1 z^{k+t-1}P_n(z)\,\mathrm{d}z = \frac{n!}{(k+t-1)\cdots(k+t-n)}\int\limits_0^1 z^{k+t+1}(1-z)^n\,\mathrm{d}z =$$
$$= \frac{(k+t-1)\cdots(k+t-n)}{(k+t)(k+t+1)\cdots(k+t+n)}.$$

Таким образом, имеем

$$
\begin{aligned}
&B_n(s,x) = \\
&= -\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{(k+t-1)^2\cdots(k+t-n)^2}{(k+t)^2\cdots(k+t+n)^2}\,\frac{n!^{s-3}}{(k+t)^{s-3}\cdots(k+t+n)^{s-3}}\right)\Bigg|_{t=0} = \\
&= -n^{s-3}\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{(k+t-1)^2\cdots(k+t-n)^2}{(k+t)^{s-1}\cdots(k+t+n)^{s-1}}\right)\Bigg|_{t=0}.
\end{aligned}
$$

Используя теорему Абеля, теперь мы можем положить $x \to 1$ и получить $B_n(s) = D_n(s)$.

6. Доказательство теоремы 1

Итак, мы доказали, что $I_n(s) = D_n(s)$. Теперь действительно можно легко завершить доказательство теоремы 1, используя стандартные рассуждения. Мы докажем немного больше, чем требуется, и для этого определим полилогарифмические функции

$$\mathrm{Li}_s(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^s} \quad \text{для} \quad |z| \leqslant 1,\ s \geqslant 1,\ (z,s) \neq (1,1).$$

Положим

$$R(k) := n!^{s-3}\frac{(k-1)^2\cdots(k-n)^2}{k^{s-1}(k+1)^{s-1}\cdots(k+n)^{s-1}}.$$

$R(k)$ — рациональная функция от k. Разложение $R(k)$ на простейшие дроби имеет вид

$$R(k) = \sum_{j=0}^{n}\sum_{t=1}^{s-1}\frac{C(j,t)}{(k+j)^t},$$

где коэффициенты $C(j,t) \in \mathbb{Q}$ зависят от s, n и могут быть выписаны явно. Следовательно, мы имеем

$$\frac{\partial}{\partial k}R(k) = -\sum_{j=0}^{n}\sum_{t=2}^{s}\frac{(t-1)C(j,t-1)}{(k+j)^t}.$$

Рассмотрим ряд

$$V(z) = -\sum_{k=1}^{\infty} R^{(1)}(k)z^{-k},$$

который сходится абсолютно при $|z| \geqslant 1$. В частности, при $z = 1$ получаем $V(1) = D_n(s)$. При $|z| \geqslant 1$ имеем

$$V(z)=\sum_{j=0}^{n}\sum_{t=2}^{s}(t-1)C(j,t-1)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{-k}}{(k+j)^t}=$$
$$=\sum_{j=0}^{n}\sum_{t=2}^{s}(t-1)C(j,t-1)\left(z^j\mathrm{Li}_t\left(\frac{1}{z}\right)-\sum_{k=1}^{j}\frac{z^{j-k}}{k^t}\right)=P_0(z)+\sum_{t=2}^{s}P_t(z)\mathrm{Li}_s\left(\frac{1}{z}\right),$$

где при $t\geqslant 2$

$$P_t(z)=\sum_{j=0}^{n}(t-1)C(j,t-1)z^j\in\mathbb{Q}[z]$$

и

$$P_0(z)=-\sum_{j=0}^{n}\sum_{t=2}^{s}(t-1)C(j,t-1)\sum_{k=1}^{j}\frac{z^{j-k}}{k^t}\in\mathbb{Q}[z].$$

Теперь заметим, что

$$P_2(1)=\sum_{j=0}^{n}C(j,1)=0,$$

так как полная степень $R(k)$ не превосходит -2. Таким образом,

$$D_n(s)=V(1)=P_0(1)+\sum_{t=3}^{s}P_t(1)\mathrm{Li}_t(1)=P_0(1)+\sum_{t=3}^{s}P_t(1)\zeta(t).$$

Мы не доказываем последнее утверждение теоремы, т. е. что $\mathrm{d}_n^{s-t}P_t(1)\in\mathbb{Z}$, поскольку аналогичные доказательства имеются в [8, 22, 23, 25, 26].

Литература

[1] Васильев Д. В. Аппроксимации нуля линейными формами от значений дзета-функции Римана // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. — 2001. — Т. 45, № 5. — С. 36—40.

[2] Гутник Л. А. Об иррациональности некоторых величин, содержащих $\zeta(3)$ // Успехи мат. наук. — 1979. — Т. 34, № 3. — С. 190.

[3] Злобин С. А. Интегралы, представляемые в виде линейных форм от обобщённых полилогарифмов // Мат. заметки. — 2002. — Т. 71, № 5. — С. 782—787.

[4] Злобин С. А. О некоторых интегральных тождествах // Успехи мат. наук. — 2002. — Т. 57, № 3. — С. 153—154.

[5] Нестеренко Ю. В. Некоторые замечания о $\zeta(3)$ // Мат. заметки. — 1996. — Т. 59, № 6. — С. 865—880.

[6] Сорокин В. Н. Теорема Апери // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 1998. — № 3. — С. 48—53.

[7] Apéry R. Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$ // Astérisque. — 1979. — Vol. 61. — P. 11—13.

[8] Ball K., Rivoal T. Irrationalité d'une infinité de valeurs de la fonction zêta aux entiers impairs // Invent. Math. — 2001. — Vol. 146, no. 1. — P. 193—207.

[9] Beukers F. A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$ // Bull. London Math. Soc. — 1979. — Vol. 11. — P. 268—272.

[10] Beukers F. Padé-approximations in number theory // Padé Approximation and Its Applications: Amsterdam 1980. Proc. Conference Held in Amsterdam, The Netherlands, October 29—31, 1980 / M. G. de Bruin, H. van Rossum, eds. — Berlin: Springer, 1981. — (Lect. Notes Math.; Vol. 888). — P. 90—99.

[11] Cresson J., Fischler S., Rivoal T. Phénomènes de symétrie dans des formes linéaires en polyzêtas // J. Reine Angew. Math. — 2008. — Vol. 617. — P. 109—151.

[12] Cresson J., Fischler S., Rivoal T. Séries hypergéométriques multiples et polyzêtas // Bull. Soc. Math. France. — 2008. — Vol. 136, no. 1. — P. 97—145.

[13] Cresson J., Fischler S., Rivoal T. http://www.math.u-psud.fr/~fischler/algo.html.

[14] Fischler S. Groupes de Rhin—Viola et intégrales multiples // J. Théor. Nombres Bordeaux. — 2003. — Vol. 15, no. 2. — P. 479—534.

[15] Fischler S. Multiple series connected to Hoffman's conjecture on multiple zeta values: Preprint. — 2006. — http://front.math.ucdavis.edu/math.NT/0609799.

[16] Krattenthaler C., Rivoal T. An identity of Andrews, multiple integrals, and very-well-poised hypergeometric series // Ramanujan J. — 2007. — Vol. 13, no. 1-3. — P. 203—219.

[17] Krattenthaler C., Rivoal T. Hypergéométrie et fonction zêta de Riemann. — Amer. Math. Soc., 2007. — (Mem. Amer. Math. Soc.; Vol. 186).

[18] Nesterenko Yu. V. Integral identities and constructions of approximations to zeta-values // J. Théor. Nombres Bordeaux. — 2003. — Vol. 15. — P. 535—550.

[19] Rhin G., Viola C. On a permutation group related to $\zeta(2)$ // Acta Arith. — 1996. — Vol. 77. — P. 23—56.

[20] Rhin G., Viola C. The group structure for $\zeta(3)$ // Acta Arith. — 2001. — Vol. 97, no. 3. — P. 269—293.

[21] Rhin G., Viola C. Multiple integrals and linear forms in zeta-values // Funct. Approx. — 2007. — Vol. 37. — P. 429—444.

[22] Rivoal T. La fonction zêta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs // C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I. Math. — 2000. — Vol. 331, no. 4. — P. 267—270.

[23] Rivoal T. Irrationalité d'au moins un des neuf nombres $\zeta(5), \zeta(7), \ldots, \zeta(21)$ // Acta Arith. — 2002. — Vol. 103, no. 2. — P. 157—167.

[24] Rivoal T. Valeurs aux entiers de la fonction zêta de Riemann // Quadrature. — 2003. — Vol. 49. — http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~rivoal/articles/quaddefi.pdf.

[25] Zudilin W. Well-poised hypergeometric service for diophantine problems of zeta values // J. Théor. Nombres Bordeaux. — 2003. — Vol. 15, no. 2. — P. 593—626.

[26] Zudilin W. Arithmetic of linear forms involving odd zeta values // J. Théor. Nombres Bordeaux. — 2004. — Vol. 16. — P. 251—291.