# SUR LES FONCTIONS ARITHMÉTIQUES NON ENTIÈRES

TANGUY RIVOAL ET MICHAEL WELTER

RÉSUMÉ. Un théorème de Baker affirme qu'une fonction $F$ entière sur $\mathbb{C}^d$ telle que $F(\mathbb{N}^d) \subset \mathbb{Z}$ et qui croît moins vite (en un sens précis) que $2^{z_1+\cdots+z_d}$ est nécessairement un polynôme. Ceci généralise à plusieurs variables le célèbre théorème de Pólya (cas $d = 1$). Au moyen de la théorie des fonctionnelles analytiques à porteur non-compact, Yoshino a démontré un théorème général sur la croissance des fonctions analytiques arithmétiques, qui implique que la conclusion du théorème de Baker a lieu si $F$ est seulement supposée holomorphe sur le domaine $\mathscr{D} = \{\underline{z} \in \mathbb{C} : \Re(z_j) > 0, j = 1, \ldots, d\}$.

Le cas $d = 1$ a également été abordé d'une façon différente par Gel'fond et Pólya au moyen de la fonction caractéristique de Carlson-Nörlund. Cette fonction a été introduite afin de borner de façon quasi-optimale la croissance des fonctions holomorphes d'une variable qui sont développables en série d'interpolation de Newton dans le demi-plan $\Re(z) > 0$.

Dans cet article, nous montrons comment cette fonction caractéristique peut aussi servir pour obtenir une borne sur la croissance des fonctions de plusieurs variables développables sur $\mathscr{D}$ en série de Newton multiple. Nous en déduisons alors une amélioration des théorèmes de Gel'fond-Pólya et de Yoshino, en éliminant ou affaiblissant certaines de leurs hypothèses techniques.

ABSTRACT. A theorem of Baker says that a function $F$ entire on $\mathbb{C}^d$ such that $F(\mathbb{N}^d) \subset \mathbb{Z}$ and increasing slower (in a precise sense) than $2^{z_1+\cdots+z_d}$ is necessarily a polynomial. This is a multivariate generalisation of the celebrated theorem of Pólya (case $d = 1$). Using the theory of analytic functionals with non-compact carrier, Yoshino proved a general theorem dealing with the growth of arithmetic analytic functions, which implies that the conclusion of Baker's theorem holds if $F$ is only assumed to be holomorphic on the domain $\mathscr{D} = \{\underline{z} \in \mathbb{C} : \Re(z_j) > 0, j = 1, \ldots, d\}$.

The case $d = 1$ was also treated in a different way by Gel'fond and Pólya by means of the characteristic function of Carlson-Nörlund. This function was introduced to bound in a nearly optimal way the growth of holomorphic functions of one variable that can be expanded in a Newton interpolation series in the half-plane $\Re(z) > 0$.

In this article, we show how this characteristic function can also be used to bound the growth of multivariate functions defined on $\mathscr{D}$ that can be expanded in multiple Newton series. These considerations enable us to improve Gel'fond-Pólya's and Yoshino's theorems, in particular to remove or to weaken certain of their technical conditions.

---

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primaire 41A05 ; Secondaire 30D15, 32A10.

*Key words and phrases.* Fonctions analytiques arithmétiques de plusieurs variables, série d'interpolation de Newton.

## 1. Introduction

Pólya a démontré dans [29] le célèbre résultat suivant, qui est à l'origine de la théorie des fonctions analytiques arithmétiques : *Soit $F$ une fonction entière telle que $F(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$ et* $\lim_{r\to+\infty} |F|_r r^{1/2}/2^r = 0$. *Alors $F$ est un polynôme.* (On note $|F|_r$ le maximum de $|F(z)|$ sur le disque $|z| \leq r$ et $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers strictement positifs.) Il conjecturait que le même résultat était vrai si $\lim_{r\to+\infty} |F|_r/2^r = 0$, ce qui a rapidement été démontré par Hardy [19]. Pólya a finalement montré que l'on peut encore affaiblir l'hypothèse de croissance en supposant seulement que $\liminf_{r\to+\infty} |F|_r/2^r = 0$. Dans la littérature, on trouve très souvent une version plus faible du théorème de Pólya : *Soit $F$ une fonction entière telle que $F(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$ et*

$$\limsup_{r\to+\infty} \frac{\log |F|_r}{r} < \log(2). \tag{1}$$

*Alors $F$ est un polynôme.* Quelle que soit la formulation, il est raisonnable d'estimer qu'elle est optimale en raison de l'exemple de la fonction entière transcendante $2^z$. Parmi les fonctions entières $F$ vérifiant $F(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$, il y a donc un vide entre les polynômes et les fonctions à croissance exponentielle.

De nombreuses généralisations et variantes en une variable de ces résultats ont ensuite été démontrées ([1]) dans diverses directions. On trouve dans [30, 34] un début de classification des fonctions entières arithmétiques de croissance supérieure, travail qui fut totalement complété par Pisot [27]. Alternativement, on peut imposer que $F^{(j)}(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$ pour $j = 0, 1, \ldots, J$ (Gel'fond [13] pour $J$ fini et Fridman [11] pour $J = \infty$). On peut également remplacer $\mathbb{N}$ par $\mathbb{Z}$ (Pólya [29]), par $q^{\mathbb{N}}$, avec $q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0, \pm 1$ (Gel'fond [14]) ou bien par l'anneau des entiers d'un corps imaginaire quadratique (Fukasawa [12], Gramain [17]).

Récemment, divers auteurs ont remplacé $\mathbb{C}$ par un corps de fonctions sur $\mathbb{F}_q$. Gâce aux travaux successifs de Car [8], Delamette [10] et Adam [1], on dispose d'un analogue optimal pour $\mathbb{Z}$. Car [9] obtient un analogue pour $\mathbb{Z}[i]$ et Adam [1] un analogue pour $q^{\mathbb{N}}$. Il existe également des versions $p$-adiques de théorèmes de type Pólya : voir [20, 22].

Il semble que la première généralisation satisfaisante en plusieurs variables soit due à Baker [3], qui a montré le théorème suivant : *Soit $F$ une fonction entière de $d$ variables complexes telle que $F(\mathbb{N}^d) \subset \mathbb{Z}$ et*

$$\limsup_{||\underline{r}||\to+\infty} \frac{\log |F|_{\underline{r}}}{||\underline{r}||} < \log(2). \tag{2}$$

*Alors $F$ est un polynôme.* (On note $|F|_{\underline{r}}$ le maximum de $|F(z_1, \ldots, z_d)|$ sur le polydisque $|z_1| \leq r_1$,..., $|z_d| \leq r_d$ et $||\underline{r}|| = r_1 + \cdots + r_d$.) De nouveau, l'exemple de la fonction entière transcendante $2^{z_1+\cdots+z_d}$ montre l'optimalité. Le résultat de Baker concerne plus généralement les fonctions entières telles que $F^{(j_1,\ldots,j_d)}(\mathbb{N}^d) \subset \mathbb{Z}$ pour $j_\ell = 0, 1, \ldots, J$, $\ell = 1, \ldots, d$, ce qui généralise Gel'fond [13]. Voir aussi [18] pour des résultats de nature

[1]Il est impossible de prétendre décrire correctement ce pan des mathématiques : le lecteur est invité à étudier les bibliographies des articles les plus récents cités ici et à butiner ensuite au gré des références. Voir aussi les articles de survols [16, 32].

similaire pour des fonctions prenant des valeurs entières (ou algébriques) en un nombre fini d'entiers donnés. On trouve d'autres résultats en plusieurs variables dans l'esprit de Pisot dans [2].

Une autre généralisation naturelle consiste à affaiblir l'hypothèse que $F$ est entière (en une ou plusieurs variables). On peut citer l'article de Pisot [28] étendant partiellement les résultats de [27] au cas d'une fonction d'une variable régulière dans le demi-plan droit et dont la transformée de Laplace vérifie une hypothèse technique. Relativement récemment, Yoshino [38] a démontré le théorème suivant.

**Théorème** (Yoshino)**.** *Soit $F$ une fonction holomorphe sur $\mathscr{D} = \{\underline{z} \in \mathbb{C} : \Re(z_j) > 0, j = 1, \ldots, d\}$, vérifiant les conditions suivantes :*

*($i$) $F(\mathbb{N}^d) \subset \mathbb{Z}$.*

*($ii$) Il existe une fonction $A(\underline{z})$ définie sur $\mathscr{D}$, convexe et homogène de degré 1, telle que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $c_\varepsilon > 0$ tel que $|F(\underline{z})| \leq c_\varepsilon e^{A(\underline{z})}$ pour $\Re(z_j) \geq \varepsilon$, $j = 1, \ldots, d$.*

*($iii$) Pour tout $j = 1, \ldots, d$, la $j$-ième projection de $\{\underline{x} \in \mathbb{C}^d : \Re(\underline{x} \cdot \underline{z}) \leq A(\underline{z}), \forall \underline{z} \in \mathscr{D}\}$ est contenue dans $\{x_j \in \mathbb{C} : |e^{x_j} - 1| < 1\}$.*

*Alors $F$ est un polynôme à coefficients rationnels.*

Appelons *admissible* toute fonction $A$ convexe, homogène ([2]) de degré 1 et vérifiant ($iii$). Il est facile de voir que, pour $d = 1$, la fonction $A(z) = \eta|z|$ avec $\eta < \log(2)$ est admissible et que l'on obtient un analogue du théorème de Pólya (énoncé autour de (1)), en remplaçant $|F|_r$ par le supremum de $|F(z)|$ pour $|z| \leq r$ et $\Re(z) > 0$. Yoshino ne propose aucun exemple d'application pour $d \geq 2$, ce que l'on fait pour lui au corollaire 1 ci-dessous.

Toujours pour $d = 1$, il s'intéresse par ailleurs à la condition ($iii$) dans le cas de la fonction $A(z) = |z|\psi(\theta)$, où, pour $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$,

$$\psi(\theta) = \cos(\theta)\log(2\cos(\theta)) + \theta\sin(\theta),$$

est la fonction caractéristique de Carlson-Nörlund. (La fonction $\psi$ est continue, paire, décroissante puis croissante et vérifie $\log(2) \leq \psi(\theta) \leq \pi/2$ sur $[-\pi/2, \pi/2]$.) Cette fonction $A$ est convexe et homogène de degré 1 sur $\Re(z) > 0$ mais comme, pour tout $z = |z|e^{i\theta}$ avec $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$, on a $|2^z| \leq e^{|z|\psi(\theta)}$ (avec égalité sur $\mathbb{R}_+$), elle n'est pas admissible dans le théorème pour $d = 1$. On peut aussi le voir de la manière suivante : on a l'égalité ([3])

$$\{x \in \mathbb{C} : \Re(xz) \leq |z|\psi(\theta), \forall \Re(z) > 0\} = \{x \in \mathbb{C} : |e^x - 1| \leq 1\} \tag{3}$$

[2] Une fonction $A$ est dite homogène de degré 1 sur une partie $E \subset \mathbb{C}^d$ si $A(k\underline{z}) = kA(\underline{z})$ pour tout $\underline{z} \in E$ et tout $k \in \mathbb{C}$. Comme Yoshino applique son théorème à $A(z) = \eta|z|$ lorsque $d = 1$, il est probable qu'il faille plutôt comprendre que $A(k\underline{z}) = |k|A(\underline{z})$ ou bien que $A(k\underline{z}) = kA(\underline{z})$ pour $k > 0$ seulement (fonction positivement homogène). Notons au passage que, si $d = 1$, toute fonction homogène de degré 1 sur $\mathbb{C}$ est de la forme $|z|\varphi(\arg(z))$ avec $\varphi$ une fonction $2\pi$–périodique.

[3] Yoshino écrit malencontreusement $|e^x - 1| < 1$ à la place de $|e^x - 1| \leq 1$, ce qui est incorrect : le point $x = \log(2)$ appartient bien aux deux membres de (3). Cette égalité est l'objet de l'entrée 114 de [31, p. 126] : il y est montré que $\psi(\theta)$ est la fonction d'appui du convexe $\mathscr{M} = \{x \in \mathbb{C} : |e^x - 1| \leq 1\}$, c'est-à-dire que $\psi(\theta) = \max\{\Re(\overline{x}e^{i\theta}), x \in \mathscr{M}\}$, ce qui entraîne (3). En particulier, si l'on se donne une fonction $\varphi$ définie sur $[-\pi/2, \pi/2]$ telle que $\varphi(\theta) \geq \log(2)$ sur cet intervalle, alors la fonction (positivement) homogène $A(z) = |z|\varphi(\arg(z))$ n'est pas admissible.

et la condition $(iii)$ n'est donc pas satisfaite.

Bien que la fonction $|z|\psi(\theta)$ ne soit pas admissible, l'égalité (3) suggère cependant que, pour $d = 1$, toute fonction convexe, homogène de degré 1 et de "croissance" à peine plus faible que $|z|\psi(\theta)$ va être admissible dans le théorème de Yoshino. Il s'avère qu'un tel résultat a été démontré bien avant celui de Yoshino. On trouve en effet dans livre de Gel'fond [15, p. 153, Théorème X] le théorème suivant ([4]) :

**Théorème** (Gel'fond-Pólya)**.** *Soit $F$ une fonction régulière sur $\Re(z) > A$ et continue sur $\Re(z) \geq A$ vérifiant dans ce demi-plan l'inégalité (pour un $\varepsilon > 0$ donné)*

$$|F(A + re^{i\theta})| < \frac{e^{r\psi(\theta)}}{(1 + r)^{1/2+\varepsilon}} \tag{4}$$

*et telle que $F(k) \in \mathbb{Z}$ pour tout entier $k > A$. Alors $F$ est un polynôme.*

Le but de cet article est de généraliser en plusieurs variables le théorème de Gel'fond-Pólya et d'affaiblir la condition (4) (en particulier en ne supposant pas la fonction continue sur le bord du demi-plan). Pour $d \geq 2$, on montre qu'un rôle similaire à $|z|\psi(\theta)$ peut être joué par la fonction $\sum_{j=1}^{d} |z_j|\psi(\theta_j)$, qui est convexe, homogène de degré 1 mais pas admissible (considérer le point $\underline{x} = (\log(2), 0, 0, \ldots, 0)$).

On note $\underline{z}$ tout $d$-uplet $(z_1, z_2, \ldots, z_d)$ de nombres complexes et on écrit $z_j = |z_j|e^{i\theta_j}$ avec $\theta_j \in [-\pi/2, \pi/2]$ tout complexe $z_j$ tel que $\Re(z_j) \geq 0$. Notre théorème principal est le suivant et nous effectuons une comparaison avec celui de Yoshino au paragraphe 2. Voir le paragraphe 6 final pour un énoncé alternatif.

**Théorème 1.** *Soit $F$ une fonction holomorphe sur $\{\underline{z} \in \mathbb{C}^d : \Re(z_j) > 0, j = 1, \ldots, d\}$. Supposons que les deux conditions suivantes soient vérifiées :*

*$(i)$ $F(\mathbb{N}^d) \subset \mathbb{Z}$.*

*$(ii)$ Il existe des réels $c > 0$, $\alpha \geq 0$ et $\beta$ tels que l'on ait pour tout $\underline{z}$ vérifiant $\Re(z_j) > 0$ :*

$$|F(\underline{z})| \leq c \prod_{j=1}^{d} \frac{e^{|z_j|\psi(\theta_j)}}{\Re(z_j)^{\alpha}(1 + |z_j|)^{\beta}}. \tag{5}$$

*Alors si $1/2 - \beta < \alpha < 1/2$, la fonction $F$ est un polynôme à coefficients rationnels.*

*Remarques.* a) On pourrait considérer le cas apparemment plus général d'une fonction $F$ holomorphe sur $\{\underline{z} \in \mathbb{C}^d : \Re(z_j) > A_j, j = 1, \ldots, d\}$ mais on déduit facilement ce cas de celui où les $A_j$ sont nuls. On pourrait également faire dépendre les exposants $\alpha$ et $\beta$ de $j$ : cela n'apporte rien au théorème 1 mais améliore le théorème 2 (voir la remarque c) qui le suit).

b) Sous la contrainte $1/2 - \beta < \alpha < 1/2$, la condition de croissance (5) la plus favorable est lorsque $\alpha$ est proche de $1/2$ et $\beta$ proche de 0. On peut penser que l'on pourrait assouplir cette condition en seulement $\alpha + \beta > 0$.

---

[4]Ce résultat semble être passé relativement inaperçu car il n'est nulle part cité dans la littérature. Il n'est attribué à personne dans la version française de [15] (donc implicitement à Gel'fond) mais à Pólya dans la version allemande. Nous coupons la poire en deux en l'attribuant à Gel'fond et Pólya.

c) Le théorème de Gel'fond-Pólya correspond au cas $d = 1$, $A = 0$, $\alpha = 0$ et $\beta = 1/2 + \varepsilon$. Le point clé de notre amélioration est l'utilisation d'un contour d'intégration différent de celui de Gel'fond-Pólya lors de l'évaluation de certaines formules d'interpolation.

d) Si $1/2 - \beta < \alpha < 1/2$, les nombres $\alpha$ et $\beta$ ne sont pas nuls simultanément. La fonction $\sum_{j=1}^{d} \big(|z_j|\psi(\theta_j) - \alpha \log \Re(z_j) - \beta \log(1 + |z_j|)\big)$ n'est donc pas homogène et, en conséquence, pas admissible.

e) *Stricto sensu*, l'hypothèse $\alpha \geq 0$ n'est pas nécessaire et la preuve ne l'utilisera pas. Cependant, si l'on suppose que $\alpha < 0$, alors la fonction $F$ est nécessairement identiquement nulle sans même supposer que $F(\mathbb{N}^d) \subset \mathbb{Z}$ ou que $1/2 - \beta < \alpha < 1/2$. En effet, on peut la prolonger par continuité sur $\Re(z_j) = 0$ pour $j = 1, \ldots, d$, où elle s'annule. Fixons $z_2, \ldots, z_d$ quelconques de parties réelles $> 0$ et considérons $g(z) = F(z, z_2, \ldots, z_d)$. La fonction $g$ est continue sur $\Re(z) \geq 0$, holomorphe sur $\Re(z) > 0$, nulle sur $\Re(z) = 0$ : par le principe de réflexion de Schwarz, il existe une unique fonction entière $\widehat{g}$ coïncidant avec $g$ sur $\Re(z) \geq 0$. En particulier, $\widehat{g}$ s'annule sur $\Re(z) = 0$ : elle est donc identiquement nulle sur $\mathbb{C}$, ce qui entraîne que $F$ est aussi identiquement nulle.

Comme pour $z_j = |z_j|e^{\theta_j}$ tel que $\theta_j \in [-\pi/2, \pi/2]$, on a $|2^{z_1+\cdots+z_d}| \leq e^{|z_1|\psi(\theta_1)+\cdots+|z_d|\psi(\theta_d)}$ avec égalité sur $\mathbb{R}_+^d$, nous obtenons comme corollaire un analogue du théorème de Baker (énoncé autour de (2)) sous une hypothèse d'analyticité plus faible. C'est aussi un corollaire du théorème de Yoshino que l'on obtient en considérant la fonction admissible $A(\underline{z}) = \eta \sum_{j=1}^{d} |z_j|$ avec $\eta < \log(2)$. On désigne par $|F|_{\underline{r}}^{\star}$ le supremum de $|F(\underline{z})|$ sur $|z_j| \leq r_j$ et $\Re(z_j) > 0$ pour $j = 1, \ldots, d$.

**Corollaire 1.** *Soit $F$ une fonction holomorphe sur $\{\underline{z} \in \mathbb{C}^d : \Re(z_j) > 0, j = 1, \ldots, d\}$, telle que $F(\mathbb{N}^d) \subset \mathbb{Z}$ et*

$$\limsup_{||\underline{r}|| \to +\infty} \frac{\log |F|_{\underline{r}}^{\star}}{||\underline{r}||} < \log(2).$$

*Alors $F$ est un polynôme à coefficients rationnels.*

Au fil du temps, essentiellement trois méthodes ont été utilisées pour démontrer les divers résultats sur la croissance des fonctions analytiques arithmétiques : par séries d'interpolation de type Newton en une ou plusieurs variables [1, 3, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 18, 19, 25, 26, 29, 30, 33, 34], par transformation de Laplace (ou analogue multidimensionnel comme les fonctionnelles analytiques) et diamètre transfini [2, 5, 27, 28, 38] ou bien par les méthodes de transcendance de Gel'fond et de Schneider [10, 17, 35, 36, 37]. Il est méthodologiquement intéressant que la démonstration du théorème de Yoshino appartienne à la deuxième catégorie tandis celle de notre théorème 1 appartienne à la première.

Le plan de l'article est le suivant. Au paragraphe 2, on effectue une comparaison du théorème de Yoshino et du théorème 1. Au paragraphe 3, on démontre le lemme qui est au cœur de notre méthode. Au paragraphe 4, on démontre le théorème 1 dans le cas $d = 1$. On le montre ensuite pour $d \geq 2$ au paragraphe 5 en deux temps : d'abord en détail pour

$d = 2$ au paragraphe 5.1, puis en esquissant ([5]) le cas $d \geq 3$ au paragraphe 5.2. Enfin, au paragraphe 6, on énonce notre théorème 4, qui une alternative au théorème 1 : on suppose une condition de croissance moins bonne que (5) mais dépendant de paramètres $\alpha$ et $\beta$ utilisables dans une plage plus grande.

On déduira le théorème 1 du résultat suivant, qui constitue un analogue multidimensionnel du théorème classique de Carlson-Nörlund (voir [24, p. 131, paragraphe 66]) concernant les fonctions d'une variable complexe, holomorphes dans $\Re(z) > 0$ et qui sont développables en série de Newton aux entiers positifs.

**Théorème 2.** *Soit $F$ une fonction holomorphe sur $\{\underline{z} \in \mathbb{C}^d : \Re(z_j) > 0, j = 1, \ldots, d\}$, vérifiant l'hypothèse de croissance (5) du théorème 1 pour des réels $\alpha \geq 0$ et $\beta$.*

*Il existe alors une multi-suite de complexes $(A(n_1, \ldots, n_d))_{n_1,\ldots,n_d \geq 0}$ telle que l'on ait*

$$F(\underline{z}) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_d=0}^{\infty} A(n_1, \ldots, n_d) \frac{P_{n_1}(z_1) \cdots P_{n_d}(z_d)}{n_1! \cdots n_d!} \tag{6}$$

*pour $\Re(z_j) > \max(1/2 + \alpha, 3/2 - \alpha - \beta)$, $j = 1, \ldots, d$, où la série converge absolument.*

*De plus, on a*

$$|A(n_1, \ldots, n_d)| \ll \prod_{j=1}^{d} \frac{\log(n_j + 2)}{(n_j + 1)^{\min(1/2-\alpha,\, \alpha+\beta-1/2)}} \tag{7}$$

*pour tout $n_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, d$.*

*Remarques.* a) De nouveau, l'hypothèse $\alpha \geq 0$ ne sera pas utilisée : si $\alpha < 0$, on sait que $F$ est identiquement nulle et le théorème 2 est vide. Bien sûr, il existe des fonctions non-identiquement nulles vérifiant les hypothèses du théorème 2 lorsque $\alpha \geq 0$, par exemple $(1 + x)^{d \sqrt[d]{z_1 \cdots z_d}}$ avec $0 < x \leq 1$ et la racine $d$–ième définie avec sa branche principale.

b) Pour $d = 1$ et $\alpha = 0$, il s'agit d'une version un peu plus faible du théorème de Carlson et Nörlund, qui obtiennent l'égalité (6) pour $\Re(z) > \max(0, 1/2 - \beta)$. Par ailleurs, dans la théorie des séries d'interpolation en une variable, la fonction $\psi$ est un exemple de *fonction caractéristique* (voir par exemple [21, 23, 24]), ce qui explique le nom que nous lui avons attribué plus haut.

c) La démonstration nous donnera un peu plus puisque l'on peut aussi faire dépendre les paramètres $\alpha$ et $\beta$ de $j$ : il suffit de remplacer $\Re(z_j) > \max(1/2+\alpha, 3/2-\alpha-\beta)$ par $\Re(z_j) > \max(1/2+\alpha_j, 3/2-\alpha_j-\beta_j)$ et $\min(1/2-\alpha,\, \alpha+\beta-1/2)$ par $\min(1/2-\alpha_j,\, \alpha_j+\beta_j-1/2)$ pour tout $j = 1, \ldots, d$.

Terminons cette introduction avec quelques problèmes. On peut tout d'abord essayer d'appliquer notre méthode au cas des fonctions dont les dérivées prennent aussi des valeurs entières : nous sommes actuellement en train de réfléchir à ce problème que l'on peut aborder par les séries d'interpolation. Peut-être plus difficile sera d'obtenir des résultats analogues au théorème de Yoshino et au théorème 1 pour les fonctions holomorphes sur $\{\underline{z} \in \mathbb{C}^d : \Re(z_j) > 0, j = 1, \ldots, d\}$ et prenant des valeurs entières (éventuellement avec

[5] La seule réelle complication par rapport au cas $d = 2$ est due aux notations et on préfère détailler le cas $d = 2$ pour plus de clarté.

multiplicité) aux points $\underline{q}^n = (q_1^n, \ldots, q_d^n)$, $n \in \mathbb{N}$, (voir Bézivin [4]) ou aux point $\underline{q}^{\underline{n}} = (q_1^{n_1}, \ldots, q_d^{n_d})$, $n_1, \ldots, n_d \in \mathbb{N}$, (voir Bundschuh [6]) pour des entiers $q_1, \ldots, q_d \geq 2$.

Remarquons que Martin [23, p. 314, Théorème 1] a montré que si la série à termes réels positifs $\sum_n \alpha_n^{-1}$ converge, alors toute série d'interpolation construite sur les polynômes $(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n)$ converge soit uniquement aux points $\alpha_j$ soit pour tout $z \in \mathbb{C}$ (et définie une fonction entière). Une telle série ne peut donc pas représenter une fonction holomorphe seulement dans $\Re(z) > 0$, contrairement aux séries considérées dans cet article. Cette situation se produit en particulier si $\alpha_n = q^n$, $q \geq 2$ et $n \in \mathbb{N}$. Partant d'une fonction $F$ holomorphe et à croissance contrôlée sur $\Re(z) > 0$ par une fonction caractéristique $\psi$, si l'on parvient à montrer l'analogue du théorème 2, on en déduira automatiquement que $F$ est entière. On peut ensuite espérer contrôler la croissance de $F$ sur $\mathbb{C}$ par une fonction caractéristique $\widetilde{\psi}$ (c'est théoriquement faisable à partir de la série d'interpolation, voir [23, p. 342]) qui prolonge $\psi$. Sous l'hypothèse supplémentaire $F(q^{\mathbb{N}}) \subset \mathbb{Z}$, on pourra peut-être conclure que $F$ est un polynôme par les techniques standard.

## 2. Comparaison entre le théorème de Yoshino et le théorème 1

Il n'est pas facile de comparer les deux théorèmes car celui de Yoshino possède avec les constantes $c_\varepsilon$ une souplesse que nous n'avons pas : notre constante $c$ est fixé une bonne fois pour toute. Néanmoins, le théorème 1 améliore celui de Yoshino sur au moins un point, donné par la proposition suivante.

**Proposition 1.** *Fixons des réels $\alpha$ et $\beta$. Il n'existe aucune fonction $A$ positivement homogène de degré 1, vérifiant la condition (iii) du théorème de Yoshino et telle que l'on ait*

$$A(\underline{z}) \geq \sum_{j=1}^{d} \big(|z_j|\psi(\theta_j) - \alpha \log \Re(z_j) - \beta \log(1 + |z_j|)\big) \tag{8}$$

*pour tout $\underline{z}$ tel que $\Re(z_j) > 0$, $j = 1, \ldots, d$.*

*Remarque.* Il n'est pas nécessaire de supposer que $A$ est convexe ou que $1/2 - \beta < \alpha < 1/2$.

*Démonstration.* Soit $A$ une fonction positivement homogène de degré 1 vérifiant (8) pour tout $\underline{z}$ tel que $\Re(z_j) > 0$, $j = 1, \ldots, d$. Pour tout $k > 0$, puisque $\arg(kz_j) = \arg(z_j)$ $(= \theta_j)$, on a

$$A(\underline{z}) = k^{-1} A(k\underline{z}) \geq \sum_{j=1}^{d} |z_j|\psi(\theta_j) - \sum_{j=1}^{d} k^{-1}\big(\alpha \log \Re(kz_j) + \beta \log(1 + k|z_j|)\big).$$

En passant à la limite $k \to +\infty$, on a donc en fait

$$A(\underline{z}) \geq \sum_{j=1}^{d} |z_j|\psi(\theta_j) \geq \log(2) \sum_{j=1}^{d} |z_j|,$$

puisque $\psi(\theta) \geq \log(2)$ pour tout $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$. Il en découle que $\underline{x} = (\log(2), 0, \ldots, 0)$ (par exemple) appartient à $\{\underline{x} \in \mathbb{C}^d : \Re(\underline{x} \cdot \underline{z}) \leq A(\underline{z}), \forall \underline{z} \in \mathscr{D}\}$. La première projection de cet ensemble n'est donc pas contenue dans $\{x_1 \in \mathbb{C} : |e^{x_1} - 1| < 1\}$ et la condition $(iii)$ du théorème de Yoshino n'est pas vérifiée. $\square$

## 3. Un lemme préliminaire

Nous ferons un usage multiple du lemme suivant, que nous dégageons donc dès à présent. Posons $P_0(z) = 1$ et $P_n(z) = (z-1)(z-2)\cdots(z-n)$ pour $n \geq 1$ et $z \in \mathbb{C}$.

**Lemme 1.** *Soit $F(z)$ une fonction holomorphe sur $\Re(z) > 0$ pour laquelle il existe des réels $\alpha, \beta$ et $c > 0$ tels que*

$$|F(z)| \leq c\,\frac{e^{|z|\psi(\theta)}}{\Re(z)^\alpha(1+|z|)^\beta}$$

*pour $\Re(z) > 0$. Soit $\mathscr{C}$ une courbe fermée directe contenue dans le demi-plan $\Re(z) > 0$ et entourant les points $1, 2, \ldots, n$.*

*$(i)$ On a*

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathscr{C}} \frac{(n-1)!}{P_n(x)}\,F(x)\,\mathrm{d}x\right| \ll \frac{\log(n+2)}{(n+1)^{\min(1/2-\alpha,\,\alpha+\beta-1/2)}}. \tag{9}$$

*$(ii)$ Si on suppose de plus que $z$ est tel que $\Re(z) \geq \delta > 0$ (pour un $\delta$ fixé) et entouré par $\mathscr{C}$, on a*

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathscr{C}} \frac{(n-1)!}{(x-z)P_{n-1}(x)}\,F(x)\,\mathrm{d}x\right| \ll_\delta (n+1)^{\max(1/2+\alpha,\,3/2-\alpha-\beta)}\log(n+2). \tag{10}$$

*Remarque.* On ne suppose rien sur $\alpha$ et $\beta$. On appliquera en particulier ce lemme au cas $1/2 - \beta < \alpha < 1/2$, qui assure que l'intégrale majorée en $(i)$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$.

*Démonstration.* Commençons par montrer $(i)$. Notons $I_n$ l'intégrale à gauche de (9). Par le théorème de Cauchy, on peut déformer $\mathscr{C}$ en le contour homotope qui nous convient le plus. Dans [24, p. 133 et suivantes], Nörlund choisit ([6]) pour $\mathscr{C}$ le cercle $\mathscr{C}_n$ de centre $n$ et de rayon $n$. C'est aussi le choix fait par Gelfond dans la preuve du Théorème de Gel'fond-Pólya. Tout point $x$ de ce cercle s'écrit $x = n + ne^{2i\theta} = 2n\cos(\theta)e^{i\theta}$ avec $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$. Ce cercle passant par 0, ce choix impose une certaine régularité en 0 pour $F$, ce que nous n'avons pas supposé. Nous allons donc légèrement modifier le contour de Nörlund de la façon suivante.

Définissons, pour $n \geq 1$, l'angle $A_n \in [0, \pi/2[$ par $2n\cos(A_n) = 1$. On choisit pour $\mathscr{C}$ le contour direct composé de deux parties $\mathscr{C}_{1,n}$ et $\mathscr{C}_{2,n}$ : $\mathscr{C}_{1,n}$ est l'arc de cercle de $\mathscr{C}_n$ sur lequel $\theta \in [-A_n, A_n]$ et $\mathscr{C}_{2,n}$ est le segment vertical reliant les deux extrémités de $\mathscr{C}_{1,n}$ (voir la figure 1). On pose

$$I_{k,n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathscr{C}_{k,n}} \frac{(n-1)!}{P_n(x)}\,F(x)\,\mathrm{d}x,$$

de sorte que $I_n = I_{1,n} + I_{2,n}$.

[6] Lorsque $F$ est entière, les tenants de la méthode d'interpolation, tels Pólya, Hardy ou Baker, choisissent systématiquement un cercle de centre 0, de rayon $2n$ en général.

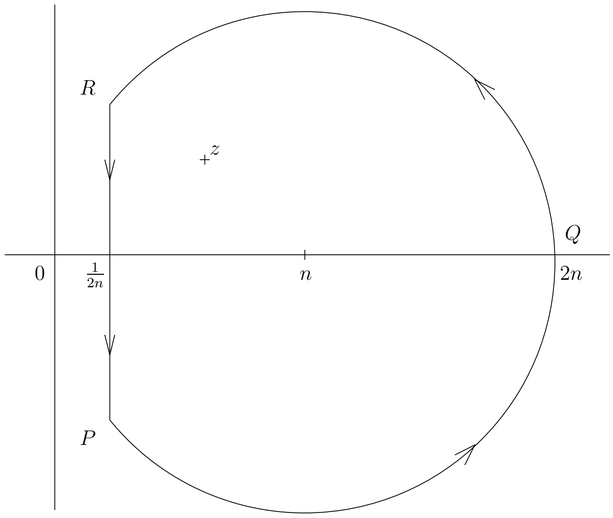


FIG. 1. Les contours d'intégration $\mathscr{C}_{1,n} = PQR$ et $\mathscr{C}_{2,n} = RP$.

– *Majoration de* $I_{1,n}$. Rappelons que la fonction caractéristique de Carlson-Nörlund $\psi(\theta)$ est définie par $\psi(\theta) = \cos(\theta)\log(2\cos(\theta)) + \theta\sin(\theta)$.

Par des transformations élémentaires, on a

$$I_{1,n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathscr{C}_{1,n}} \frac{\Gamma(n)\Gamma(x-n)}{\Gamma(x)}\, F(x)\,\mathrm{d}x.$$

On définit le logarithme par $\log(z) = \log|z| + i\arg(z)$ avec $-\pi < \arg(z) \leq \pi$ et la formule de Stirling s'écrit alors

$$\Gamma(z) = z^{z-1/2}e^{-z}\sqrt{2\pi}\big(1 + \mathcal{O}(1/|z|)\big)$$

pour tout $z$ tel que $-\pi < \arg(z) < \pi$. Comme $\theta \in [-A_n, A_n]$, les arguments de $x - n$ et $x$ sont bien dans $]-\pi,\pi[$ et on a donc que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\Gamma(n)\Gamma(x-n)}{\Gamma(x)}\right| &\ll \left|\frac{n^{n-1/2}(x-n)^{x-n-1/2}}{x^{x-1/2}}\right| = \left|\left(\frac{n}{x-n}\right)^{n+1/2}\left(\frac{x-n}{x}\right)^{x}\frac{\sqrt{x}}{n}\right| \\
&\ll \left|\left(\frac{n}{ne^{2i\theta}}\right)^{n+1/2}\left(\frac{ne^{2i\theta}}{2n\cos(\theta)e^{i\theta}}\right)^{2n\cos(\theta)e^{i\theta}}\frac{\sqrt{n\cos(\theta)}}{n}\right| \\
&\ll \frac{1}{\sqrt{n}}\, e^{-2n\cos(\theta)\psi(\theta)}.
\end{aligned}$$

La constante implicite dans ce dernier $\ll$ ne dépend ni de $n$ ni de $\theta$ et la majoration

$$\left|\frac{\Gamma(n)\Gamma(x-n)}{\Gamma(x)}\right| \ll \frac{1}{\sqrt{n}}\, e^{-2n\cos(\theta)\psi(\theta)}$$

vaut en fait pour tout $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$. (Voir aussi [31, p. 157, entrée 263] pour plus de détails sur le domaine de validité de cette majoration.) Comme on le verra plus bas, on peut remplacer le second membre par $1/n$ lorsque $0 \leq \Re(x) \leq \frac{1}{2n}$.

On peut maintenant estimer l'intégrale $I_{1,n}$. Sur $\mathscr{C}_{1,n}$, on a $\mathrm{d}x = 2ine^{2i\theta}\mathrm{d}\theta$ et

$$\begin{aligned}
0 \leq \frac{1}{\Re(x)^\alpha(1+|x|)^\beta} &\leq \frac{1}{(2n\cos(\theta)^2)^\alpha(1+2n\cos(\theta))^\beta} \\
&\leq \frac{1}{(2n)^{\alpha+\beta}\cos(\theta)^{2\alpha+\beta}} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2n\cos(\theta)}\right)^\beta} \\
&\ll \frac{1}{n^{\alpha+\beta}\cos(\theta)^{2\alpha+\beta}} \qquad (11)
\end{aligned}$$

car $1 \leq 1 + \dfrac{1}{2n\cos(\theta)} \leq 2$ sur $\mathscr{C}_{1,n}$.

En utilisant l'hypothèse de croissance sur $F$, on en déduit donc que

$$|I_{1,n}| \ll n \int_{-A_n}^{A_n} \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-2n\cos(\theta)\psi(\theta)} |F(2n\cos(\theta)e^{i\theta})| \,\mathrm{d}\theta \ll \frac{1}{n^{\alpha+\beta-1/2}} \int_{-A_n}^{A_n} \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos(\theta)^{2\alpha+\beta}}$$

et il ne reste plus qu'à estimer l'intégrale. Comme $A_n \to \pi/2$ quand $n \to +\infty$, on peut supposer $n$ assez grand pour que $A_n \geq \pi/6$. En notant $c_1$ la valeur de l'intégrale entre 0 et $\pi/6$ (indépendante de $n$), on a donc

$$0 \leq \int_0^{A_n} \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos(\theta)^{2\alpha+\beta}} = c_1 + \int_{\pi/6}^{A_n} \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos(\theta)^{2\alpha+\beta}} \leq c_1 + 2\int_{\pi/6}^{A_n} \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)^{2\alpha+\beta}} \,\mathrm{d}\theta,$$

où l'on a utilisé le fait que $2\sin(\theta) \geq 1$ sur $[\pi/6, A_n]$. Comme on peut calculer une primitive de la fonction $\sin(\theta)\cos(\theta)^v$ pour tout réel $v$, on obtient que

$$\int_0^{A_n} \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos(\theta)^{2\alpha+\beta}} \ll \begin{cases} 1 + n^{-1+2\alpha+\beta} & \text{si } 2\alpha+\beta \neq 1, \\ \log(n) & \text{si } 2\alpha+\beta = 1. \end{cases}$$

D'où

$$|I_{1,n}| \ll \frac{1}{n^{\alpha+\beta-1/2}} + \frac{1}{n^{1/2-\alpha}}$$

si $2\alpha+\beta \neq 1$ et

$$|I_{1,n}| \ll \frac{\log(n)}{n^{1/2-\alpha}}$$

si $2\alpha+\beta = 1$. Dans tous les cas, on a l'estimation (légèrement moins bonne mais suffisante) :

$$|I_{1,n}| \ll \frac{\log(n+2)}{(n+1)^{\min(1/2-\alpha,\, \alpha+\beta-1/2)}}$$

pour tout entier $n \geq 0$.

– *Majoration de* $I_{2,n}$. On note dorénavant $1/2n$ pour $\frac{1}{2n}$. Le segment orienté $\mathscr{C}_{2,n}$ est décrit par les points $x = 1/2n + i\xi$ avec $|\xi| \leq \sin(A_n)$. Comme $A_n \to \pi/2$ quand $n \to +\infty$, on va simplement majorer $\sin(A_n)$ par 1. Si $n \geq 1$, pour tout entier $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a $|j - x| \geq |j - \Re(x)| = j - 1/2n > 0$ et donc

$$|(x-1)\cdots(x-n)| \geq (n - 1/2n)\cdots(1 - 1/2n) = \frac{\Gamma(1+n-1/2n)}{\Gamma(1-1/2n)}.$$

Sur $\mathscr{C}_{2,n}$, on a $1 + 1/2n \leq 1 + |1/2n + i\xi| \leq 2 + 1/2n$ donc pour tout réel $\beta$, la fonction $(1 + |1/2n + i\xi|)^\beta$ est bornée indépendamment de $n$, tout comme $e^{|1/2n+i\xi|\psi(\theta)}$ (en notant $\theta = \arg(1/2n + i\xi)$). On obtient donc que

$$\begin{aligned}
|I_{2,n}| &\ll \frac{\Gamma(n)\Gamma(1-1/2n)}{\Gamma(1+n-1/2n)} \int_{-\sin(A_n)}^{\sin(A_n)} |F(1/2n + i\xi)| \,\mathrm{d}\xi \\
&\ll \frac{\Gamma(n)\Gamma(1-1/2n)}{\Gamma(1+n-1/2n)} n^\alpha \int_{-1}^{1} \frac{e^{|1/2n+i\xi|\psi(\theta)}}{(1+|1/2n+i\xi|)^\beta} \,\mathrm{d}\xi \\
&\ll \frac{1}{n^{1-\alpha}}.
\end{aligned}$$

La dernière majoration résulte de l'équivalent $\Gamma(n)\Gamma(1-1/2n)/\Gamma(1+n-1/2n) \sim 1/n$ (comme le montre la formule de Stirling). On a donc en définitive $|I_{2,n}| \ll 1/(n+1)^{1-\alpha}$ pour tout entier $n \geq 0$.

– *Majoration de $I_n$.* Il résulte des calculs précédents que l'on a $|I_{2,n}| = o(I_{1,n})$ et donc que

$$|I_n| \leq |I_{1,n}| + |I_{2,n}| \ll \frac{\log(n+2)}{(n+1)^{\min(1/2-\alpha,\, \alpha+\beta-1/2)}}$$

pour tout entier $n \geq 0$, comme annoncé.

Démontrons maintenant l'assertion $(ii)$. On remarque pour cela que

$$\frac{(n-1)!}{(x-z)P_{n-1}(x)} = \frac{x-n}{x-z}\frac{(n-1)!}{P_n(x)}$$

et que, sur le même contour $\mathscr{C}$ que celui choisi pour majorer $I_n$ avec $n$ suffisamment grand pour que $z$ soit à l'intérieur de $\mathscr{C}$, on a

$$\left|\frac{x-n}{x-z}\right| \ll_\delta n$$

aussi bien sur $\mathscr{C}_{1,n}$ que sur $\mathscr{C}_{2,n}$. On ramène donc la majoration de l'intégrale à gauche de (10) à celle de $I_n$ et on obtient ainsi

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathscr{C}} \frac{(n-1)!}{(x-z)P_{n-1}(x)} F(x) \,\mathrm{d}x\right| &\ll_\delta (n+1)|I_n| \\
&\ll_\delta (n+1)^{\max(1/2+\alpha,\, 3/2-\alpha-\beta)} \log(n+2).
\end{aligned}$$

Ceci achève la preuve du lemme. □

## 4. Démonstration du théorème 1 pour $d = 1$

*Nota Bene* : dans toute la suite de cet article, on note $\tau = \min(1/2-\alpha,\ \alpha+\beta-1/2)$ et $\rho = \max(1/2+\alpha, 3/2-\alpha-\beta)$. Lorsque $1/2-\beta < \alpha < 1/2$, on a $\tau > 0$.

Nous allons justifier que l'on peut développer en série de Newton toute fonction $F(z)$ (en une variable) satisfaisant à l'hypothèse de croissance $(ii)$ du théorème 1. Il s'agit donc de montrer le cas $d = 1$ du théorème 2. Avant cela, indiquons tout d'abord comment on en déduit le théorème 1 dans le cas $d = 1$. Comme on le verra ci-dessous, la suite $(A(n))_{n\geq 0}$ est donnée pour tout $n \geq 0$ par

$$A(n) = \int_{\mathscr{C}} \frac{n!}{P_{n+1}(x)}\, F(x)\, \mathrm{d}x. \tag{12}$$

où $\mathscr{C}$ est n'importe quelle courbe fermée directe contenue dans le demi-plan $\Re(x) > 0$ et entourant les points $1, 2, \dots, n+1$. Or le théorème des résidus appliqué à la représentation intégrale (12) de $A(n)$ nous donne aussi que

$$A(n) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} F(j+1) \in \mathbb{Z}$$

puisque $F(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$ (hypothèse $(i)$ du théorème 1). Or il découle du cas $d = 1$ du théorème 2 que pour tout $\Re(z) > \rho$, on a

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A(n) \frac{P_n(z)}{n!}$$

avec $A(n) \to 0$ quand $n \to +\infty$ car $1/2-\beta < \alpha < 1/2$. Il existe donc un entier $N \geq 0$ tel que l'on ait $A(n) = 0$ pour $n \geq N+1$ et donc

$$F(z) = \sum_{n=0}^{N} A(n) \frac{P_n(z)}{n!} \in \mathbb{Q}[z].$$

On a donc déduit le cas $d = 1$ du théorème 1 du cas $d = 1$ du théorème 2, que nous démontrons maintenant.

*Démonstration du théorème 2, cas $d = 1$.* Rappelons le cas particulier suivant de l'identité d'Hermite : pour tout entier $n \geq 0$, on a

$$\frac{1}{x-z} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{P_j(z)}{P_{j+1}(x)} + \frac{P_n(z)}{(x-z)P_n(x)}$$

lorsque les dénominateurs ne s'annulent pas. En multipliant par $F(z)/(2\pi i)$ et en intégrant le long d'une courbe $\mathscr{C}$ fermée directe contenue dans le demi-plan $\Re(x) > 0$ et entourant les points $1, 2, \dots, n$ et $z$, on obtient que

$$F(z) = \sum_{j=0}^{n-1} A(j)\, \frac{P_j(z)}{j!} + R_n(z)$$

avec, pour tout $n \geq 0$ et tout $j = 0, \ldots, n-1$,

$$A(j) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathscr{C}} \frac{j!}{P_{j+1}(x)} F(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad R_n(z) = \frac{P_n(z)}{n!} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathscr{C}} \frac{n!}{(x-z)P_n(x)} F(x)\,\mathrm{d}x.$$

Le lemme 1 s'applique à la fonction $F$ considérée ici et on obtient donc que $|A(j)| \ll \log(j+2)/(j+1)^\tau$.

Il ne nous reste donc plus qu'à montrer que $R_n(z)$ tend vers 0 lorsque $\Re(z) > \rho$. Fixons $z$ tel que $\Re(z) \geq \delta > 0$, avec $\delta$ choisi ultérieurement : toujours grâce au lemme 1, on sait que

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathscr{C}} \frac{n!}{(x-z)P_n(x)} F(x)\,\mathrm{d}x \right| \ll_\delta (n+1)^\rho \log(n+2).$$

Par ailleurs, il résulte de la formule de Stirling que l'on a pour tout complexe $u$ la majoration

$$\frac{|P_n(u)|}{n!} \ll_u \frac{1}{(n+1)^{\Re(u)}}.$$

On en déduit donc que $|R_n(z)| \ll_{\delta,z} (n+1)^{\rho-\Re(z)} \log(n+2)$ pourvu que $\Re(z) \geq \delta$. Il suffit donc de choisir $\delta$ arbitrairement proche de $\rho$ pour obtenir que $R_n(z) \to 0$ quand $n \to +\infty$ pour tout $z$ tel que $\Re(z) > \rho$. La convergence de la série est d'ailleurs normale sur tout domaine $\Re(z) \geq \delta > \rho$. □

## 5. Démonstration du théorème 1 pour $d \geq 2$

L'idée de la démonstration est la même que celle employée dans le cas $d = 1$. On commence par déduire le théorème 1 du théorème 2, que l'on montre ensuite. La preuve du théorème 2 pour $d \geq 2$ fait apparaître quelques différences avec le cas $d = 1$ : on démontre en détail le cas $d = 2$. Ces différences se reproduisent dans le cas $d \geq 3$, que l'on traite alors plus rapidement car les seules difficultés sont dues aux notations.

On montrera que, dans le théorème 2, les coefficients $A(n_1, \ldots, n_d)$ sont donnés par

$$A(n_1, \ldots, n_d) = \frac{1}{(2\pi i)^d} \int_{\mathscr{C}_1 \times \cdots \times \mathscr{C}_d} \frac{n_1! \cdots n_d!}{P_{n_1+1}(x_1) \cdots P_{n_d+1}(x_d)} F(x_1, \ldots, x_d)\,\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_d,$$

où, pour chaque $j \in \{1, \ldots, d\}$, le contour fermé direct $\mathscr{C}_j$ est contenu dans le demi-plan $\Re(x_j) > 0$ et entoure les points $1, 2, \ldots, n_j + 1$. En appliquant le théorème des résidus à cette intégrale, on vérifie alors que l'on a

$$A(n_1, \ldots, n_d) = (-1)^{n_1+\cdots+n_d} \sum_{j_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{j_d=0}^{n_d} (-1)^{j_1+\cdots+j_d} \binom{n_1}{j_1} \cdots \binom{n_d}{j_d} F(j_1+1, \ldots, j_d+1)$$

et l'hypothèse $(i)$ du théorème 1 nous assure donc que $A(n_1, \ldots, n_d) \in \mathbb{Z}$. Compte-tenu de la majoration (7), si $1/2 - \beta < \alpha < 1/2$, on obtient donc l'existence de $d$ entiers $N_1 \geq 0, \ldots, N_d \geq 0$ tels que, pour chaque $j$ fixé de $\{1, \ldots, d\}$, on ait $A(n_1, \ldots, n_d) = 0$

pour tout $n_j \geq N_j + 1$ et tous $n_1, \ldots, n_{j-1}, n_{j+1}, \ldots, n_d \geq 0$. Le développement (6) se réduit donc à

$$F(\underline{z}) = \sum_{n_1=0}^{N_1} \cdots \sum_{n_d=0}^{N_d} A(n_1, \ldots, n_d) \frac{P_{n_1}(z_1) \cdots P_{n_d}(z_d)}{n_1! \cdots n_d!} \in \mathbb{Q}[z_1, \ldots, z_d].$$

Ceci prouve le théorème 1 modulo le théorème 2. On démontre maintenant ce dernier en détail dans le cas $d = 2$ et on esquisse ensuite le cas général. Rappelons que la condition $1/2 - \beta < \alpha < 1/2$, qui nous a servi ci-dessus, n'est pas une hypothèse du théorème 2.

5.1. **Démonstration du théorème 2 pour** $d = 2$**.** Pour simplifier, on pose $z_1 = z$ et $z_2 = w$. On commence par multiplier l'identité d'Hermite par elle-même de la façon suivante :

$$\frac{1}{(x-z)(y-w)} = \left( \sum_{j=0}^{n-1} \frac{P_j(z)}{P_{j+1}(x)} + \frac{P_n(z)}{(x-z)P_n(x)} \right) \cdot \left( \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P_k(w)}{P_{k+1}(y)} + \frac{P_n(w)}{(y-w)P_n(y)} \right).$$

En développant, on a donc

$$\frac{1}{(x-z)(y-w)} = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P_j(z)}{P_{j+1}(x)} \frac{P_k(w)}{P_{k+1}(y)} + \frac{P_n(w)}{(y-w)P_n(y)} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{P_j(z)}{P_{j+1}(x)}$$
$$+ \frac{P_n(z)}{(x-z)P_n(x)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P_k(w)}{P_{k+1}(y)} + \frac{P_n(z)P_n(w)}{(x-z)(y-w)P_n(x)P_n(y)}. \quad (13)$$

Soit $\delta > 0$ (que l'on précisera ultérieurement) tel que $\Re(z) \geq \delta$ et $\Re(w) \geq \delta$. Donnons-nous deux courbes fermées directe $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ contenues dans les demi-plans $\Re(x) > 0$ et $\Re(y) > 0$ respectivement : on suppose que $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ entourent les points $\{z, 1, \ldots, n\}$ et $\{w, 1, \ldots, n\}$, respectivement. En multipliant (13) par $F(x,y)/(2\pi i)^2$ puis en intégrant l'identité résultante le long de $\mathscr{C}_1 \times \mathscr{C}_2$, on obtient donc que

$$F(z,w) = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} A(j,k) \frac{P_j(z)P_k(w)}{j!\, k!} + R_{1,n}(z,w) + R_{2,n}(z,w) + R_{3,n}(z,w).$$

On a les expressions

$$A(j,k) = \frac{j!k!}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\mathscr{C}_1 \times \mathscr{C}_2} \frac{F(x,y)}{P_{j+1}(x)P_{k+1}(y)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$R_{1,n}(z,w) = \frac{P_n(w)}{n!} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{P_j(z)}{j!} \frac{j!n!}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\mathscr{C}_1 \times \mathscr{C}_2} \frac{F(x,y)}{(y-w)P_n(y)P_{j+1}(x)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$R_{2,n}(z,w) = \frac{P_n(z)}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P_k(z)}{k!} \frac{k!n!}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\mathscr{C}_1 \times \mathscr{C}_2} \frac{F(x,y)}{(x-z)P_n(x)P_{k+1}(y)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

et

$$R_{3,n}(z,w) = \frac{P_n(z)P_n(w)}{n!^2} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\mathscr{C}_1 \times \mathscr{C}_2} \frac{n!^2 F(x,y)}{(x-z)(y-w)P_n(x)P_n(y)} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Nous allons déterminer $\delta$ tel que la somme $R_{1,n}(z,w) + R_{2,n}(z,w) + R_{3,n}(z,w)$ tende vers 0 et tel que

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A(j,k) \frac{P_j(z)P_k(w)}{j!\,k!}$$

converge absolument (et même normalement) vers $F(z,w)$.

– *Majoration de* $R_{1,n}(z,w)$. L'hypothèse de croissance (5) sur $F$ permet de séparer les variables et on est donc ramené au cas en une variable. L'intégrale sur $\mathscr{C}_1$ se majore grâce à l'estimation $(ii)$ du lemme 1 tandis que l'on utilise l'estimation $(i)$ de ce lemme pour l'intégrale sur $\mathscr{C}_2$. On obtient alors

$$\left| \frac{j!n!}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\mathscr{C}_1 \times \mathscr{C}_2} \frac{F(x,y)}{(y-w)P_n(y)P_{j+1}(x)} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \right| \ll \frac{(n+1)^{\rho} \log(j+2) \log(n+2)}{(j+1)^{\tau}}$$

et on en déduit que

$$|R_{1,n}(z,w)| \ll (n+1)^{\rho} \log(n+2) \, \frac{|P_n(w)|}{n!} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\log(j+2)}{(j+1)^{\tau}} \frac{|P_j(z)|}{j!}.$$

On utilise maintenant de nouveau le fait que $|P_m(u)|/m! \ll_u (m+1)^{-\Re(u)}$ pour tout complexe $u$, d'où l'on déduit que

$$|R_{1,n}(z,w)| \ll \frac{\log(n+2)^2}{(n+1)^{\Re(w)-\rho}} \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{(j+1)^{\Re(z)+\tau}}.$$

Puisque $\rho + \tau = 1$, il suffit de choisir $\delta$ supérieur à et arbitrairement proche de $\rho$ pour que la somme à droite converge quand $n \to +\infty$. La condition $\Re(w) \geq \delta > \rho$ assure que la facteur devant cette somme tend vers 0. Donc $R_{1,n}(z,w) \to 0$ quand $n \to +\infty$ pour tous $z, w$ tels que $\Re(z), \Re(w) > \rho$.

– *Majoration de* $R_{2,n}(z,w)$. Ce terme se traite de manière symétrique à $R_{1,n}(z,w)$ et il tend donc vers 0 pour tous $z, w$ tels que $\Re(z), \Re(w) > \rho$.

– *Majoration de* $R_{3,n}(z,w)$. En appliquant deux foix l'estimation $(ii)$ du lemme 1, on obtient

$$\begin{aligned} |R_{3,n}(z,w)| &\ll (n+1)^{2\rho} \log(n+2)^2 \frac{|P_n(z)P_n(w)|}{n!^2} \\ &\ll \frac{\log(n+2)^2}{(n+1)^{\Re(z)+\Re(w)-2\rho}}. \end{aligned}$$

Le membre de droite tend vers 0 pour tous $z, w$ tels que $\Re(z), \Re(w) > \rho$.

– *Majoration de $A(j,k)$ et convergence absolue de la série.* L'expression intégrale pour $A(j,k)$ nous permet d'appliquer l'estimation $(i)$ du lemme 1 aux deux intégrales sur $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ séparément. On obtient que

$$|A(j,k)| \ll \frac{\log(j+2)\log(k+2)}{(j+1)^{\tau}(k+1)^{\tau}}.$$

Comme $R_{1,n}(z,w)+R_{2,n}(z,w)+R_{3,n}(z,w)\to 0$, on a pour l'instant prouvé que

$$F(z,w) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} A(j,k)\,\frac{P_j(z)P_k(w)}{j!\,k!}$$

pour $\Re(z),\Re(w)>\rho$. Mais on peut dire mieux puisque

$$\left|A(j,k)\frac{P_j(z)P_k(w)}{j!\,k!}\right| \ll \frac{\log(j+2)\log(k+2)}{(j+1)^{\Re(z)+\tau}(k+1)^{\Re(w)+\tau}}.$$

La série double converge donc absolument pour $\Re(z),\Re(w)>\rho$ ; elle converge même normalement sur tout domaine de la forme $\Re(z),\Re(w)\geq\delta$ avec $\delta>\rho$.

5.2. **Démonstration du théorème 2 pour $d\geq 3$.** On se contente d'indiquer les grandes lignes car le principe est rigoureusement le même que pour $d=2$. L'identité d'Hermite nous donne

$$\prod_{j=1}^{d}\frac{1}{x_j-z_j} = \prod_{j=1}^{d}\left(\sum_{k_j=0}^{n-1}\frac{P_{k_j}(z_j)}{P_{k_j+1}(x_j)} + \frac{P_n(z_j)}{(x_j-z_j)P_n(x_j)}\right)$$

lorsque les dénominateurs ne s'annulent pas. Supposons que $\Re(z_j)\geq\delta>\rho$. Pour chaque $j\in\{1,2,\ldots,d\}$, notons $\mathscr{C}_j$ un contour fermé direct contenu dans le demi-plan $\Re(x_j)>0$ et entourant les points $z_j,1,2,\ldots,n$. Comme précédemment, on obtient

$$F(\underline{z}) = \sum_{k_1=0}^{n-1}\cdots\sum_{k_d=0}^{n-1} A(k_1,\ldots,k_d)\frac{P_{k_1}(z_1)\cdots P_{k_d}(z_d)}{k_1!\cdots k_d!} + R_n(\underline{z})$$

où

$$A(k_1,\ldots,k_d) = \frac{1}{(2\pi i)^d}\int\limits_{\mathscr{C}_1\times\cdots\times\mathscr{C}_d}\frac{k_1!\cdots k_d!}{P_{k_1+1}(x_1)\cdots P_{k_d+1}(x_d)}\,F(x_1,\ldots,x_d)\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_d \qquad (14)$$

et $R_n(\underline{z})$ est la somme de $2^d-1$ expressions de la forme

$$\frac{P_n(z_{h_1})\cdots P_n(z_{h_L})}{n!^L}\sum_{k_1=0}^{n-1}\cdots\sum_{k_\ell=0}^{n-1}\frac{P_{k_1}(z_{j_1})\cdots P_{k_\ell}(z_{j_\ell})}{k_1!\cdots k_\ell!}$$
$$\times\frac{1}{(2\pi i)^d}\int\limits_{\mathscr{C}_1\times\cdots\times\mathscr{C}_d}\frac{k_1!\cdots k_\ell!}{P_{k_1+1}(x_{j_1})\cdots P_{k_\ell+1}(x_{j_\ell})}\frac{n!^L\,F(x_1,\ldots,x_d)\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_d}{(x_{h_1}-z_{h_1})P_n(x_{h_1})\cdots(x_{h_L}-z_{h_L})P_n(x_{h_L})} \qquad (15)$$

où $0\leq\ell<d$, $L=d-\ell$ et $\{h_1,\ldots,h_L\}\sqcup\{j_1,\ldots,j_\ell\}$ est une partition de $\{1,2,\ldots,d\}$.

L'hypothèse de croissance (5) sur $F$ permet de séparer les variables et de traiter chacune des $d$ intégrales dans (15) séparément à l'aide du lemme 1 (au moyen des majorations ($i$) ou ($ii$) selon le cas). En notant $R$ l'expression dans (15), on obtient comme dans le cas $d = 2$ la majoration

$$|R| \ll \left( \prod_{m=1}^{L} \frac{\log(n+2)}{(n+1)^{\Re(z_{h_m})-\rho}} \right) \cdot \left( \prod_{m=1}^{\ell} \sum_{k_m=0}^{n} \frac{\log(k_m+2)}{(k_m+1)^{\Re(z_{j_m})+\tau}} \right)$$

qui tend vers 0 quand $n \to +\infty$ sous l'hypothèse que $\Re(z_j) > \rho$ pour tout $j = 1, \ldots, d$. Le reste $R_n(\underline{z})$ tend donc vers 0 sous la même condition.

Pour majorer $A(k_1, \ldots, k_d)$ au moyen de (14), on remarque que l'hypothèse de croissance (5) permet de nouveau de séparer les intégrales et, grâce à la majoration ($i$) du lemme 1, on obtient (7). Cette dernière majoration assure également que la série multiple converge normalement lorsque $\Re(z_j) \geq \delta > \rho$, $j = 1, \ldots, d$.

## 6. Une alternative aux théorèmes 1 et 2

Les mêmes méthodes que celles employées pour démontrer les théorèmes 1 et 2 permettent de d'obtenir les résultats suivants.

Soit $F$ une fonction holomorphe sur $\{\underline{z} \in \mathbb{C}^d : \Re(z_j) > 0, j = 1, \ldots, d\}$ telle qu'il existe des réels $c > 0$, $\alpha$ et $\beta$ tels que l'on ait pour tout $\underline{z}$ vérifiant $\Re(z_j) > 0$ :

$$|F(\underline{z})| \leq c \prod_{j=1}^{d} \frac{e^{|z_j|\psi(\theta_j)}}{|z_j|^\alpha (1+|z_j|)^\beta}, \tag{16}$$

c'est-à-dire que l'on remplace $\Re(z_j)^\alpha$ par $|z_j|^\alpha$, ce qui est bien sûr moins bon que (5) pour $c > 0$, $\alpha > 0$ et $\beta$ fixés. La seule coïncidence a lieu pour $\alpha = 0$. On a alors un théorème de développement en série de Newton multiple.

**Théorème 3.** *Soit $F$ une fonction vérifiant l'hypothèse de croissance* (16) *pour des réels $\alpha$ et $\beta$. Il existe alors une multi-suite de complexes $(A(n_1, \ldots, n_d))_{n_1, \ldots, n_d \geq 0}$ telle que l'on ait*

$$F(\underline{z}) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_d=0}^{\infty} A(n_1, \ldots, n_d) \frac{P_{n_1}(z_1) \cdots P_{n_d}(z_d)}{n_1! \cdots n_d!}$$

*pour $\Re(z_j) > \max(1/2,\ \alpha,\ 3/2 - \alpha - \beta)$, $j = 1, \ldots, d$, où la série converge absolument.*

*De plus, on a*

$$|A(n_1, \ldots, n_d)| \ll \prod_{j=1}^{d} \frac{\log(n_j+2)}{(n_j+1)^{\min(1/2,\, 1-\alpha,\, \alpha+\beta-1/2)}}$$

*pour tout $n_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, d$.*

On en déduit le

**Théorème 4.** *Si $F$ vérifie la condition* (16) *avec $1/2 - \beta < \alpha < 1$ et que $F(\mathbb{N}^d) \subset \mathbb{Z}$, alors $F$ est un polynôme à coefficients rationnels.*

La condition de croissance (16) est plus contraignante que (5) mais la condition de convergence $\Re(z_j) > \max(1/2, \alpha, 3/2 - \alpha - \beta)$ dans le théorème 3 est meilleure que la condition $\Re(z_j) > \max(1/2 + \alpha, 3/2 - \alpha - \beta)$ du théorème 2 (qui, rappelons-le, n'est intéressant que si $\alpha \geq 0$). De plus, elle permet une plage d'utilisation plus grande dans le théorème 4, puisque l'on remplace les contraintes $\alpha \geq 0$ et $1/2 - \beta < \alpha < 1/2$ du théorème 1 par $1/2 - \beta < \alpha < 1$. Les démonstrations sont basées sur un analogue du lemme 1 que le lecteur énoncera sans peine avec les indications suivantes.

– Au cours de la majoration de $|I_{1,n}|$ : dans l'estimation (11) et ses conséquences, il faut remplacer partout $\cos(\theta)^{2\alpha}$ par $\cos(\theta)^{\alpha}$. La majoration de $|I_{1,n}|$ devient finalement $\mathcal{O}\big((n+1)^{-\min(1/2,\, 3/2-\alpha-\beta)} \log(n+2)\big)$.

– Au cours de la majoration de $|I_{2,n}|$ : le facteur $1/\Re(x)^{\alpha} = (2n)^{\alpha}$ devient $1/|x|^{\alpha} = |1/2n + i\xi|^{-\alpha}$ qui est de nouveau un $\mathcal{O}(n^{\alpha})$. La majoration de $|I_{2,n}|$ par $\mathcal{O}((n+1)^{-(1-\alpha)})$ demeure valable.

## Bibliographie


[1] D. Adam, *Car-Pólya and Gel'fond's theorems for* $\mathbf{F}_q[T]$, Acta Arith. **115** (2004), 287–303.

[2] V. Avanissian et R. Gay, *Sur une transformation des fonctionnelles analytiques et ses applications aux fonctions entières de plusieurs variables*, Bull. Soc. Math. France **103** (1975), no. 3, 341–384.

[3] A. Baker, *A note on integral integer-valued functions of several variables*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **63** (1967), 715–720.

[4] J.-P. Bézivin, *Une généralisation à plusieurs variables d'un résultat de Gel'fond*, Analysis **4** (1984), no. 1-2, 125–141.

[5] R. C. Buck, *Integral valued entire functions*, Duke Math. J. **15** (1948), 879–891.

[6] P. Bundschuh, *Arithmetische Eigenschaften ganzer Funktionen mehrerer Variablen*, J. reine angew. Math. **313** (1980), 116–132.

[7] P. Bundschuh et W. Zudilin, *On theorems of Gel'fond and Selberg concerning integral-valued entire functions*, J. Approx. Theory **130** (2004), no. 2, 164–178.

[8] M. Car, *Pólya's theorem of* $\mathbf{F}_q[T]$, J. Number Theory **66** (1997), no. 1, 148–171.

[9] M. Car, *Gel'fond-Gramain's theorem for function fields*, Jungnickel, Dieter (ed.) et al., Finite fields and applications. Proceedings of the fifth international conference on finite fields and applications, University of Augsburg, Germany, August 2-6, 1999. Berlin : Springer, 70–80 (2001).

[10] F. Delamette, *Théorème de Pólya en caractéristique finie*, Acta Arith. **106** (2003), no. 2, 159–170.

[11] G. A. Fridman, *Entire integer-valued functions*, en russe, Mat. Sb. (N.S.) **75 (117)** (1968), 417–431.

[12] S. Fukasawa, *Über ganzwertige ganze Funktionen*, Tôhoku Math. Journ. **29** (1928), 131–144.

[13] A. O. Gel'fond, *Sur un théorème de M. G. Pólya*, Atti Reale Accad. Naz. Lincei **X** (1929), 569–574.

[14] A. O. Gel'fond, *Sur les fonctions entières qui prennent des valeurs entières aux points* $\beta^n$, en russe, Mat. Sb. (N.S.) **40** (1933), 42–47.

[15] A. O. Gel'fond, *Calcul des différences finies*, traduction en français par G. Rideau, Collection Universitaire de Mathématiques **XII**, Dunod, Paris 1963.

[16] F. Gramain, *Fonctions entières arithmétiques*, Séminaire Delange-Pisot-Poitou 19e année : 1977/1978, Fasc. 1, Exp. No. 8, 14 pages.

[17] F. Gramain, *Sur le théorème de Fukasawa-Gel'fond*, Invent. Math. **63** (1981), no. 3, 495–506.

[18] F. Gross, *Entire functions of several variables with algebraic derivatives at certain algebraic points*, Pacific J. Math. **31** (1969), 693–701.

[19] G. H. Hardy, *On a theorem of Mr G. Pólya*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **19** (1917), 60–63.

[20] D. L. Hilliker et E. G. Straus, *Some p-adic versions of Polya's theorem on integer valued analytic functions*, Proc. Am. Math. Soc. **26** (1970), 395–400.

[21] R. Lagrange, *Mémoire sur les séries d'interpolation*, Acta Math. **64** (1935), 1–80.

[22] V. Laohakosol, J. H. Loxton et A. J. van der Poorten, *Integer-valued p-adic functions*, Number theory. Vol. II. Diophantine and algebraic, Proc. Conf., Budapest/Hung. 1987, Colloq. Math. Soc. János Bolyai **51** (1990), 829–849.

[23] Y. Martin, *Sur les séries d'interpolation*, Ann. Sci. École Norm. Sup **66** (1949), sér. 3, 311–366.

[24] N.-E. Nörlund, *Leçons sur les séries d'interpolation*, Collection de monographies sur la théorie des fonctions, Gauthier-Villars, 1926.

[25] J. Pila et F. Rodriguez Villegas, *Concordant sequences and integral-valued entire functions*, Acta Arith. **88** (1999), 239–268.

[26] J. Pila, *Entire functions having a concordant value sequence*, Israel J. Math. **134** (2003), 317–343.

[27] C. Pisot, *Sur les fonctions arithmétiques analytiques à croissance exponentielle*, C. R. Acad. Sci. Paris **222** (1946), 988–990.

[28] C. Pisot, *Sur les fonctions analytiques arithmétiques et presque arithmétiques*, C. R. Acad. Sci. Paris **222** (1946), 1027–1028.

[29] G. Pólya, *Über ganzwertige ganze Funktionen*, Palermo Rend. **40** (1916), 1–16 (1916).

[30] G. Pólya, *Über ganze ganzwertige Funktionen*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, (1920), 1–10.

[31] G. Pólya et G. Szegö, *Problems anf Theorems in Analysis I*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **193**, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1972.

[32] D. Sato, *Utterly integer valued entire functions. I*, Pacific J. Math. **118** (1985), no. 2, 523–530.

[33] A. Selberg, *Über einen Satz von A. Gelfond*, Arch. Math. Naturvid. **44** (1941), 159–170.

[34] A. Selberg, *Über ganzwertige ganze transzendente Funktionen*, Arch. Math. Naturvid. **44** (1941), 45–52 et 171–181.

[35] M. Waldschmidt, *Pólya's theorem by Schneider's method*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **31** (1978), no. 1-2, 21–25.

[36] M. Welter, *A new class of integer-valued entire functions*, J. reine angew. Math. **583** (2005), 175–192.

[37] M. Welter, *Sur un théorème de Gel'fond-Selberg et une conjecture de Bundschuh-Shiokawa*, Acta Arith. **116** (2005), no. 4, 363–385.

[38] K. Yoshino, *Pólya's theorem for non entire functions*, Proceedings of the 11th winter school on abstract analysis (Železná Ruda, 1983), Rend. Circ. Mat. Palermo (2) (1984), Suppl. No. 3, 385–395.

Institut Fourier, CNRS UMR 5582 / Université Grenoble 1, 100 rue des Maths, BP 74, 38402 Saint-Martin d'Hères cedex, France

*E-mail address*: tanguy.rivoal@ujf-grenoble.fr

Mathematisches Institut, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, Beringstrasse 1, D-53115 Bonn, Germany

*E-mail address*: welter@math.uni-bonn.de