SUITES DE STERN-BROCOT ET FONCTION DE MINKOWSKI

TANGUY RIVOAL

1. Introduction

Notons $\mathscr{T}_0 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right\}$. On définit récursivement une famille d'ensembles finis $(\mathscr{T}_n)_{n\geq 0}$ de la manière suivante. L'ensemble $\mathscr{T}_m$ étant supposé construit, constitué de certains rationnels de $[0,1]$, l'ensemble $\mathscr{T}_{m+1}$ contient :

(i) tous les éléments de $\mathscr{T}_m$;

(ii) tous les rationnels de la forme $\frac{a+b}{c+d}$ où $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont des éléments consécutifs de $\mathscr{T}_m$.

Le rationnel $\frac{a+b}{c+d}$ est dit le médiant de $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ et il est facile de voir que si $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ alors $\frac{a}{b} < \frac{a+b}{c+d} < \frac{c}{d}$. On a par exemple

$$\begin{aligned}
\mathscr{T}_0 &= \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right\}\\
\mathscr{T}_1 &= \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\right\}\\
\mathscr{T}_2 &= \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}\right\}\\
\mathscr{T}_3 &= \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}\right\}.
\end{aligned}$$

On vérifie que $\mathscr{T}_n$ est de cardinal 2^n+1 pour tout entier $n \geq 0$. Le plus grand dénominateur possible d'un élément de $\mathscr{T}_n$ est F_{n-2}, le $(n-2)$-ième terme de la suite de Fibonacci (définie par $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ avec $F_0 = 0$, $F_1 = 1$). Il existe une représentation classique des suites $\mathscr{T}_n \setminus \mathscr{T}_{n-1}$ à l'aide d'un arbre, que l'on ne reproduit pas ici. Tout comme les ensembles de Farey $\{\frac{p}{q} : (p,q) = 1 \text{ et } p \geq 1,\ 1 \leq q \leq n\}$, les ensembles ordonnés $\mathscr{T}_n$ ont la propriété que n'importe lequel de leurs termes $\neq 0, 1$ est le médiant de ses deux voisins ; cela se démontre par récurrence sur n.

Il existe une description agréable des suites $\mathscr{T}_n$ en terme de fractions continues (qui se visualise d'ailleurs bien en suivant des chemins dans l'arbre de Stern-Brocot). Rappelons que tout irrationnel x s'écrit d'une unique manière comme une fraction continue $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ avec $a_j \geq 1$ et que tout rationnel x s'écrit de manière unique sous la forme $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k]$

Date: 11 novembre 2008.

avec $a_0 = \lfloor x \rfloor$, $a_j \geq 1$, $j = 1, \ldots, k-1$, et $a_k \geq 2$. On a alors que

$$\mathscr{T}_n \setminus \mathscr{T}_{n-1} = \bigcup_{k=1}^{n} \Big\{ [0; a_1, a_2, \ldots, a_k] : \sum_{j=1}^{k} a_j = n+1, \ a_k \geq 2 \Big\}.$$

pour tout entier $n \geq 1$. Un exercice facile de dénombrement montre que l'ensemble

$$\Big\{ [0; a_1, a_2, \ldots, a_k] : \sum_{j=1}^{k} a_j = n+1, \ a_k \geq 2 \Big\}$$

est de cardinal $\binom{n-1}{k-1}$.

La fonction $?(x)$ de Minkowski est définie sur $]0,1[$ par

$$?(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2^{a_1 + \cdots + a_k - 1}},$$

avec arrêt de la somme au dernier quotient partiel de x s'il est rationnel. Cette fonction est continue, croissante mais à dérivée presque partout nulle. Introduite en 1904 par Minkowski afin de donner un exemple de bjection explicite entre les nombres quadratiques réels et les nombres rationnels de $]0,1[$, cette fonction a connu un regain d'intérêt ces dernières années ; voir par exemple [1, 3] pour détails et références.

Bien que les objets en jeu soient assez anciens, le résultat suivant n'a été observé et démontré dans [2] qu'en 1998 : *Pour tout* $x \in]0,1]$, *on a*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n + 1} \cdot \#\big\{ t \in \mathscr{T}_n : t \leq x \big\} = ?(x). \tag{1.1}$$

La fonction $?(x)$ est donc la fonction de distribution limite des rationnels énumérés par le procédé de Stern-Brocot. Le but de cette note est de proposer une version "finie" de (1.1), qui semble nouvelle. De plus, la méthode est directe et diffère en cela de celle présentée dans [2].

Théorème 1. (i) *Pour tout nombre irrationnel* $x \in]0,1[$ *dont le développement en fraction continue est* $[0; a_1, a_2, \ldots]$, *on a*

$$\#\big\{ t \in \mathscr{T}_N : t \leq x \big\} = \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k-1} 2^{\max(N+1-S_k, 0)} + \frac{1}{2}(1 + (-1)^N), \tag{1.2}$$

où $S_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$.

(ii) *Pour tout nombre rationnel* $x \in]0,1[$ *dont le développement en fraction continue est* $[0; a_1, a_2, \ldots, a_m]$ *avec* $a_m \geq 2$, *on a*

$$\#\big\{ t \in \mathscr{T}_N : t \leq x \big\} = \sum_{k=1}^{\min(m,N)} (-1)^{k-1} 2^{\max(N+1-S_k, 0)} + \frac{1}{2}(1 + (-1)^N) + \varepsilon_{N,x}, \tag{1.3}$$

où

$$\varepsilon_{N,x} = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad N < S_m; \\ -\frac{1}{2}\big(1+(-1)^m\big) \quad \text{si} \quad N \geq S_m. \end{cases}$$

Remarques 1. À N fixé, lorsque dans (1.3) on fait tendre m vers l'infini en générant une fraction continue irrationnelle de quotients partiels $(a_k)_{k\geq 1}$, on retrouve (1.2). Ceci est cohérent avec le fait que la fonction $x \mapsto \#\big\{t \in \mathscr{T}_N : t \leq x\big\}$ est continue en tout irrationnel. On pourrait donc ne démontrer la formule que dans le cas rationnel. Cependant, la démonstration de (1.2) est un peu plus simple que celle de (1.3) et sert de préparation à ce cas.

Salem a montré que la fonction $?(x)$ est hölderienne d'exposant $\log(2)/2\log(\phi) < 1$, cet exposant étant optimal car atteint au voisinage du nombre d'or $\phi := \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ et de $1-\phi$. Ceci explique heuristiquement pourquoi les éléments de suites $\mathscr{T}_n$ sont visuellement le plus concentrés au voisinage de ϕ et $1-\phi$. Une explication rigoureuse de ce phénomène pourrait probablement être donnée en étudiant finement les formules données au Théorème 1.

Corollaire 1 ([2])**.** *Pour tout $x \in [0,1]$, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^N+1} \cdot \#\big\{t \in \mathscr{T}_N : t \leq x\big\} = ?(x).$$

La preuve du Corollaire 1 est facile. Lorsque x est rationnel, dès que $N \geq S_m$ (donc aussi $N \geq m$), on a

$$\frac{1}{2^N} \cdot \#\big\{t \in \mathscr{T}_N : t \leq x\big\} = \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k-1}}{2^{S_k-1}} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{2^N}\Big) = ?(x) + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{2^N}\Big).$$

Lorsque x est irrationnel, posons $u_N = \min\{k \geq 1 : S_k \geq N+1\}$. L'entier u_N est défini pour tout N et tend vers $+\infty$ avec N puisque $(S_k)_{k\geq 1}$ est une suite d'entiers strictement croissante. On a alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^N} \cdot \#\big\{t \in \mathscr{T}_N : t \leq x\big\} &= \sum_{k=1}^{u_N} \frac{(-1)^{k-1}}{2^{S_k-1}} + \frac{1}{2^N} \sum_{k=u_N+1}^{N} (-1)^{k-1} + \frac{1+(-1)^N}{2^{N+1}} \\ &= ?(x) + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{2^N}\Big), \end{aligned}$$

ce qui clôt la preuve du corollaire.

2. Preuve du Théorème 1

Pour tout $x \in [0,1]$, posons

$$G(N,x) = \#\big\{t \in \mathscr{T}_N : t \leq x\big\}.$$

Le but de est de donner une formule explicite de $G(N,x)$ en terme des quotients partiels de x.

2.1. **Le cas x irrationnel.** Considérons le cardinal
$$F(k,n,x) = \#\Big\{[0;b_1,\ldots,b_k] \le x : b_1+\cdots+b_k = n,\ b_k \ge 2\Big\}.$$
La fraction continue (infinie) de x est $[0;a_1,a_2,\ldots]$. Notons $T(x)=\{1/x\}$.

– Si $b_1 > a_1$, les $b_2,\ldots,b_k$ peuvent prendre toutes valeurs telles que $b_1+\cdots+b_k=n$ et $b_k \ge 2$.

Si $b_1 = a_1$, les $b_2,\ldots,b_k$ peuvent prendre toutes valeurs telles que $b_1+\cdots+b_k=n$, $b_k \ge 2$ et $[0;b_2,\ldots,b_k] \ge T(x)$.

Il vient alors que
$$\begin{aligned}\#\Big\{[0;b_2,\ldots,b_k] &\ge T(x) : a_1+b_2\cdots+b_k=n,\ b_k\ge 2\Big\}\\ &= \#\Big\{[0;b_2,\ldots,b_k] \le x : a_1+b_2+\cdots+b_k=n,\ b_k\ge 2\Big\}\\ &\qquad - \#\Big\{[0;b_2,\ldots,b_k] < T(x) : a_1+b_2+\cdots+b_k=n,\ b_k\ge 2\Big\}.\end{aligned}$$
et comme $T(x)$ est irrationnel, on a aussi
$$\begin{aligned}\#\Big\{[0;b_2,\ldots,b_k] &< T(x) : a_1+b_2+\cdots+b_k=n,\ b_k\ge 2\Big\}\\ &= \#\Big\{[0;b_2,\ldots,b_k] \le T(x) : a_1+b_2+\cdots+b_k=n,\ b_k\ge 2\Big\}.\end{aligned}$$
– En regroupant les deux cas, on a donc
$$\begin{aligned}F(k,n,x) &= \#\Big\{[0;b_2,\ldots,b_k] : b_2+\cdots+b_k \le n-a_1,\ b_k\ge 2\Big\}\\ &\qquad - \#\Big\{[0;b_2,\ldots,b_k] \le T(x) : b_2+\cdots+b_k = n-a_1,\ b_k\ge 2\Big\},\end{aligned}$$
que l'on peut simplifier davantage. En effet, par définition, on a
$$\#\Big\{[0;b_2,\ldots,b_k] \le T(x) : b_2+\cdots+b_k = n-a_1,\ b_k\ge 2\Big\} = F(k-1,n-a_1,T(x))$$
et
$$\begin{aligned}&\#\Big\{[0;b_2,\ldots,b_k] : b_2+\cdots+b_k \le n-a_1,\ b_k\ge 2\Big\}\\ &= \sum_{j=2}^{n-a_1} \#\Big\{[0;b_2,\ldots,b_k] : b_2+\cdots+b_k = j,\ b_k\ge 2\Big\}\\ &= \sum_{j=2}^{n-a_1} \binom{j-2}{k-2} = \binom{n-a_1-1}{k-1}.\end{aligned}$$
D'où finalement l'identité récursive
$$F(k,n,x) = \binom{n-a_1-1}{k-1} - F(k-1,n-a_1,T(x)). \tag{2.1}$$

Comme $F(0, m, y) = 0$ en toute circonstance (que m soit positif ou négatif), il découle de (2.1) que

$$F(k, n, x) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \binom{n - S_j - 1}{k - j},$$

où $S_j = a_1 + a_2 + \cdots + a_j$.

– On peut maintenant calculer explicitement $G(n, x)$. En effet, on a

$$\begin{aligned} G(N, x) &= \#\{t \in \mathscr{T}_1 : t \leq x\} + \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} F(k, n+1, x) \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \binom{n - S_j}{k - j} \\ &= 1 + \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j-1} \sum_{k=j}^{N} \sum_{n=k}^{N} \binom{n - S_j}{k - j}. \end{aligned}$$

On utilise ici une identité hypergéométrique classique pour obtenir que

$$\sum_{n=k}^{N} \binom{n - S_j - 1}{k - j} = \binom{N - S_j + 1}{k - j + 1} - \binom{k - S_j}{k - j + 1} = \binom{N - S_j + 1}{k - j + 1}.$$

La seconde égalité résulte de ce que $S_j \geq j$ et donc $\binom{k-S_j}{k-j+1} = 0$. On a donc

$$G(N, x) = 1 + \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j-1} \sum_{k=j}^{N} \binom{N - S_j + 1}{k - j + 1}.$$

Comme

$$\sum_{k=j}^{N} \binom{N - S_j + 1}{k - j + 1} = \sum_{k=1}^{N-j+1} \binom{N - S_j + 1}{k} = \sum_{k=1}^{N-S_j+1} \binom{N - S_j + 1}{k} = 2^{\max(N - S_j + 1, 0)} - 1,$$

il vient

$$\begin{aligned} G(N, x) &= \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j-1} 2^{\max(N - S_j + 1, 0)} + 1 + \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j} \\ &= \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j-1} 2^{\max(N - S_j + 1, 0)} + \frac{1}{2}(1 + (-1)^N). \end{aligned}$$

2.2. **Le cas x rationnel.** Notons $[0; a_1, a_2 \ldots, a_m]$ la fraction continue de $x \in]0, 1[$, avec $a_m \geq 2$. En procédant comme ci-dessus, on montre facilement que

$$F(k, n, x) = \binom{n - a_1 - 1}{k - 1} - F(k - 1, n - a_1, T(x)) + \eta_{k,n}(x), \tag{2.2}$$

où $\eta_{k,n}(x) = 1$ si $k = m$ et $n = a_1 + \cdots + a_k$, et $\eta_{k,n}(x) = 0$ sinon.

Distinguons maintenant deux cas :
– Si $k \leq m$, en itérant l'identité (2.2), on a

$$F(k,n,x) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \binom{n-S_j-1}{k-j} + (-1)^k F(0, n-S_k, T^k(x)) + \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{j-1} \eta_{k-j,n-S_j}(T^j(x))$$

– Si $k > m$, en itérant l'identité (2.2), on a

$$F(k,n,x) = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} \binom{n-S_j-1}{k-j} + (-1)^k F(k-m, n-S_m, T^m(x)) + \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^{j-1} \eta_{k-j,n-S_j}(T^j(x)).$$

Puisque $F(0, n-S_k, T^k(x)) = 0$ (comme déjà observé) et $F(k-m, n-S_m, T^m(x)) = 0$ (car $T^m(x) = 0$), on peut écrire ces deux identités sous la forme compacte suivante :

$$F(k,n,x) = \sum_{j=1}^{\min(k,m)} (-1)^{j-1} \binom{n-S_j-1}{k-j} + \sum_{j=0}^{\min(k,m)-1} (-1)^{j-1} \eta_{k-j,n-S_j}(T^j(x)).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} G(N,x) &= \#\{t \in \mathscr{T}_1 : t \leq x\} + \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} F(k,n,x) \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{\min(k,m)} (-1)^{j-1} \binom{n-S_j-1}{k-j} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{\min(k,m)-1} (-1)^{j-1} \eta_{k-j,n-S_j}(T^j(x)). \end{aligned}$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{\min(k,m)} (-1)^{j-1} \binom{n-S_j-1}{k-j} &= \sum_{j=1}^{\min(N,m)} (-1)^{j-1} \sum_{k=j}^{N} \sum_{n=k}^{N} \binom{n-S_j-1}{k-j} \\ &= \sum_{j=1}^{\min(N,m)} (-1)^{j-1} \big(2^{\max(N-S_j,0)} - 1\big). \end{aligned}$$

On a donc

$$G(N,x) = \sum_{j=1}^{\min(N,m)} (-1)^{j-1} 2^{\max(N-S_j,0)} + \frac{1}{2}\big(1+(-1)^N\big) + R,$$

où

$$R := \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{\min(k,m)-1} (-1)^{j-1} \eta_{k-j,n-S_j}(T^j(x)).$$

Cette somme peut être aisément simplifié en remarquant que $\eta_{k-j,n-S_j}(T^j(x)) = \eta_{k,n}(x)$ et donc que $R = 0$ si $N < S_m$ tandis que si $N \geq S_m$, on a

$$R = \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^{j-1} \eta_{m,S_m}(x) = \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^{j-1} = -\frac{1}{2}\big(1+(-1)^m\big).$$

Ceci conclut la preuve du théorème.

Pour conclure cette note, on montre le fait suivant : *pour tout* $x \in]0,1[$*, on a*

$$G(N,x) + G(N,1-x) = \#\mathscr{T}_N + \mathbf{1}_{\mathscr{T}_N}(x) \tag{2.3}$$

où $\mathbf{1}_A(x) = 1$ *si* $x \in A$ *et* 0 *sinon.*

En divisant (2.3) par 2^N et en passant à la limite $N \to +\infty$, on obtient l'équation fonctionnelle bien connue $?(x) + ?(1-x) = 1$.

La preuve de (2.3) est basée sur l'observation que

$$\frac{p}{q} \in \mathscr{T}_N \Longleftrightarrow 1 - \frac{p}{q} \in \mathscr{T}_N.$$

Il découle en effet que

$$\begin{aligned} G(N,x) &= \#\Big\{\frac{p}{q} \in \mathscr{T}_N : 1 - \frac{p}{q} \geq 1 - x\Big\} \\ &= \#\Big\{1 - \frac{p}{q} \in \mathscr{T}_N : 1 - \frac{p}{q} \geq 1 - x\Big\} \\ &= \#\Big\{\frac{a}{b} \in \mathscr{T}_N : \frac{a}{b} \geq 1 - x\Big\} \\ &= \#\mathscr{T}_N - \#\big\{t \in \mathscr{T}_N : t < 1 - x\big\} \\ &= \#\mathscr{T}_N - \#\big\{t \in \mathscr{T}_N : t \leq 1 - x\big\} + \mathbf{1}_{\mathscr{T}_N}(1-x) \\ &= \#\mathscr{T}_N - G(N, 1-x) + \mathbf{1}_{\mathscr{T}_N}(x). \end{aligned}$$

(Noter que $\mathbf{1}_{\mathscr{T}_N}(x) = \mathbf{1}_{\mathscr{T}_N}(1-x)$.)

Le lecteur peut aussi obtenir (2.3) à partir des expressions de $G(N,x)$ données au Théorème 1. Il utilisera pour cela le fait suivant : étant donnée une fraction continue $x = [0; a_1, a_2, \ldots]$ (finie ou pas), on a $1 - x = [0; 1, a_1 - 1, a_2, \ldots]$ si $a_1 \geq 2$ et $1 - x = [0; a_2 + 1, \ldots]$ si $a_1 = 1$.

Références

[1] G. Alkauskas, *Integral transforms of the Minkowski question mark function*, Thèse de doctorat de l'Université de Nottingham (2008),
`http ://www.maths.nottingham.ac.uk/personal/pmxga2/papers.htm`.

[2] L. Bibiloni, J. Paradís, P. Viader, *A new light on Minkowski's* $?(x)$ *function*, J. Number Theory **73** (1998), no. 2, 212–227.

[3] A. A. Dushistova, N. G. Moshchevitin, *On the derivative of the Minkowski question mark function* $?(x)$, prépublication (2007), `http ://front.math.ucdavis.edu/0706.2219`.

T. Rivoal, Institut Fourier, CNRS UMR 5582, Université Grenoble 1, 100 rue des Maths, BP 74, 38402 Saint-Martin d'Hères cedex, France.
WWW : `http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~rivoal`.