Valeurs aux entiers de la fonction zêta de Riemann

Tanguy Rivoal

1 Introduction

Nous présentons quelques uns des résultats connus sur la nature arithmétique des valeurs aux entiers de la fonction zêta de Riemann, définie pour tout réel $s > 1$ par

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} . \tag{1}$$

Cette série est divergente en toutes les autres valeurs réelles de s, mais nous indiquerons au §2 comment prolonger ζ de façon unique non seulement à $\mathbb{R}$ mais aussi à $\mathbb{C} \setminus \{1\}$: ceci nous permet de montrer au §3 que les nombres $\zeta(n)$ pour n entier ≤ 0 sont tous rationnels. Les §§4-5 sont indépendants et sont consacrés aux résultats suivants :

i) pour tout entier $n \geq 1$, le nombre $\zeta(2n) \in \mathbb{Q}\pi^{2n}$ est transcendant, c'est-à-dire n'est racine d'aucun polynôme non nul à coefficients rationnels. Cela résulte du théorème de Lindemann "le nombre π est transcendant" (1882), que nous montrerons également ;

ii) beaucoup plus récemment, en 1978, Apéry a montré le premier résultat aux entiers impairs positifs : le nombre $\zeta(3)$ est irrationnel ;

iii) une infinité des nombres $\zeta(2n+1)$ (n entier ≥ 1) sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, donc irrationnels ([Riv] et [B-R], 2000).

Zudilin a montré qu'au moins un des nombres $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$, $\zeta(11)$ est irrationnel, mais la démonstration, sans être difficile, est trop technique pour que nous la donnions ici. On n'en sait guère plus sur les nombres $\zeta(2n+1)$, alors que l'on a la conjecture suivante :

Conjecture 1. *Les nombres*

$$\pi, \zeta(3), \zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \ldots$$

sont algébriquement indépendants, c'est-à-dire qu'aucun polynôme rationnel non nul en un nombre quelconque de variables n'est annulé par ces nombres.

L'indépendance linéaire correspond aux seuls polynômes du type $P(\underline{X}) = c_0 + \sum_{j\geq 1} c_j X_j$ (où les rationnels c_j sont nuls sauf un nombre fini quelconque d'entre eux), ce qui donne une idée du chemin encore à parcourir. Les références données dans le texte sont de difficultés très variables, allant d'ouvrages généraux à des articles de recherche. Dans la mesure du possible, nous avons essayé qu'elles soient accessibles, en particulier sur le réseau. Le lecteur pourra donc se faire une idée par lui-même de ces éventuelles difficultés. Les quelques notions d'analyse complexe utilisées (fonction méromorphe, prolongement analytique au §2, formule de Cauchy au §5, etc) ne sont pas essentielles à la compréhension du texte et peuvent être trouvées dans [A-LF], chapitre VIII. Enfin, lorsqu'il apparaît dans ce texte, le mot "élémentaire" n'est pas forcément synonyme de "simple et facile" !

2 Le prolongement analytique de ζ

La fonction zêta a été considérée bien avant Riemann par Euler qui a par exemple montré formellement l'identité

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1-p^{-s}}\,, \tag{2}$$

valable en fait pour $s > 1$. Euler a ainsi déduit de la divergence de $\zeta(1)$ une preuve analytique de l'existence d'une infinité de nombres premiers. Pour explorer davantage ce lien entre nombres premiers et analyse, Riemann [Rie] a été le premier à considérer $\zeta(s)$ comme une fonction de la variable complexe s et l'a prolongée de façon unique en une fonction, toujours notée ζ, méromorphe[1] sur $\mathbb{C}$, avec un pôle simple en $s = 1$ de résidu 1. Il a aussi montré que ce prolongement vérifie l'équation fonctionnelle suivante, déjà devinée par Euler :

$$\zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s}\cos(\pi s/2)\Gamma(s)\zeta(s)\,. \tag{3}$$

Riemann a ainsi pu donner une formule, assez compliquée, liant les zéros de ζ à la fonction $\pi(x) = \operatorname{card}\{p \text{ premier} \,|\, p \leq x\}$. Le succès de cette approche "complexe" arrivera en 1896 lorsque Hadamard et de la Vallée-Poussin prouvent indépendamment que ζ ne s'annule pas sur la droite verticale $\mathrm{Re}(s) = 1$ et en déduisent le théorème des nombres premiers :

$$\pi(x) \sim \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\log(t)} \quad \left(\sim \frac{x}{\log(x)}\right) \quad \text{quand } x \to +\infty\,. \tag{4}$$

L'estimation (4) est même équivalente à la non-annulation de ζ sur $\mathrm{Re}(s) = 1$. Il n'est donc pas surprenant que l'hypothèse de Riemann "tous les zéros non triviaux[2] de ζ sont sur la droite verticale $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$" donnerait une version très précise de (4) si elle était prouvée :

$$\pi(x) - \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\log(t)} = \mathrm{O}\left(\sqrt{x}\,\log(x)\right) \quad \text{quand } x \to +\infty\,. \tag{5}$$

[1]Une fonction méromorphe est une fonction $f(s)$ de la variable complexe s dérivable partout sauf en des pôles ; elle a un pôle simple en s_0 de résidu ρ si $\lim_{s\to s_0}(s-s_0)f(s) = \rho$. Contrairement aux fonctions d'une variable réelle, s'il existe, le prolongement est unique.

[2]c'est-à-dire autres que les zéros aux entiers négatifs pairs ; par ailleurs, on sait que l'hypothèse de Riemann est en fait équivalente à (5)

La fonction Γ qui apparaît dans (3) est la fonction Gamma d'Euler définie sur $\mathrm{Re}(s) > 0$ par $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}\mathrm{d}t$: l'équation fonctionnelle $\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s)$, que l'on prouve par intégration par parties, montre que $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour tout entier $n \geq 1$ et prolonge Γ en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, avec des pôles simples aux entiers $-n \leq 0$, de résidu $(-1)^n/n!$. On pourra consulter [E-L], p. 114, pour plus de détails sur Γ.

3 Valeurs de ζ aux entiers

L'équation fonctionnelle permet de déterminer certaines valeurs de ζ aux entiers. En effet, la fonction Γ ayant des pôle simple aux entiers négatifs, (3) évaluée en $s = -2n < 0$ implique que pour tout entier $n \geq 1$, $\zeta(-2n) = 0$, puisque $\zeta(1-s) = \zeta(2n+1)$ est bien défini. Le cas $n = 0$ doit être traité à part puisque $\zeta(1-s)$ et $\Gamma(s)$ ont chacune un pôle simple de résidu -1, respectivement 1, en $s = 0$: en multipliant (3) par s, puis en faisant tendre s vers 0, on obtient $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$. Pour aborder le cas des entiers impairs négatifs, définissons la suite des nombres de Bernoulli $(B_n)_{n\geq 0}$ au moyen de la série génératrice :

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!}\, z^n.$$

On vérifie que $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, B_{2n} est rationnel et $B_{2n+1} = 0$ pour $n \geq 1$.

Théorème 1. *Pour tout entier $n \geq 0$,*

$$\zeta(-n) = (-1)^n \frac{B_{n+1}}{n+1}\ . \tag{6}$$

Le cas n pair est déjà traité ci-dessus. À défaut d'une preuve rigoureuse de ce théorème, que l'on trouvera dans [Co], voici comment l'intuition remarquable d'Euler lui permettait de “montrer” (6). Notons que pour tout s tel que $\mathrm{Re}(s) > 1$, on a $(1-2^{1-s})\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k/k^s$, ce qui au passage fournit le prolongement analytique de ζ au demi-plan $\mathrm{Re}(s) > 0$. On peut alors sommer la série divergente $\zeta(-n)$ par la méthode d'Abel :

$$\begin{aligned}
(1-2^{n+1})\zeta(-n) \quad &\text{“=”} \quad \lim_{x\to -1} \sum_{k=1}^{\infty} k^n x^k = \left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n \left(\frac{x}{1-x}\right)\Bigg|_{x=-1} \\
&= \quad (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}\left(\frac{1}{e^z+1}\right)\Bigg|_{z=0} \quad (x = -e^{-z}) \\
&= \quad (-1)^n (1-2^{n+1}) \frac{B_{n+1}}{n+1}\ .
\end{aligned}$$

Lorsque $s = 2n$, on déduit de (6) et de l'équation fonctionnelle la célèbre identité d'Euler (voir [Du] pour l'histoire de cette découverte) :

Théorème 2. *Pour tout entier $n \geq 1$,*

$$\zeta(2n) = (-1)^{n-1} \frac{2^{2n-1} B_{2n}}{(2n)!}\, \pi^{2n}\ . \tag{7}$$

En revanche, il n'existe aucune expression aussi simple pour les nombres $\zeta(2n+1)$ (n entier ≥ 1), l'équation fonctionnelle étant muette dans ce cas. On peut toutefois citer une très belle formule de Ramanujan :

$$(-\beta)^{-n}\left(\frac{1}{2}\zeta(2n+1)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^{-2n-1}}{e^{2\beta k}-1}\right)=$$
$$\alpha^{-n}\left(\frac{1}{2}\zeta(2n+1)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^{-2n-1}}{e^{2\alpha k}-1}\right)+2^{2n}\sum_{k=0}^{n+1}\frac{B_{2k}B_{2n+2-2k}}{(2k)!(2n+2-2k)!}\alpha^{n+1-k}\beta^{k}\ ,$$

où les complexes α et β sont de parties réelles >0 et tels que $\alpha\beta=\pi^2$.

4 L'irrationalité de $\zeta(3)$

Déterminer la nature arithmétique des nombres "naturels" tels que π est un problème en général difficile : la preuve de l'irrationalité de π est due à Lambert en 1766 et celle de sa transcendance, que nous montrerons[3] au §5, est due à Lindemann en 1882. On en déduit grâce à la formule (7) que pour tout entier $n\geq 1$, $\zeta(2n)$ est transcendant. Malheureusement, à ce jour, personne n'a réussi à exploiter la formule de Ramanujan et aucun résultat arithmétique n'était connu sur les nombres $\zeta(2n+1)$ jusqu'à l'annonce faite en 1978 par Apéry du résultat suivant.

Théorème 3. *Le nombre $\zeta(3)$ est irrationnel.*

Bien qu'élémentaire, la preuve d'Apéry est relativement compliquée[4]. Il en existe un certain nombre de variantes dont la plus simple, due à Beukers, est celle que nous allons rapidement exposer. On pourra consulter [Fi] pour un exposé exhaustif de toutes les preuves connues. On note dans toute la suite $d_n=\text{p.p.c.m}\{1,2,\ldots,n\}$: du théorème des nombres premiers (4) et de la formule $d_n=\prod_{p\ 1\text{er}}p^{[\log(n)/\log(p)]}$, on déduit que $d_n^{1/n}\to e$. Nous aurons également besoin de la suite des polynômes de Legendre $P_n(X)=\frac{1}{n!}(X^n(1-X)^n)^{(n)}=\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}\binom{n+j}{n}X^j$. L'irrationalité de $\zeta(3)$ va découler de la comparaison de deux expressions différentes de l'intégrale suivante, définie pour tout entier $n\geq 0$:

$$\mathbf{J}_n=-\int_0^1\int_0^1 P_n(x)P_n(y)\frac{\log(xy)}{1-xy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ .$$

Proposition 1. *i) Il existe deux suites $(\mathbf{A}_n)_{n\geq 0}$ et $(\mathbf{B}_n)_{n\geq 0}$ telles que pour tout $n\geq 0$, $\mathbf{A}_n\in\mathbb{Z}$, $d_n^3\,\mathbf{B}_n\in\mathbb{Z}$ et $\mathbf{J}_n=2\mathbf{A}_n\zeta(3)-\mathbf{B}_n$.*

ii) Pour tout $n\geq 0$, on a

$$\mathbf{J}_n=\int_0^1\int_0^1\int_0^1\frac{x^n(1-x)^ny^n(1-y)^nz^n(1-z)^n}{(1-(1-xy)z)^{n+1}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\neq 0\ . \tag{8}$$

[3]Voir [E-L] pour une démonstration plus près de l'originale.
[4]mais elle est très clairement exposée dans [vdP]

Démonstration. *i)* Écrivons $P_n(x)P_n(y)$ en séparant les termes $(xy)^j$ et x^iy^j, $i \neq j$, de sorte que

$$\mathbf{J}_n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2 \binom{n+j}{n}^2 \mathbf{J}_n^j + \sum_{\substack{0\le i,j\le n \\ i\neq j}}^{n} (-1)^{i+j} \binom{n}{i}\binom{n}{j}\binom{n+i}{n}\binom{n+j}{n} \mathbf{J}_n^{i,j} \,,$$

avec $\mathbf{J}_n^j = -\int_0^1\int_0^1 \frac{(xy)^j}{1-xy}\log(xy)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\zeta(3) - 2\sum_{k=1}^{j}\frac{1}{k^3}$ et

$$\mathbf{J}_n^{i,j} = -\int_0^1\int_0^1 \frac{x^iy^j}{1-xy}\log(xy)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{2}{|j-i|}\sum_{k=\min(i,j)+1}^{\max(i,j)}\frac{1}{k^2} \qquad (i\neq j)\,.$$

Posons maintenant $\mathbf{A}_n = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}^2\binom{n+j}{n}^2$ et

$$\mathbf{B}_n = 2\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}^2\binom{n+j}{n}^2\sum_{k=1}^{j}\frac{1}{k^3} \\ - 2\sum_{\substack{0\le i,j\le n \\ i\neq j}}^{n}\frac{(-1)^{i+j}}{|j-i|}\binom{n}{i}\binom{n}{j}\binom{n+i}{n}\binom{n+j}{n}\sum_{k=\min(i,j)+1}^{\max(i,j)}\frac{1}{k^2}\,.$$

Clairement $\mathbf{A}_n$ et $d_n^3\mathbf{B}_n$ sont entiers et $\mathbf{J}_n = 2\mathbf{A}_n\zeta(3) - \mathbf{B}_n$.

ii) Remarquons que $\frac{\log(xy)}{1-xy} = -\int_0^1 \frac{1}{1-(1-xy)z}\,\mathrm{d}z$, d'où

$$\mathbf{J}_n = \int_{[0,1]^3}\frac{P_n(x)P_n(y)}{1-(1-xy)z}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,.$$

Intégrons n fois par parties par rapport à x :

$$\mathbf{J}_n = \int_{[0,1]^3}\frac{x^n(1-x)^ny^nP_n(y)z^n}{(1-(1-xy)z)^{n+1}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,.$$

Effectuons alors le changement de variable $z = \frac{1-w}{1-(1-xy)w}$:

$$\mathbf{J}_n = \int_{[0,1]^3}\frac{(1-x)^nP_n(y)(1-w)^n}{1-(1-xy)w}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}w\,.$$

Enfin, n intégrations par parties successives par rapport à y donne (8).

Démonstration du théorème 3 . De la proposition 1 résulte l'existence d'entiers $\mathbf{a}_n$ et $\mathbf{b}_n$ tels que $\mathbf{a}_n\zeta(3)-\mathbf{b}_n = d_n^3\mathbf{J}_n \neq 0$. Pour montrer que $\zeta(3)\notin\mathbb{Q}$, il nous suffit de montrer que $d_n^3\mathbf{J}_n$ tend vers 0. En effet, si on avait $\zeta(3)=p/q\in\mathbb{Q}$, l'entier positif $|p\mathbf{a}_n - q\mathbf{b}_n| = |qd_n^3\mathbf{J}_n|$ serait non nul et <1 pour n assez grand, ce qui est impossible. On vérifie alors que

$$\lim_{n\to+\infty}|\mathbf{J}_n|^{1/n} = \sup_{(x,y,z)\in[0,1]^3}\left(\frac{x(1-x)y(1-y)z(1-z)}{1-(1-xy)z}\right) = (\sqrt{2}-1)^4 < e^{-3}\ ,$$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}|d_n^3\mathbf{J}_n| = 0$.

A titre de curiosité et afin d'illustrer la diversité des méthodes conduisant au théorème d'Apéry, notons qu'une autre démonstration en a été donnée par Nesterenko grâce à une étude directe de la série ci-dessous. Nous verrons au paragraphe suivant l'intérêt d'une telle représentation.

Proposition 2. *Pour tout entier $n\geq 0$, on a*

$$\mathbf{J}_n = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\left(\frac{(k-1)^2(k-2)^2\cdots(k-n)^2}{k^2(k+1)^2\cdots(k+n)^2}\right)\ . \tag{9}$$

Démonstration. Comme nous n'avons pas besoin de cette expression, nous ne justifions pas les diverses étapes analytiques. Remarquons que $\dfrac{\log(xy)}{1-xy} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{(xy)^t}{1-xy}\right)\Bigg|_{t=0}$ et donc que $\mathbf{J}_n = -\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\displaystyle\int_0^1 x^{k+t-1}P_n(x)\mathrm{d}x\right)^2\Bigg|_{t=0}$. En intégrant n fois par parties, on vérifie que

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^{k+t-1}P_n(x)\mathrm{d}x &= \frac{(k+t-1)\cdots(k+t-n)}{n!}\int_0^1 x^{k+t-1}(1-x)^n\mathrm{d}x\\ &= \frac{(k+t-1)\cdots(k+t-n)}{(k+t)(k+t+1)\cdots(k+t+n)}\ .\end{aligned}$$

D'où $\mathbf{J}_n = -\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{(k+t-1)^2\cdots(k+t-n)^2}{(k+t)^2(k+t+1)^2\cdots(k+t+n)^2}\right)\Bigg|_{t=0}$, c'est-à-dire (9) sous une forme déguisée.

5 Irrationalité d'une infinité des $\zeta(2n+1)$

La démonstration de l'irrationalité de $\zeta(3)$ n'a pas été généralisée aux autres valeurs $\zeta(2n+1)$ pour $n\geq 2$, en particulier en raison de l'apparition quasi-systématique des $\zeta(2n)$, qui parasitent les résultats[5]. Ce phénomène a récemment pu être contré par l'emploi de séries similaires à (9), ce qui a permis de montrer le théorème suivant.

[5]Par exemple, le théorème 4 est parfaitement trivial si on rajoute les $\zeta(2n)$, $1\leq n\leq a/2$, puisqu'on a alors automatiquement $\delta(a)\geq[a/2]+1$, en vertu du théorème de Lindemann.

Théorème 4. *Soit a un entier impair ≥ 3. La dimension $\delta(a)$ de l'espace vectoriel engendré sur $\mathbb{Q}$ par 1, $\zeta(3)$, $\zeta(5)$, ..., $\zeta(a)$ est plus grande que $\frac{1}{3}\log(a)$. En particulier, une infinité des nombres $\zeta(2n+1)$ (n entier ≥ 1) sont irrationnels.*

Nous montrerons une version légèrement différente, où $1/3$ est remplacé par une constante $c(a)$ qui tend vers $1/(1+\log(2))$ quand $a \to +\infty$. Si l'on estime que les $\zeta(2n+1)$ sont les parasites, on montre alors sans plus de travail le théorème de Lindemann :

Théorème 5. *Le nombre π est transcendant. En conséquence, les nombres $\zeta(2n)$ (n entier ≥ 1) sont tous transcendants.*

Nous aurons besoin des fonctions polylogarithmes Li_s définies par

$$\mathrm{Li}_s(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^s}$$

pour s entier ≥ 1, z complexe tels que $|z| \leq 1$ et $(s,z) \neq (1,1)$. En particulier, $\mathrm{Li}_1(z) = -\log(1-z)$ diverge en $z=1$ et $\mathrm{Li}_s(1) = \zeta(s)$ pour $s \geq 2$. Étant donnés des entiers $a \geq 2$, $n \geq 0$, toute fraction rationnelle $\mathbf{R}_{n,a}(X) = \dfrac{\mathbf{A}_{n,a}(X)}{X^a(X+1)^a \cdots (X+n)^a} \in \mathbb{Q}(X)$ avec $\deg(\mathbf{A}_{n,a}) \leq a(n+1)-2$ donne naissance à une série $\mathbf{S}_{n,a}(z)$ qui peut s'écrire comme combinaison linéaire polynômiale de polylogarithmes :

$$\mathbf{S}_{n,a}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{R}_{n,a}(k) z^{-k} = \mathbf{P}_{0,n,a}(z) + \sum_{\ell=1}^{a} \mathbf{P}_{\ell,n,a}(z)\mathrm{Li}_{\ell}(1/z) .$$

L'hypothèse sur $\deg(\mathbf{A}_{n,a})$ implique automatiquement que $\mathbf{P}_{1,n,a}(1) = 0$. Nous allons voir que l'on peut choisir $\mathbf{R}_{n,a}(X)$ telle que $\mathbf{P}_{\ell,n,a}(1) = 0$ pour ℓ pair, resp. impair : on construit ainsi une suite de combinaisons linéaires $\mathbf{S}_{n,a}(1)$ uniquement en 1 et les ζ impairs, resp. pairs, à laquelle on applique le critère d'indépendance linéaire suivant, dû à Nesterenko. On pourra en trouver une démonstration élémentaire dans [Co].

Proposition 3. *Soient $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$ des réels. Supposons qu'il existe N suites d'entiers $(\mathbf{p}_{j,n})_{n\geq 0}$ et deux réels $\alpha > 0$, $\beta > 1$ tels que $\lim_{n\to\infty} |\mathbf{p}_{1,n}\xi_1 + \cdots + \mathbf{p}_{N,n}\xi_N|^{1/n} = \alpha$ et $\limsup_{n\to\infty} |\mathbf{p}_{j,n}|^{1/n} \leq \beta$. Alors la dimension de l'espace vectoriel engendré sur $\mathbb{Q}$ par ξ_1, ξ_2, ..., ξ_N est plus grande que $1 - \log(\alpha)/\log(\beta)$.*

Pour alléger la présentation, seule la dépendance en n sera désormais explicite. Choisissons $\mathbf{A}_n(X) = n!^{a-2r}(X-rn)_{rn}(X+n+1)_{rn}$ où par définition $(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)$. L'entier r est tel que $1 \leq r < a/2$, ce qui assure que $\mathbf{P}_{1,n}(1) = 0$; il sera ajusté pour optimiser la minoration de $\delta(a)$, c'est-à-dire pour avoir α et β les plus petits possibles dans le critère de Nesterenko. Le facteur $(X-rn)_{rn}$ annule les rn premiers termes de $\mathbf{S}_n(z)$, ce qui en assure la "petitesse". Le deuxième facteur $(X+n+1)_{rn}$ couplé au premier implique que les polynômes $\mathbf{P}_{\ell,n}(X)$ sont "plus ou moins" réciproques, ce qui permet l'élimination des ζ pairs ou impairs en $z=1$.

Décomposons $\mathbf{R}_n(X)$ en éléments simples (les coefficients rationnels $c_{\ell,j,n}$ seront explicités un peu plus tard) :

$$\mathbf{R}_n(X) = \sum_{\ell=1}^{a}\sum_{j=0}^{n} \frac{c_{\ell,j,n}}{(X+j)^\ell} \ , \tag{10}$$

et, pour tout $\ell \in \{1,\dots,a\}$, définissons les polynômes

$$\mathbf{P}_{\ell,n}(X) = \sum_{j=0}^{n} c_{\ell,j,n} X^j \quad \text{et} \quad \mathbf{P}_{0,n}(X) = -\sum_{\ell=1}^{a}\sum_{j=1}^{n} c_{\ell,j,n} \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{k^\ell} X^{j-k} \ . \tag{11}$$

On peut admettre la preuve un peu technique de la proposition suivante, dont on déduit facilement les théorèmes 4 et 5.

Proposition 4. *i) Pour tout nombre complexe z tel que $|z| \ge 1$, $z \ne 1$, on a*

$$\mathbf{S}_n(z) = \mathbf{P}_{0,n}(z) + \sum_{\ell=1}^{a} \mathbf{P}_{\ell,n}(z)\mathrm{Li}_\ell(1/z) \ . \tag{12}$$

De plus, $\mathbf{S}_n(1)$ converge, $\mathbf{P}_{1,n}(1) = 0$ et pour tout $\ell \in \{1,\dots,a\}$,

$$z^n \mathbf{P}_{\ell,n}(1/z) = (-1)^{a(n+1)+\ell}\mathbf{P}_{\ell,n}(z) \ . \tag{13}$$

ii) Quand n tend vers $+\infty$, la limite de $|\mathbf{S}_n(1)|^{1/n}$ existe et vérifie

$$0 < \lim_{n\to+\infty} |\mathbf{S}_n(1)|^{1/n} \le 2^{r+1} r^{2r-a} \ . \tag{14}$$

iii) Pour tout $\ell \in \{0,\dots,a\}$, on a $d_n^a \mathbf{P}_{\ell,n}(1) \in \mathbb{Z}$ et

$$\limsup_{n\to+\infty} |\mathbf{P}_{\ell,n}(1)|^{1/n} \le 2^{a-2r}(2r+1)^{2r+1} \ . \tag{15}$$

Démonstration des théorèmes 4 et 5. On suppose a impair et n pair : (13) implique que $\mathbf{P}_{\ell,n}(1) = 0$ pour $\ell \ge 2$ pair. Comme on a aussi $\lim_{z\to 1} \mathbf{P}_{1,n}(z)\mathrm{Li}_1(1/z) = 0$, on définit une suite de combinaisons linéaires en 1 et les ζ impairs en prolongeant (12) par continuité en $z = 1$ (on écrit $2n$ pour la condition n pair) :

$$\mathbf{L}_n = d_{2n}^a \mathbf{S}_{2n}(1) = \mathbf{p}_{0,2n} + \mathbf{p}_{3,2n}\zeta(3) + \mathbf{p}_{5,2n}\zeta(5) + \cdots + \mathbf{p}_{a,2n}\zeta(a)$$

avec $\mathbf{p}_{\ell,2n} = d_{2n}^a \mathbf{P}_{\ell,2n}(1) \in \mathbb{Z}$. Il résulte de (14) et (15) que

$$\alpha = \lim_{n\to+\infty} |\mathbf{L}_n|^{1/n} \le \left(e^a 2^{r+1} r^{2r-a}\right)^2 \quad \text{et} \quad \limsup_{n\to+\infty} |\mathbf{p}_{\ell,n}|^{1/n} \le (e^a 2^{a-2r}(2r+1)^{2r+1})^2 = \beta \ .$$

On choisit alors $r = [a/\log^2(a)]$ de sorte que[6] l'on ait $e^a 2^{r+1} r^{2r-a} = e^{-(1+o(1))a\log(a)}$ et $e^a 2^{a-2r}(2r+1)^{2r+1} = e^{(1+\log(2))a+o(a)}$ quand $a \to +\infty$. Enfin, on applique la proposition 3 avec les nombres $\alpha > 0$ et $\beta > 1$ définis ci-dessus :

$$\delta(a) \ge 1 - \frac{\log(\alpha)}{\log(\beta)} \ge 1 - \frac{a + (r+1)\log(2) + (2r-a)\log(r)}{a + (a-2r)\log(2) + (2r+1)\log(2r+1)} = \frac{1+o(1)}{1+\log(2)} \log(a) \ .$$

[6] Rappelons que $f(x) = o(g(x))$ quand $x \to x_0$ signifie que $\lim_{x\to x_0} f(x)/g(x) = 0$.

Pour démontrer le théorème 5, on choisit a pair : pour tout $n \geq 0$, $\mathbf{S}_n(1)$ est alors une combinaison linéaire de ζ pairs et on montre comme ci-dessus que les nombres $\zeta(2n)$ engendrent sur $\mathbb{Q}$ un espace vectoriel de dimension infinie, d'où la transcendance de π. En effet, la dimension de l'espace vectoriel engendré sur $\mathbb{Q}$ par toutes les puissances d'un nombre algébrique α est inférieure au degré de n'importe quel polynôme rationnel annulé par α, donc finie.

Démonstration de la proposition 4. i) En reportant (10) dans $\mathbf{S}_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{R}_n(k) z^{-k}$, on a pour tout z tel que $|z| \geq 1$, $z \neq 1$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}_n(z) &= \sum_{\ell=1}^{a} \sum_{j=0}^{n} c_{\ell,j,n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{-k}}{(k+j)^{\ell}} = \sum_{\ell=1}^{a} \sum_{j=0}^{n} c_{\ell,j,n} z^{j} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{-k}}{k^{\ell}} - \sum_{k=1}^{j} \frac{z^{-k}}{k^{\ell}} \right) \\
&= \sum_{\ell=1}^{a} \mathrm{Li}_{\ell}(1/z) \sum_{j=0}^{n} c_{\ell,j,n} z^{j} - \sum_{\ell=1}^{a} \sum_{j=1}^{n} c_{\ell,j,n} \sum_{k=1}^{j} \frac{z^{j-k}}{k^{\ell}} \, ,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire (12). Comme $1 \leq r < a/2$, la série $\mathbf{S}_n(1)$ est convergente alors que le terme $\mathbf{P}_{1,n}(z)\mathrm{Li}_1(1/z) = -\mathbf{P}_{1,n}(z)\log(1-1/z)$ est le seul qui peut diverger en $z = 1$: cela implique nécessairement que le polynôme $\mathbf{P}_{1,n}(z)$ s'annule en 1. La propriété (13) découle de la relation $\mathbf{R}_n(-X-n) = (-1)^{a(n+1)}\mathbf{R}_n(X)$ (que l'on déduit de l'identité triviale $(\alpha)_k = (-1)^k(-\alpha-k+1)_k$). En effet, comme

$$\mathbf{R}_n(-X-n) = \sum_{\ell=1}^{a} \sum_{j=0}^{n} \frac{c_{\ell,j,n}}{(-X+j-n)^{\ell}} = \sum_{\ell=1}^{a} \sum_{j=0}^{n} (-1)^{\ell} \frac{c_{\ell,n-j,n}}{(X+j)^{\ell}} \, ,$$

l'unicité de la décomposition en éléments simples implique que $c_{\ell,n-j,n} = (-1)^{a(n+1)+\ell} c_{\ell,j,n}$, ce qui se traduit par (13) pour les polynômes $\mathbf{P}_{\ell,n}(z)$.

ii) On peut montrer que $\mathbf{S}_n(1)$ s'exprime sous une forme intégrale similaire à celle de $\mathbf{J}_n$ au paragraphe précédent : pour tout entier $n \geq 0$,

$$\mathbf{S}_n(1) = \frac{((2r+1)n+1)!}{n!^{2r+1}} \int_{[0,1]^{a+1}} \frac{\prod_{j=1}^{a+1} x_j^{rn}(1-x_j)^n \, \mathrm{d}x_j}{(1-x_1\cdots x_{a+1})^{(2r+1)n+2}} \, . \tag{16}$$

L'existence de la limite de $|\mathbf{S}_n(1)|^{1/n}$ en découle : en effet, la formule de Stirling implique que $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{((2r+1)n+1)!}{n!^{2r+1}} \right)^{1/n} = (2r+1)^{2r+1}$ et en notant $\mathbf{I}_n$ l'intégrale (strictement positive) à droite de (16), on a

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{I}_n^{1/n} = \max_{\underline{x}\in[0,1]^{a+1}} \left(\frac{\prod_{j=1}^{a+1} x_j^{r}(1-x_j)}{(1-x_1\cdots x_{a+1})^{2r+1}} \right) \neq 0 \, .$$

Une estimation de la valeur de ce maximum donne alors (14).

iii) Au vu des expressions (11), il suffit en fait de majorer les coefficients $c_{\ell,j,n}$ apparaissant dans le développement en éléments simples de $\mathbf{R}_n(X)$: pour tout $\ell \in \{1,\ldots,a\}$ et tout $j \in \{0,\ldots,n\}$, on a

$$c_{\ell,j,n} = \frac{1}{(a-\ell)!} \cdot \frac{\mathrm{d}^{a-\ell}}{\mathrm{d}X^{a-\ell}} \left(\mathbf{R}_n(X)(X+j)^a\right)\Big|_{X=-j} .$$

Cette expression est délicate à manipuler mais on dispose heureusement de la formule intégrale de Cauchy (voir [A-LF], p. 362) qui se prête plus facilement à des estimations et donne ici :

$$c_{\ell,j,n} = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \mathbf{R}_n(z)(z+j)^{\ell-1}\mathrm{d}z$$

où γ est, par exemple, le cercle de centre $-j$ et de rayon $1/2$. En majorant convenablement $\mathbf{R}_n(z)$ sur γ, on montre (15). Nous admettons le fait que $d_n^a\mathbf{P}_{\ell,n}(1) \in \mathbb{Z}$, dont la démonstration ne présente pas de difficulté mais n'est pas très éclairante.

6 Les perspectives

Les résultats actuellement connus sur la nature arihmétique des nombres $\zeta(2n+1)$ sont relativement pauvres. En effet, rien n'empêche pour l'instant que $\zeta(3) \in \mathbb{Q}\sqrt{2}$, que $\zeta(1789) \in \mathbb{Q}$ ou que $\zeta(5)/\zeta(3) \in \mathbb{Q}$, bien que ces assertions soient improbables. On peut donc se demander ce qu'il faut chercher exactement et un élément de réponse a été apporté ces dernières années par l'étude des séries polyzêtas, définies par

$$\zeta(\underline{s}) = \zeta(s_1, s_2, \ldots, s_k) = \sum_{n_1 > n_2 > \cdots > n_k \geq 1} \frac{1}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \cdots n_k^{s_k}} ,$$

pour des entiers positifs $s_i \geq 1$ et $s_1 \geq 2$. L'entier $s_1 + s_2 + \cdots + s_k$ est le poids de $\zeta(\underline{s})$. Ces séries apparaissent naturellement quand on considère les produits des valeurs de la fonction ζ : on a par exemple $\zeta(n)\zeta(m) = \zeta(n+m) + \zeta(n,m) + \zeta(m,n)$, ce qui permet en quelque sorte de "linéariser" ces produits. Il existe une riche structure algébrique associée aux polyzêtas (voir [Co]). On s'est en particulier intéressé aux $\mathbb{Q}$-sous-espaces vectoriels $\mathcal{Z}_p$ de $\mathbb{R}$, engendrés par les 2^{p-2} polyzêtas de poids $p \geq 2$: $\mathcal{Z}_2 = \mathbb{Q}\zeta(2)$, $\mathcal{Z}_3 = \mathbb{Q}\zeta(3) + \mathbb{Q}\zeta(2,1)$, $\mathcal{Z}_4 = \mathbb{Q}\zeta(4) + \mathbb{Q}\zeta(3,1) + \mathbb{Q}\zeta(2,2) + \mathbb{Q}\zeta(2,1,1)$, etc. Posons $v_p = \dim_{\mathbb{Q}}(\mathcal{Z}_p)$. On a alors la

Conjecture 2. *i)* (*Zagier*) *Pour tout entier $p \geq 2$, on a $v_p = c_p$, où l'entier c_p est défini par la récurrence de type Fibonacci $c_{p+3} = c_{p+1} + c_p$, avec $c_0 = 1$, $c_1 = 0$ et $c_2 = 1$.*

ii) Les $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels $\mathcal{Z}_p$, $p \geq 2$, sont en somme directe.

La suite $(v_p)_{p\geq 2}$ devrait donc croître comme α^p (où $\alpha \approx 1,3247$ est racine du polynôme $X^3 - X - 1$), ce qui est bien plus petit que 2^{p-2}. Il y a donc beaucoup de relations linéaires entre les polyzêtas de même poids (et conjecturalement aucune en poids différents) : nous n'employons pas le conditionnel car un théorème de Terasoma affirme que l'on a $v_p \leq c_p$ pour tout entier $p \geq 2$. Il reste donc à montrer l'inégalité inverse mais aucune minoration non triviale de v_p n'est connue à ce jour : si l'on montre facilement que $v_2 = v_3 = v_4 = 1$, on est bloqué dès l'égalité $v_5 = 2$, qui est équivalente à l'irrationalité toujours inconnue de $\zeta(5)/(\zeta(3)\zeta(2))$. On voit donc que la conjecture 2 est naturellement liée à la conjecture 1 de l'introduction et qu'elle pourrait aider à comprendre la nature arithmétique des valeurs aux entiers impairs de la fonction ζ de Riemann.

Références

[A-LF] J.M. Arnaudiès, J. Lelong-Ferrand, *Cours de mathématiques. Équations différentielles, intégrales multiples*, tome 4, 2ème édition (1977), Dunod Université.

[B-R] K. Ball, T. Rivoal, *Irrationalité d'une infinité de valeurs de la fonction zêta aux entiers impairs*, Invent. Math. **146** (2001), no. 1, 193–207.

[Co] P. Colmez, *Arithmétique de la fonction zêta*, Actes des journées X-UPS 2002 "La fonction zêta".

[Du] W. Dunham, *Euler : the master of us all*, The Dolciani Mathematical Expositions no. 22, Mathematical Association of America, Washington, DC, 1999.

[E-L] P. Eymard, J. P. Lafon, *Autour du nombre π*, Actualités Scientifiques et Industrielles no. 1443, Hermann, Paris, 1999.

[Fi] S. Fischler, *Irrationalité de valeurs de zêta* (*d'après Apéry, Rivoal, ...*), Séminaire Bourbaki no. 910, 55ème année, 2002-2003.
http ://front.math.ucdavis.edu/math.NT/0303066

[Rie] B. Riemann, *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, Monatsberichte der Berliner Akademie, November 1859. Traduction en anglais sur le site http ://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Riemann/Zeta/

[Riv] T. Rivoal, *La fonction zêta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **331** (2000), no. 4, 267–270.
http ://front.math.ucdavis.edu/math.NT/0008051

[vdP] A. van der Poorten, *A proof that Euler missed... Apéry's proof of the irrationality of $\zeta(3)$. An informal report*, Math. Intelligencer **1** (1978/79), no. 4, 195–203.
http ://ega-math.narod.ru/Apery1.htm

Sur http ://math.polytechnique.fr/xups/vol02.html, on trouvera le texte de P. Colmez ainsi qu'un texte de J. B. Bost contenant un fac-similé de la preuve originale de Hadamard du théorème des nombres premiers. Les articles de Zudilin et Terasoma mentionnés dans le texte sont disponibles sur http ://front.math.ucdavis.edu/. Enfin, le site http ://wain.mi.ras.ru/zw/ contient un lien vers l'article de Nesterenko sur $\zeta(3)$.

Tanguy Rivoal, LMNO CNRS UMR 6139, Université de Caen BP 5186, 14032 Caen cedex.
e-mail : rivoal@math.unicaen.fr