DÉMONSTRATION DE L'OBSERVATION 2 D'ALMKVIST ET ZUDILIN

C. KRATTENTHALER ET T. RIVOAL

Le but de cette note est de donner une preuve de l'Observation 2 d'Almkvist et Zudilin [1, p. 487]. Il s'agit de l'observation numérique suivante. Posons

$$A_n = \sum_{0\le j,k\le n} \binom{n}{j}^2 \binom{n}{k}^2 \binom{n+j}{n}\binom{n+k}{n}\binom{j+k}{n}$$

et

$$w_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n = 1 + 12z + 804z^2 + 88680z^3 + \cdots \in \mathbb{Z}[[z]].$$

Observation 2. *Il existe $u_0(z) \in \mathbb{Z}[[z]]$ telle que $w_0(z) = u_0(z)^2$.*

On va utiliser le critère suivant de Heninger et al. [2]. On note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble de séries formelles $F(z) \in 1 + z\mathbb{Z}[[z]]$ telles que $F(z)^{1/n} \in 1 + z\mathbb{Z}[[z]]$ pour un entier $n \ge 1$.

Lemme 1. *Posons $\mu_n = n\prod_{p|n} p$. On a*

$$F(z) \in \mathcal{P}_n \iff F(z) \pmod{\mu_n} \in \mathcal{P}_n.$$

Dans le cas de la série $w_0(z)$, on a $n = 2$ et $\mu_2 = 4$. Il suffit donc de prouver que $w_0(z) \pmod 4 \in \mathcal{P}_2$. Or nous allons prouver que $w_0(z) \pmod 4 = 1$, qui est bien dans $\mathcal{P}_2$.

Théorème 1. *Pour des entiers $j, k, n \ge 0$, posons*

$$a_n(j,k) = \binom{n}{j}^2 \binom{n}{k}^2 \binom{n+j}{n}\binom{n+k}{n}\binom{j+k}{n}.$$

Pour tous entiers $n \ge 1$ et $j, k \ge 0$, on a

(a) *$v_2\big(a_n(j,k)\big) = 1$ si, et seulement si, $\{j,k\} = \{0,n\}$ et n est une puissance de 2.*

(b) *$v_2\big(a_n(j,k)\big) \ge 2$ sinon.*

Pour $n \ge 1$, on a

$$A_n = a_n(0,n) + a_n(n,0) + \sum_{0\le j,k\le n}{}' \, a_n(j,k),$$

où le prime signifie que la sommation exclut les couples $(j,k) = (0,n),(n,0)$. Comme $a_n(0,n) = \binom{2n}{n} = a_n(n,0)$ est toujours pair (le pire cas étant donné par (a)), on en déduit le corollaire suivant.

Corollaire 1. *Pour tout entier $n \ge 1$, on a $v_2\big(A_n\big) \ge 2$. En particulier, $w_0(z) \pmod 4 = 1$ et l'Observation 2 est vraie.*

Date: 1[er] octobre 2008.

Démonstration du Théorème 1. Soit $n \geq 1$. Il n'y a rien à prouver si $j+k<n$ et on suppose maintenant que $j+k \geq n$.

Premier cas : $\{j,k\} = \{0,n\}$**.** On a alors $a_n(0,n) = a_n(n,0) = \binom{2n}{n}$. Or

$$v_2\left(\binom{2n}{n}\right) = \sum_{\ell=1}^{\infty}\left(\left\lfloor \frac{2n}{2^\ell}\right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{2^\ell}\right\rfloor\right) = n - \sum_{\ell=1}^{\infty}\left\lfloor \frac{n}{2^\ell}\right\rfloor.$$

Il est facile de vérifier que l'expression à droite est ≥ 2 sauf si n est une puissance de 2, auquel cas elle vaut 1.

Deuxième cas : $\{j,k\} \neq \{0,n\}$**.** La condition $j+k \geq n \geq 1$ montre que dans ce cas on a alors forcément $j \geq 1$ et $k \geq 1$.

On va tout d'abord montrer que pour entiers m, p tels que $1 \leq p \leq m$, on a

$$v_2\left(\binom{m}{p}\binom{m+p}{m}\right) \geq 1. \tag{1}$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} v_2\left(\binom{m}{p}\binom{m+p}{m}\right) &= \sum_{\ell=1}^{\infty}\left(\left\lfloor \frac{m+p}{2^\ell}\right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{p}{2^\ell}\right\rfloor - \left\lfloor \frac{m-p}{2^\ell}\right\rfloor\right) \\ &\geq \left\lfloor \frac{m+p}{2^L}\right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{p}{2^L}\right\rfloor - \left\lfloor \frac{m-p}{2^L}\right\rfloor = \left\lfloor \frac{m+p}{2^L}\right\rfloor - \left\lfloor \frac{m-p}{2^L}\right\rfloor \geq 0, \end{aligned}$$

où L est l'entier ≥ 1 tel que $2^{L-1} \leq p < 2^L$. Supposons alors que $\lfloor \frac{m+p}{2^L}\rfloor - \lfloor \frac{m-p}{2^L}\rfloor = 0$. On en déduit que

$$0 \leq \frac{m+p}{2^L} - \frac{m-p}{2^L} < 1$$

et donc que $p < 2^{L-1}$, contrairement à l'hypothèse. Donc $\lfloor \frac{m+p}{2^L}\rfloor - \lfloor \frac{m-p}{2^L}\rfloor \geq 1$, ce qui prouve (1).

On applique maintenant (1) aux deux cas $(m,p) = (n,j)$ et $(m,p) = (n,k)$ pour obtenir que

$$v_2\left(\binom{n}{j}\binom{n}{k}\binom{n+j}{n}\binom{n+k}{n}\right) \geq 2.$$

A fortiori, on a donc $v_2\big(a_n(k,j)\big) \geq 2$ lorsque $\{j,k\} \neq \{0,n\}$.

Ceci termine la preuve du théorème. □

Bibliographie

[1] G. Almkvist and W. Zudilin, *Differential equations, mirror maps and zeta values*, in : Mirror Symmetry V, N. Yui, S.-T. Yau, and J.D. Lewis (eds.), AMS/IP Studies in Advanced Mathematics **38** (2007), International Press & Amer. Math. Soc., 481–515.

[2] N. Heninger, E. M. Rains, N. J. A. Sloane, *On the integrality of n-th roots of generating functions*, J. Combin. Theory Ser. A **113** (2006), 1732–1745.