THÉORÈMES LIMITES POUR CERTAINS MODÈLES PROBABILISTES DE LA FONCTION DE MÖBIUS

T. RIVOAL

1. Introduction

1.1. **Une constatation de Denjoy.** La fonction de Möbius μ est définie par $\mu(1) = 1$, $\mu(n) = 0$ si n a un facteur carré > 1 et sinon $\mu(n) = (-1)^{\omega(n)}$ où $\omega(n)$ est le nombre de facteurs premiers distincts de n. Elle est multiplicative, c'est-à-dire que $\mu(nm) = \mu(n)\mu(m)$ pour des entiers n et m premiers entre eux. Cette fonction est omniprésente en théorie analytique des nombres car elle est intimement liée aux zéros non triviaux de la fonction zêta de Riemann $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ (pour $\Re(s) > 1$). L'étude des variations de sa fonction sommatoire est un problème important mais difficile (voir l'article [19] et sa bibliographie).

On doit à Denjoy [7, 8] l'idée que les fluctuations de la fonction de Möbius sont telles qu'elle se "comporte" comme une suite de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes. Cette idée a été reprise sur des bases statistiques par Churchhouse et Good [6]. Elle a été qualifiée de "*quite absurd when considered carefully*" ([1]) par Edwards [9, p. 268], ce qui, à première vue, est une évidence puisque μ est parfaitement déterministe.

Donnons deux résultats permettant de comprendre cette idée :

1) Le théorème des nombres premiers implique que $\sum_{n\leq N} \mu(n) = o(N)$ pour $N \to +\infty$.
2) On sait que les suites $\#\{n \leq N : \mu(n) = 1\}/N$ et $\#\{n \leq N : \mu(n) = -1\}/N$ tendent vers $1/(2\zeta(2))$ lorsque $N \to +\infty$;

Le point 2) suggère de modéliser la suite $(\mu(n))_{n\geq 1}$ par une suite $(\mu_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires réelles identiquement distribuées définies sur un espace probabilisé convenable $(\Omega, \mathscr{T}, P)$ et de loi symétrique donnée par

$$P(\mu_n = 0) = 1 - \delta, \quad P(\mu_n = 1) = P(\mu_n = -1) = \delta/2, \tag{1}$$

avec $\delta = 1/\zeta(2)$ (valeur de δ dans toute la suite de l'article).

Ce modèle très simple n'utilise que des résultats sur μ obtenus par l'étude de $\zeta(s)$ pour $\Re(s) \geq 1$. Il est donc douteux qu'il puisse "donner" des renseignements sur $\zeta(s)$ pour $\Re(s) < 1$. Or les tenants de ce modèle ont fait remarquer que l'estimation du point 1) ci-dessus est similaire à la loi forte des grands nombres $\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n = o(n)$ P-presque sûrement pour des variables identiquement distribuées, centrées et de variance finie, que l'on suppose en outre *indépendantes*. Dans ce cas, on a même $\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n = \mathcal{O}(n^{1/2+\varepsilon})$ P-presque sûrement, résultat dû à Hausdorff [17, p. 419]. Or on sait que l'hypothèse de Riemann (HR dans la suite) est équivalente au fait que, pour tout $\varepsilon > 0$,

1. Denjoy se contente de noter l'analogie frappante et n'emploie pas l'exclamation d'Edwards "*hence the Riemann hypothesis is true with probability one!*".

$\mu(1)+\mu(2)+\cdots+\mu(n)=\mathcal{O}\left(n^{1/2+\varepsilon}\right)$. Ceci explique pourquoi on a pu suggérer que les valeurs de la fonctions de Möbius pourraient être, en un certain sens, indépendantes.

1.2. **Trois modèles probabilistes de la fonction de Möbius.** Iosifescu [18] et Wintner [26] ont montré comment donner un sens rigoureux aux idées précédentes, contredisant ainsi le procès en absurdité fait par Edwards.

Iosifescu considère l'ensemble I_3 des points de $[0,1]$ qui ne sont pas de la forme $m/3^n$ avec $1 \leq m < 3^n, n=1,2$, etc : tout $\omega \in I_3$ admet un unique développement ternaire $\omega = 0,\omega_1\omega_2\cdots$ avec $\omega_j=\omega_j(\omega)\in\{0,1,2\}$. Il définit ensuite la fonction de distribution

$$F(\omega)=\sum_{m=1}^{\infty}\Big(\prod_{n=1}^{m-1} a_{\omega_n(\omega)}\Big) b_{\omega_m(\omega)}$$

où $a_0=a_3=\delta/2$, $a_1=1-\delta$, $b_0=0$, $b_1=\delta/2$, $b_2=1-\delta/2$. Sur la tribu borélienne $\mathscr{B}(I_3)$, il définit enfin une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ par $\mathbb{P}([0,\omega[\cap I_3)=F(\omega)$.

La suite de variables aléatoires $(\mu_n)_{n\geq 1}$ définies sur $(I_3,\mathscr{B}(I_3),\mathbb{P})$ par $\mu_n(\omega)=\omega_n(\omega)-1$ a les propriétés alors voulues : elles sont mutuellement indépendantes et identiquement distribuées selon la loi (1). En particulier, pour l'événement $\omega_0=\sum_{k=1}^{\infty}(\mu(k)+1)/3^k\in I_3$, on a $\mu_n(\omega_0)=\mu(n)$ pour tout $n\geq 1$.

Iosifescu déduit de la loi des grands nombres de Hausdorff que l'on a $|\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n|\leq \mathcal{O}\big(n^{1/2+\varepsilon}\big)$ $\mathbb{P}$-presque sûrement, c'est-à-dire que, pour tout $\varepsilon>0$, il existe un ensemble $M_\varepsilon\in\mathscr{B}(I_3)$ vérifiant $\mathbb{P}(M_\varepsilon=1)$ tel que, pour tout $\omega\in M_\varepsilon$, il existe une constante $C(\varepsilon,\omega)$ telle que l'on ait $|\mu_1(\omega)+\mu_2(\omega)+\cdots+\mu_n(\omega)|\leq C(\varepsilon,\omega)n^{1/2+\varepsilon}$ pour tout $n\geq 1$. La preuve de HR est donc ainsi ramenée à celle de l'appartenance de ω_0 à $M=\bigcap_{k\in\mathbb{N}}M_{1/k}$: comme $\mathbb{P}(M)=1$, ceci justifie en quelque sorte que HR est $\mathbb{P}$-presque sûrement vraie.

Remarquons que la loi du logarithme itéré de Hartman-Wintner [16] et le théorème de la limite centrale impliquent respectivement que

$$\limsup_{n\to+\infty}\frac{|\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n|}{\sqrt{n\log\log(n)}}=\frac{\sqrt{12}}{\pi}\quad \mathbb{P}\text{-p.s.,} \tag{2}$$

$$\mathbb{P}\Big(\frac{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n}{\sqrt{\delta n}}>t\Big)\to\int_t^{\infty}e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u. \tag{3}$$

On a également pour tout entier $r\geq 0$ que

$$\mathbb{E}\big((\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n)^{2r}\big)=\frac{(2r)!}{2^r r!\zeta(2)^r}\,n^r(1+o(1)), \tag{4}$$

$$\mathbb{E}\big((\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n)^{2r+1}\big)=0 \tag{5}$$

lorsque $n\to+\infty$. Il s'avère que (4) et (5) impliquent (3) grâce à un critère de convergence en loi, que l'on rappelle et utilise lors de la démonstration du théorème 2.

Ce modèle souffre de deux défauts : la probabilité $\mathbb{P}$ est singulière ([2]) par rapport à la mesure de Lebesgue [5] et la suite $(\mu_n)_{n\geq 1}$ n'est pas multiplicative. Moyennant la perte

2. Iosifecu remarque qu'il s'agit surtout d'un problème psychologique : il n'est en effet pas très agréable d'avoir une mesure $\mathbb{P}$ qui peut éventuellement attribuer la valeur 0 à certains intervalles de $[0,1]\cap I_3$.

de l'indépendance mutuelle des variables (incompatibles avec la multiplicativité), ces deux défauts peuvent être corrigés au moyen du modèle de Wintner [26], que l'on construit de la manière suivante. On note I_2 l'ensemble des réels de $[0,1]$ qui ne sont pas de la forme $m/2^n$ avec $1 \leq m < 2^n, n = 1, 2$. On définit l'espace probabilisé $(I_2, \mathscr{B}_2(I_2))$ muni de la mesure de Lebesgue, que l'on notera $\mathbf{P}$ pour la distinguer de $\mathbb{P}$. Pour tout $\omega = 0, \omega_1\omega_2 \cdots \in I_2$, les variables aléatoires $X_n(\omega) = 2\omega_n(\omega) - 1$ sont des variables de Bernoulli indépendantes et de loi $\mathbf{P}(X_n = -1) = \mathbf{P}(X_n = 1) = 1/2$. Wintner a eu l'idée de définir une suite de variables aléatoires $(m_n)_{n\geq 1}$ par l'identité

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_n(\omega)}{n^s} = \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 + \frac{X_n(\omega)}{p_n^s}\Big),$$

où $(p_n)_{n\geq 1}$ est la suite croissante des nombres premiers. Pour tout $\omega \in I_2$, la suite de variables aléatoire $(m_n(\omega))_{n\geq 1}$ est multiplicative et à valeur dans $\{0, -1, 1\}$. Wintner a montré que, $\mathbf{P}$-presque sûrement, la série (ainsi que le produit) converge pour tout s tel que $\Re(s) > 1/2$. La théorie des séries de Dirichlet implique alors que $m_1 + m_2 + \cdots + m_n = \mathcal{O}(n^{1/2+\varepsilon})$ $\mathbf{P}$-presque sûrement. Comme $m_n(1) = \mu(n)$ pour tout $n \geq 1$, la preuve de HR est ramenée à celle l'appartenance de 1 à une partie de $[0,1]$ de mesure de Lebesgue 1. Il a aussi montré que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $m_1 + m_2 + \cdots + m_n = \Omega(n^{1/2-\varepsilon})$ $\mathbf{P}$-presque sûrement.

Il semble difficile d'améliorer ces deux estimations de Wintner. On peut néanmoins démontrer un résultat sur les moments qui montre une différence notable avec les estimations (4) et (5).

Théorème 1. (i) *Les variables aléatoires $(m_n)_{n\geq 1}$ sont des variables aléatoires de Bernoulli dont les lois sont données de la façon suivante :*

– $m_1 = 1$ *et* $m_n = 0$ *lorsque* $\mu(n) = 0$ *;*

– $\mathbf{P}(m_n = 1) = \mathbf{P}(m_n = -1) = 1/2$ *lorsque* $n \geq 2$ *et* $\mu(n) \neq 0$.

(ii) *Pour tout entier $r \geq 2$, on a lorsque $n \to +\infty$:*

$$\mathbb{E}\big((m_1 + m_2 + \cdots + m_n)^r\big) = C_r\, n^{r/2} \log(n)^{\rho_r} (1 + o(1)), \tag{6}$$

où $\rho_r = 0$ si $r = 2$ et $\rho_r = \binom{r}{2} - r$ si $r \geq 3$. La constante $C_r > 0$ est effective.

Le point (ii) n'exclut pas que $(m_1+m_2+\cdots+m_n)/\sqrt{n}$ converge en loi, mais il ne permet apparemment pas de le montrer. Il permet toutefois d'obtenir une nouvelle preuve de la majoration de Wintner.

Corollaire 1 (Wintner)**.** *Pour tout $\varepsilon > 0$, on a*

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_n = \mathcal{O}(n^{1/2+\varepsilon}) \quad \mathbf{P}\text{-p.s.}$$

Le point (i) du théorème 1 ne sert pas dans la démonstration du point (ii). Nous l'avons indiqué pour insister sur le fait que les variables $(m_n)_{n\geq 1}$ "ressemblent" aux $(\mu_n)_{\geq 1}$, à ceci près qu'étant multiplicatives, elles ne sont pas mutuellement indépendantes (par exemple $\mathbf{P}(m_2 = 1, m_3 = 1, m_6 = -1) = 0 \neq 1/8 = \mathbf{P}(m_2 = 1)\mathbf{P}(m_3 = 1)\mathbf{P}(m_6 = -1)$). Il est donc naturel de se demander ce qu'il se passe si l'on transforme le modèle de Wintner de la façon suivante : on considère une suite de variables aléatoires *mutuellement indépendantes* (et forcément non multiplicatives) $(M_n)_{n\geq 1}$ sur $(I_2, \mathscr{B}_2, \mathbf{P})$ telles que :

- $M_1 = 1$ et $M_n = 0$ lorsque $\mu(n) = 0$;
- $\mathbf{P}(M_n = 1) = \mathbf{P}(M_n = -1) = 1/2$ lorsque $n \geq 2$ et $\mu(n) \neq 0$.

Ce modèle est en quelque sorte intermédiaire entre celui de Denjoy-Iosifescu et celui de Wintner. Le théorème suivant montre que ce troisième modèle se comporte plutôt comme le premier.

Théorème 2. (i) *On a*

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{|M_1 + M_2 + \cdots + M_n|}{\sqrt{n \log\log(n)}} \leq \frac{\sqrt{12}}{\pi} \quad \mathbf{P}\text{-p.s.} \tag{7}$$

(ii) *Pour tout entier* $r \geq 0$, *on a*

$$\mathbb{E}\big((M_2 + M_3 + \cdots + M_n)^{2r}\big) = \frac{(2r)!}{2^r r! \zeta(2)^r}\, n^r(1 + o(1)), \tag{8}$$

$$\mathbb{E}\big((M_2 + M_3 + \cdots + M_n)^{2r+1}\big) = 0. \tag{9}$$

(iii) *La suite* $(M_1 + M_2 + \cdots + M_n)/\sqrt{\delta n}$ *tend en loi vers une variable aléatoire normale* $\mathscr{N}(0,1)$, *c'est-à-dire que, pour tout réel* t,

$$\mathbf{P}\Big(\frac{M_1 + M_2 + \cdots + M_n}{\sqrt{\delta n}} > t\Big) \to \int_t^\infty e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u \tag{10}$$

lorsque $n \to +\infty$.

Remarques. La méthode employée n'assure pas que l'on puisse remplacer $\leq$ par $=$ dans (7).

Dans (ii), nous avons écarté $M_1 = 1$ seulement par soucis de simplicité car c'est la seule variable dont l'espérance n'est pas nulle. Les estimations (8) et (9) impliquent que $\mathbb{E}\big((M_1 + M_2 + \cdots + M_n)^{2r}\big) = \frac{(2r)!}{2^r r!\zeta(2)^r}\, n^r(1 + o(1))$ et $\mathbb{E}\big((M_1 + M_2 + \cdots + M_n)^{2r+1}\big) = \frac{(2r+1)!}{2^r r!\zeta(2)^r}\, n^r(1 + o(1))$.

Par analogie plus que par observation numérique, Churchhouse et Good [6] ont conjecturé que (2) a aussi lieu en remplaçant μ_n par $\mu(n)$, c'est-à-dire que ω_0 est dans l'ensemble de mesure 1 en jeu dans (2). Cette conjecture est loin de faire l'unanimité. Il semble que Lévy ait conjecturé que la bonne valeur de la $\limsup$ serait $\sqrt{2}/\zeta(2)$ (voir [25]) et Gonek a conjecturé l'existence d'une constante $c_1 > 0$ telle que

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{|\mu(1) + \mu(2) + \cdots + \mu(n)|}{\sqrt{n}(\log\log\log(n))^{5/4}} = c_1.$$

Une heuristique analytique en faveur de cette conjecture a été proposé par Ng [20]. Voir l'article de Kotnik et van de Lune [19] pour une discussion ainsi que des Ω-estimations conjecturales. Sous HR, Titchmarsh [24] a montré l'existence d'une constante $c_2 > 0$ telle que $|\mu(1) + \mu(2) + \cdots + \mu(n)| \leq n^{1/2 + c_2/\log\log(n)}$. Le meilleur résultat actuel inconditionnel et explicite est dû à Ford [12] : il existe une constante $c_3 > 0$ explicite telle que $|\mu(1) + \mu(2) + \cdots + \mu(n)| \leq \sqrt{n}\exp(c_3 \log(n)^{3/5}/\log\log(n)^{1/5})$.

Enfin, terminons cette introduction en mentionnant que les probabilités interviennent de beaucoup d'autres façons dans la théorie de la fonction zêta (valeurs propres de matrices aléatoires, statistiques sur les zéros de zêta, interprétation probabiliste du critère de Li, etc) : voir [2, 3, 21] par exemple.

2. Démonstration du théorème 1

On se place sur l'espace probabilisé $(I_2, \mathscr{B}_2(I_2), \mathbf{P})$. Pour tout $\omega = 0, \omega_1\omega_2 \cdots \in I_2$, on définit $X_n(\omega) = 2\omega_n(\omega) - 1$, qui est une variable de Bernoulli de loi $\mathbf{P}(X_n = -1) = \mathbf{P}(X_n = 1) = 1/2$. Les variables $(X_n)_{n\geq 1}$ sont indépendantes. Rappelons que la suite de variables aléatoires $(m_n)_{n\geq 1}$ est définie par l'identité (pour $\Re(s) > 1$) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_n}{n^s} = \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 + \frac{X_n}{p_n^s}\Big),$$

où $(p_n)_{n\geq 1}$ est la suite croissante des nombres premiers. Afin de simplifier les notations, pour tout nombre premier q, on définit la variable aléatoire Y_q par $Y_q = X_r$ où $q = p_r$.

En développant le produit, on obtient que $m_1 = 1$, $m_n = 0$ si $\mu(n) = 0$ et $m_n = Y_{p_1}Y_{p_2}\cdots Y_{p_k}$ si $n = p_1p_2\cdots p_k$ et $\mu(n) \neq 0$. Les variables m_n sont donc à valeurs dans $\{0, -1, 1\}$.

(i) Il n'y a rien à ajouter concernant la loi de m_1 et celle de m_n lorsque $\mu(n) = 0$. Supposons donc que $n = p_1p_2\cdots p_k$. En fixant $\varepsilon = -1$ ou 1, on a

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(m_n = \varepsilon) &= \mathbf{P}(Y_{p_1}Y_{p_2}\cdots Y_{p_k} = \varepsilon) \\ &= \sum_{\mathscr{P}} \mathbf{P}(Y_{p_{j_1}} = -1, \ldots, Y_{p_{j_\ell}} = -1, Y_{p_{j_{\ell+1}}} = 1, \ldots, Y_{p_{j_k}} = 1),\end{aligned}$$

où la sommation est étendue à toutes les partitions $\mathscr{P}$ de $\{1, 2, \ldots, k\}$ en deux sous-ensembles $\{j_1, j_2, \ldots, j_\ell\}$ et $\{j_{\ell+1}, \ldots, j_k\}$ avec $1 \leq \ell \leq k$, où ℓ est pair si $\varepsilon = 1$ et impair si $\varepsilon = -1$. Or, dans les deux cas, il y a 2^{k-1} telles partitions et, de plus, par indépendance des Y_p, on a $\mathbf{P}(Y_{p_{j_1}} = -1, \ldots, Y_{p_{j_\ell}} = -1, Y_{p_{j_{\ell+1}}} = 1, \ldots, Y_{p_{j_k}} = 1) = 2^{-k}$. D'où $\mathbf{P}(m_n = \varepsilon) = \sum_{\mathscr{P}} 2^{-k} = 1/2$.

(ii) On remarque tout d'abord qu'il suffit de ne tenir compte que des m_k tels que $\mu(k) \neq 0$ puisque $m_k = 0$ si $\mu(k) = 0$. On a donc pour tout $r \geq 2$:

$$(m_1 + m_2 + \cdots + m_n)^r = \sum_{\substack{1\leq k_1, k_2, \ldots, k_r \leq n \\ |\mu(k_1)\cdots\mu(k_r)|=1}} m_{k_1}m_{k_2}\cdots m_{k_r}.$$

Écrivons $a = \prod_p p^{v_p(a)}$ la décomposition primaire d'un entier $a \geq 1$, avec par convention $v_p(1) = 0$ pour tout p. Puisque $\mu(k_j) \neq 0$, par multiplicativité, on a $m_{k_1}m_{k_2}\cdots m_{k_r} =$

$\prod_p Y_p^{v_p(k_1k_2\cdots k_r)}$, y compris lorsque l'un ou plusieurs des k_j vaut 1. Donc, par indépendance des Y_p, on a

$$\mathbb{E}(m_{k_1}m_{k_2}\cdots m_{k_r}) = \prod_p \mathbb{E}\big(Y_p^{v_p(k_1k_2\cdots k_r)}\big)$$

qui vaut 1 si $v_p(k_1k_2\cdots k_r)$ est pair et 0 sinon. On a donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big((m_1+m_2+\cdots+m_n)^r\big) &= \sum_{\substack{1\le k_1,k_2,\ldots,k_r\le n\\ |\mu(k_1)\cdots\mu(k_r)|=1}} \mathbb{E}(m_{k_1}m_{k_2}\cdots m_{k_r})\\
&= \#\big\{1\le k_1,k_2,\ldots,k_r\le n : |\mu(k_1)\cdots\mu(k_r)|=1 \text{ et } \forall p,\ v_p(k_1k_2\cdots k_r)\equiv 0 \bmod 2\big\}\\
&= \sum_{1\le m\le n^{r/2}}\ \sum_{k_1k_2\cdots k_r=m^2} |\mu(k_1)\mu(k_2)\cdots\mu(k_r)|.
\end{aligned}$$

Malheureusement, la suite $m\mapsto \sum_{k_1k_2\cdots k_r=m^2}|\mu(k_1)\mu(k_2)\cdots\mu(k_r)|$ n'est pas multiplicative et on ne peut pas facilement déterminer le comportement de $\mathbb{E}\big((m_1+m_2+\cdots+m_n)^r\big)$ de l'étude de la série de Dirichlet associée. En revanche, la suite multiple $f(k_1,\ldots,k_r)$ valant 1 si les k_j sont sans facteur carré et $2|v_p(k_1\cdots k_r)$ pour tout premier p, et valant 0 sinon, est multiplicative. Comme

$$\mathbb{E}\big((m_1+m_2+\cdots+m_n)^r\big) = \sum_{1\le k_1,k_2,\ldots,k_r\le n} f(k_1,k_2,\ldots,k_r),$$

on peut obtenir le comportement asymptotique de cette somme en appliquant les théorèmes taubériens de de la Bretèche [4] à la série de Dirichlet de plusieurs variables $F(s)$ définie par

$$F(s_1,\ldots,s_r) = \sum_{k_1,\ldots,k_r\ge 1}\frac{f(k_1,\ldots,k_r)}{k_1^{s_1}\cdots k_r^{s_r}} = \prod_p\Bigg(1+\sum_{1\le i<j\le r}\frac{1}{p^{s_i+s_j}}+\sum_{v\in\{0,1\}^r,2||v|,|v|\ge 4}\frac{1}{p^{s\cdot v}}\Bigg),$$

où $s=(s_1,\ldots,s_r)$, $v=(v_1,\ldots,v_r)$, $s\cdot v=\sum_{j=1}^r s_jv_j$ et $|s|=\sum_{j=1}^r v_j$. Les théorèmes de [4] sont beaucoup trop techniques pour être énoncés ici. On se contente d'indiquer comment vérifier leurs hypothèses. La fonction $F(s)$ converge absolument lorsque $\Re(s_j)>1/2$ pour tout j. Nous allons maintenant montrer comment la prolonger analytiquement. Posons $a=(1/2,1/2,\ldots,1/2)$ et définissons $G(s)=\prod_{1\le i<j\le r}(s_i+s_j)F(s+a)$. Au moyen du produit eulérien pour la fonction zêta de Riemann, on vérifie que

$$\begin{aligned}
G(s) = \Bigg(\prod_{1\le i<j\le r}(s_i+s_j)\zeta(1+s_i+s_j)\Bigg)\times&\\
\Bigg(\prod_p\Bigg(\prod_{1\le i<j\le r}\Big(1-\frac{1}{p^{1+s_i+s_j}}\Big)\Bigg)&\Bigg(1+\sum_{1\le i<j\le r}\frac{1}{p^{s_i+s_j}}+\sum_{v\in\{0,1\}^r,2||v|,|v|\ge 4}\frac{1}{p^{s\cdot v}}\Bigg)\Bigg).
\end{aligned}$$

On fait ici une remarque cruciale : pour tout $v\in\{0,1\}^r$ vérifiant $2||v|$ et $|v|\ge 4$, il existe des $\lambda_{i,j}(v)\in\mathbb{N}$ tels que $\sum_{1\le i<j\le r}\lambda_{i,j}(v)\ge 2$ et $v=\sum_{1\le i<j\le n}\lambda_{i,j}(v)(e_i+e_j)$, où

$e_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ avec 1 en $k$ième position. Il en découle qu'il existe $\kappa > 0$ tel que la fonction $G(s)$ se prolonge holomorphiquement à

$$\{s \in \mathbb{C}^r : \Re(s_i + s_j) > -\kappa, \quad \forall i, j \text{ s.t. } 1 \leq i < j \leq r\}$$

et vérifie les hypothèses (P3) ou (1.10) du théorème 1 de [4]. Il vient alors que toutes les hypothèses de ce théorème sont vérifiées.

Pour conclure, il s'agit maintenant de vérifier les hypothèses C1 et C2 du théorème 1 de [4]. Posons $I_r = \{e_i + e_j, 1 \leq i < j \leq r\}$ et définissons pour tout $\gamma \in I_r$ la forme linéaire $\ell_\gamma(s) = \gamma \cdot s$. Grâce aux calculs fait ci-dessus, on voit qu'il existe une fonction H telle que $G(s) = H((\ell_\gamma(s))_{\gamma \in I_r}) = H((s_i + s_j)_{1 \leq i < j \leq r})$. L'hypothèse C1 est donc vérifiée. Pour vérifier C2, on utilise la remarque (ii) suivant le théorème 2 : il suffit de montrer qu'il existe une famille finie $(b_\gamma)_{\gamma \in I_r}$ de réels > 0 tels que $(1, 1, \dots, 1) = \sum_{\gamma \in I_r} b_\gamma \gamma$. Or on vérifie que $\sum_{1 \leq i < j \leq r}(e_i + e_j) = 2(r-1)(1, 1, \dots, 1)$ et donc on peut prendre $b_\gamma = 1/(2r-2)$. Le théorème 2 s'applique donc bien à notre situation et il fournit le résultat suivant, qui précise notre Théorème 1. En utilisant le prolongement analytique de $G(s)$, on voit que

$$G(0) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{\binom{r}{2}} \left(\sum_{v \in \{0,1\}^r, 2 | |v|} \frac{1}{p^{|v|/2}} \right) > 0.$$

Alors

$$\mathbb{E}\big((m_1 + m_2 + \cdots + m_n)^r\big) = \sum_{1 \leq k_1, k_2, \dots, k_r \leq n} f(k_1, k_2, \dots, k_r) \sim C_r n^{r/2} \log(n)^{\rho_r}, \quad n \to \infty$$

où $\rho_r = \binom{r}{2} - \operatorname{rang}(I_r)$ et $C_r > 0$ est une constante explicitement calculable en théorie. Elle est le produit de $G(0)$ et d'une certaine intégrale sur un domaine $\binom{r}{2}$-dimensionnel. On vérifie que $\rho_r = 0$ si $r = 2$ tandis que $\rho_r = \binom{r}{2} - r$ si $r \geq 3$.

3. Démonstration du corollaire 1

Nous allons utiliser l'estimation (6) en conjonction avec un résultat facile et utile de théorie de la mesure. On en inclut la preuve qui revient essentiellement à redémontrer, dans un cas particulier, l'un des sens du lemme de Borel-Cantelli.

Lemme 1. *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur un espace mesuré $(E, \mathscr{T}, \mu)$. Supposons qu'il existe $p > 0$ tel que $f_n \in L^p(E)$ et*

$$\sum_n \int_E |f_n(x)|^p \, \mathrm{d}\mu(x) < +\infty. \tag{11}$$

Alors $f_n \to 0$ μ-presque sûrement sur E.

Démonstration. Étant donné $\varepsilon > 0$, soit $A_{n,\varepsilon} = \{x \in E : |f_n(x)| \geq \varepsilon\}$. Alors la convergence presque sûre de f_n vers 0 peut être reformulée de la façon suivante : pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $A_\varepsilon = \bigcap_{N \geq 0} \bigcup_{n \geq N} A_{n,\varepsilon}$ est de mesure 0. Or nous avons

$$\mu(A) = \mu\big(\bigcap_{N \geq 0} \bigcup_{n \geq N} A_{n,\varepsilon}\big) \leq \mu\big(\bigcup_{n \geq N} A_{n,\varepsilon}\big) \leq \sum_{n \geq N} \mu(A_{n,\varepsilon}) \tag{12}$$

pour tout $N \geq 0$ et tout $\varepsilon > 0$. Il suffit donc de prouver que la série à droite de (12) converge pour tout $\varepsilon > 0$. C'est le cas puisque

$$\int_E |f_n(x)|^p \,\mathrm{d}\mu(x) \geq \int_{A_{n,\varepsilon}} |f_n(x)|^p \,\mathrm{d}\mu(x) \geq \varepsilon^p \mu(A_{n,\varepsilon}).$$

(la deuxième inégalité a lieu car $p > 0$) et l'hypothèse (11) permet de conclure. $\square$

Remarquons maintenant que, en vertu de (6), pour tout entier $r \geq 2$, on a

$$\mathbb{E}\big((m_1 + m_2 + \cdots + m_n)^r\big) \ll n^{r/2} \log(n)^{\rho_r},$$

où la constante implicite ne dépend que de r. Donc si r est pair, pour tout $\varepsilon > 0$ on a

$$\mathbb{E}\left(\left|\frac{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}{n^{1/2+1/r+\varepsilon}}\right|^r\right) \ll \frac{\log(n)^{\rho_r}}{n^{1+r\varepsilon}},$$

qui est le terme d'une serie convergente car $r\varepsilon > 0$. Par le lemme 1, quand $n \to +\infty$, la suite $n^{-(1/2+1/r+\varepsilon)}(m_1 + m_2 + \cdots + m_n)$ converge $\mathbf{P}$-presque sûrement vers 0. Comme $1/r$ peut être rendu arbitrairement petit, le corollaire en découle.

4. Démonstration du théorème 2

On se place sur l'espace probabilisé $(I_2, \mathscr{B}_2(I_2), \mathbf{P})$. Pour tout $\omega = 0, \omega_1\omega_2 \cdots \in I_2$, on considère de nouveau les variables de Bernoulli $X_n(\omega) = 2\omega_n(\omega) - 1$. Soit $\mathscr{S}$ l'ensemble des entiers $k \geq 1$ tels que $\mu(k) \neq 0$: on ordonne $\mathscr{S}$ comme la suite croissante $(k_n)_{n\geq 1}$ et on note $T_n = \mathscr{S} \cap \{1, 2, \dots, n\}$. Définissons la suite de variables aléatoires $(M_k)_{k\geq 1}$ par $M_k = X_j$ si $k = k_j$ et $M_k = 0$ sinon. Ces variables sont mutuellement indépendantes.

(i) La loi du logarithme itéré de Hartman-Wintner [16] pour les suites de variables de Bernoulli $(Z_n)_{n\geq 0}$ telles que $\mathbf{P}(Z_n = -1) = \mathbf{P}(Z_n = 1) = 1/2$ implique que

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{|Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n|}{\sqrt{n \log\log(n)}} = \sqrt{2} \quad \mathbf{P}\text{-p.s.} \tag{13}$$

Remarquons que

$$\sum_{j=1}^{n} M_j = \sum_{j=1,\, \mu(j)\neq 0}^{n} M_j = \sum_{j=1}^{T_n} M_{k_j} = \sum_{j=1}^{T_n} X_j.$$

La fonction T est croissante et vérifie $T_n = n/\zeta(2) + \mathcal{O}(n^{1/2+\varepsilon})$ (voir [15, p. 270, Theorem 334]) et en appliquant (13) à la suite $Z_j = X_j$ (avec $j \geq 2$), on obtient donc

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to+\infty} &\frac{|M_1 + M_2 + \cdots + M_n|}{\sqrt{n \log\log(n)}} \\ &= \limsup_{n\to+\infty} \frac{|X_1 + X_2 + \cdots + X_{T_n}|}{\sqrt{T_n \log\log(T_n)}} \frac{\sqrt{T_n \log\log(T_n)}}{\sqrt{n \log\log(n)}} \leq \sqrt{2\delta} = \frac{\sqrt{12}}{\pi} \quad \mathbf{P}\text{-p.s.}\end{aligned}$$

Remarque. Il n'est pas possible de prouver par cette méthode que

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{|M_1 + M_2 + \cdots + M_n|}{\sqrt{n \log\log(n)}} = \frac{\sqrt{12}}{\pi} \quad \mathbf{P}\text{-p.s.}$$

car on applique la loi du logarithme itéré à $(X_n)_{n\geq 1}$ le long de sa sous-suite $(X_{T_n})_{n\geq 1}$ qui n'a aucune raison d'être l'une de celles réalisant (13).

(*ii*) Soient des entiers $k_1, k_2, \ldots, k_r \geq 2$. Compte-tenu de l'indépendance et de la loi des $(M_n)_{n\geq 2}$, on a $\mathbb{E}(M_{k_1} M_{k_2} \cdots M_{k_r}) = 0$ si (au moins) un k_j est tel que $\mu(k_j) = 0$ ou est répété un nombre impair de fois. Ce dernier point est forcément le cas si r est impair et comme

$$\mathbb{E}\big((M_2 + M_3 + \cdots + M_n)^r\big) = \sum_{2\leq k_1, k_2, \ldots, k_r \leq n} \mathbb{E}(M_{k_1} M_{k_2} \cdots M_{k_r}),$$

on a donc $\mathbb{E}\big((M_2 + M_3 + \cdots + M_n)^r\big) = 0$ lorsque r est impair (ce qui était aussi évident *a priori* puisque la loi de $M_2 + M_3 + \cdots + M_n$ est symétrique).

Lorsque $r = 2s$ est pair, on doit compter le nombre de $2s$-uplets d'entiers $(k_1, \ldots, k_{2s}) \in [2, n]^{2s}$ tels que les $k_1, \ldots, k_{2s}$ se répartissent en s couples $((k_{1,\ell}, k_{2,\ell}))_{\ell=1,\ldots,s}$ tels que $k_{1,\ell} = k_{2,\ell}$. Notons qu'il y a $(2s)!/2^s$ couples distincts, c'est-à-dire des couples correspondant à des $2s$-uplets $(k_1, \ldots, k_{2s})$ tels que, par exemple, $k_1 = k_2 < k_3 = k_4 < \cdots < k_{2s-1} = k_{2s}$. Mais on doit aussi tenir compte du fait que des couples pourraient être égaux. Cependant la contribution des $2s$-uplets correspondant à ces derniers sera négligeable : on note $c_{j,s}$ le nombre des couples exactement égaux à $j - 1$ autres, de telle sorte que $c_{1,s} = (2s)!/2^s$.

$$\mathbb{E}\big((M_2 + M_3 + \cdots + M_n)^{2s}\big) = \sum_{j=1}^{s} c_{s-j+1,s} \sum_{2\leq \ell_1 < \ell_2 < \cdots < \ell_j \leq n} |\mu(\ell_1)\mu(\ell_2)\cdots\mu(\ell_j)|. \tag{14}$$

Nous montrerons ci-dessous que, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout entier $j \geq 1$, on a

$$\sum_{2\leq \ell_1 < \ell_2 < \cdots < \ell_j \leq n} |\mu(\ell_1)\mu(\ell_2)\cdots\mu(\ell_j)| = \frac{n^j}{j!\zeta(2)^j} + \mathcal{O}(n^{j-1/2+\varepsilon}), \tag{15}$$

où la constante implicite dans le $\mathcal{O}$ dépend au plus de ε et j. En reportant (15) dans (14), on voit que le terme prépondérant est celui pour $j = s$ et, plus précisément, que

$$\mathbb{E}\big((M_2 + M_3 + \cdots + M_n)^{2s}\big) = \frac{c_{1,s}}{s!\zeta(2)^s}\, n^s + \mathcal{O}(n^{s-1/2+\varepsilon}).$$

Comme $c_{1,s}/s! = (2s)!/(s!2^s)$, l'équivalent (8) en découle.

Il ne reste donc plus qu'à démontrer (15). On va procéder par récurrence sur $j \geq 1$. Pour $j = 1$, il s'agit d'estimer (de nouveau) la fonction T_n introduite dans la preuve du point (*i*) et on a (de nouveau)

$$\sum_{2\leq \ell \leq n} |\mu(\ell)| = \frac{n}{\zeta(2)} + \mathcal{O}(n^{1/2+\varepsilon}).$$

Supposons que (15) soit vraie pour l'entier j et montrons qu'elle est vraie pour $j+1$. On a

$$\begin{aligned} &\sum_{2\le \ell_1<\ell_2<\cdots<\ell_j<\ell_{j+1}\le n} |\mu(\ell_1)\mu(\ell_2)\cdots\mu(\ell_j)\mu(\ell_{j+1})| \\ &\quad = \sum_{2\le\ell\le n}|\mu(\ell)| \sum_{2\le \ell_1<\ell_2<\cdots<\ell_j\le \ell} |\mu(\ell_1)\mu(\ell_2)\cdots\mu(\ell_j)| \\ &\quad = \sum_{2\le\ell\le n}|\mu(\ell)|\bigg(\frac{\ell^j}{j!\zeta(2)^j}+\mathcal{O}(\ell^{j-1/2+\varepsilon})\bigg) \\ &\quad = \frac{1}{j!\zeta(2)^j}\sum_{2\le\ell\le n}|\mu(\ell)|\ell^j+\mathcal{O}\bigg(\sum_{\ell=2}^{n}\ell^{j-1/2+\varepsilon}\bigg). \end{aligned}$$

La somme dans le $\mathcal{O}$ est facile à estimer : c'est un $\mathcal{O}\big(n^{j+1/2+\varepsilon}\big)$. Quant à la première somme, on en détermine un développement asymptotique avec reste grâce à la formule de Perron effective (voir [23, p. 135, Théorème 2]), que l'on applique à la fonction $\zeta(s-j)/\zeta(2s-2j) = \sum_{k=1}^{\infty}|\mu(k)|k^jk^{-s}$. On obtient

$$\sum_{2\le\ell\le n}|\mu(\ell)|\ell^j = \frac{n^{j+1}}{(j+1)\zeta(2)}+\mathcal{O}(n^{(j+1)/2+\varepsilon}).$$

En regroupant les termes, on constate que l'on a prouvé (15) pour $j+1$, ce qui achève la démonstration de la récurrence et du point (ii).

(iii) Il existe au moins deux démonstrations possibles. La première utilise une condition suffisante de convergence en loi exposée dans [11, Volume II, p. 262] : *Soit X une variable aléatoire dont les moments $(\mathbb{E}(X^k))_{k\ge0}$ déterminent de façon unique la loi et soit une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\ge1}$ telle que, pour tout entier $k\ge 0$, la suite des moments $(\mathbb{E}(X_n^k))_{n\ge1}$ converge vers $\mathbb{E}(X^k)$. Alors X_n tend en loi vers X.*

On peut appliquer ce critère avec $X_n = (M_2+M_3+\cdots+M_n)/\sqrt{\delta n}$ et X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0,1)$. En effet, cette loi est déterminée par ses moments (qui sont $\mathbb{E}(X^k)=0$ si k impair et $\mathbb{E}(X^k)=(2\ell)!/(2^\ell\ell!)$ si $k=2\ell$ est pair) et par le point (ii), on a pour tout entier $k\ge0$:

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}(X_n^k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est impair} \\ \frac{(2\ell)!}{2^\ell\ell!} & \text{si } k=2\ell \text{ est pair}\end{cases} = \mathbb{E}(X^k).$$

La deuxième démonstration est plus classiquement basée sur le théorème de Lévy (voir [10, chapitre 18]) : *Soit $(Z_n)_{n\ge0}$ une suite de variables aléatoires telles que la suite de leurs fonctions caractéristiques $g_n(t)=\mathbb{E}(e^{itZ_n})$ tend simplement vers $g(t)$ continue en 0 (t réel). Alors g est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire Z et $Z_n\to Z$ en loi.*

On l'applique à la suite $Z_n=(M_1+M_2+\cdots+M_n)/\sqrt{\delta n}$, dont on note $\varphi_n(t)$ la fonction caractéristique. Pour simplifier, on note $s_n=\sqrt{\delta n}$. Les lois des variables M_n ainsi que leur indépendance impliquent que

$$\varphi_n(t) = \mathbb{E}\big(e^{itm_1/s_n}\big) \prod_{k=2}^{n} \mathbb{E}\big(e^{itm_k/s_n}\big) = e^{it/s_n} \prod_{k=2,\,|\mu(k)|=1}^{n} \cos(t/s_n) = e^{it/s_n} \cos(t/s_n)^{T_n-1}.$$

Compte-tenu de l'estimation $T_n = n/\zeta(2) + \mathcal{O}(n^{1/2})$, il en découle que $\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(t) = \exp(-t^2/2)$, ce qui termine la preuve du théorème.

5. Une autre version aléatoire de l'hypothèse de Riemann

5.1. **Reformulation de HR.** Dans [22], Riesz a introduit la série entière

$$R(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\zeta(2k)(k-1)!} x^k, \tag{16}$$

qui converge pour tout $x \in \mathbb{C}$. Il montre qu'elle admet la représentation intégrale

$$R(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa+i\infty}^{\kappa-i\infty} \frac{\Gamma(1-s)}{\zeta(2s)} x^s \mathrm{d}s \tag{17}$$

pour les x tels que $-\pi/2 + \eta \leq \arg(x) \leq \pi/2 - \eta$, $\eta > 0$ et *a priori* $1/2 < \kappa < 1$. Comme la fonction $\zeta(2s)$ ne s'annule pas sur $\Re(s) = 1/2$, il choisit $\kappa = 1/2$ et en déduit que $\lim_{x\to+\infty} x^{-1/2} R(x) = 0$. Si on suppose HR vraie, alors on peut même choisir $\kappa = 1/4 + \varepsilon$ et en déduire finalement que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{x\to+\infty} x^{-(1/4+\varepsilon)} R(x) = 0. \tag{18}$$

Par ailleurs, Riesz montre que l'on a $\Gamma(1 - s/2)\zeta(s)^{-1} = \int_0^\infty x^{-(1+s/2)} R(x)\,\mathrm{d}x$ lorsque $1 + \eta \leq \mathrm{Re}(s) \leq 2 - \eta$ et il remarque que si l'on suppose (18) vraie, alors cette intégrale converge absolument et uniformément dans toute bande $1/2 + \eta \leq s \leq 2 - \eta$ et ainsi HR serait vraie. Donc (18) est équivalent à HR. Comme on sait depuis Hardy [13] que la fonction $\zeta(s)$ possède des zéros sur la droite $\Re(s) = 1/2$, on ne peut pas remplacer $1/4 + \varepsilon$ par $1/4$ dans (18).

Hardy et Littlewood [14] ont produit un critère analogue faisant intervenir les nombres $\zeta(2n+1)$. Cependant, comme indiqué par Titchmarsh, "*these conditions have a superficial attractiveness since they depend explicitly only on values taken by $\zeta(s)$ at points in $\sigma > 1$; but actually no use has ever been made of them*". Récemment, ces critères pour HR ont été mis dans un contexte plus général par Baez-Duarte [1].

La fonction de Riesz peut s'écrire sous une forme différente. Pour tout nombre complexe s tel que $\Re(s) > 1$, on a $\zeta(s)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) n^{-s}$, de telle sorte que, pour tout $x \in \mathbb{C}$,

$$R(x) = \sum_{k,n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}\mu(n)}{n^{2k}(k-1)!} x^k = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^2} e^{-x/n^2}. \tag{19}$$

(L'échange des sommations est licite par convergence absolue.) En raison de la présence de μ, l'expression de R à droite de (19) ne semble pas plus pratique que (16) pour son étude asymptotique quand $x \to +\infty$. Si l'on majore naïvement $|\mu|$ par 1, on obtient $|R(x)| \leq x\sum_{n=1}^{\infty} e^{-x/n^2}/n^2$ et le lemme 2 au paragraphe 6 montre que le membre de droite se comporte comme $x^{1/2}$, ce qui est même moins bon que l'estimation déduite de la représentation intégrale (17) de $R(x)$.

5.2. **Fonctions de Riesz aléatoires.** Une idée naturelle pour étudier la fonction R est de la voir comme une trajectoire possible d'un processus stochastique dont on arrive à déterminer le comportement probabiliste, en un sens plus ou moins fort. Pour cela, considérons dans un premier temps le modèle probabiliste $(\mu_n)_{n\geq 1}$ de la fonction de Möbius décrit par Iosifescu et définissons le processus $(\mathscr{R}(x,\cdot))_{x\geq 0}$ sur $\big(I_3, \mathscr{B}(I_3), \mathbb{P}\big)$ par

$$\mathscr{R}(x,\omega) = x\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n(\omega)}{n^2}\, e^{-x/n^2}. \tag{20}$$

Ce processus n'a rien d'un "monstre analytique" car, pour tout $\omega \in I_3$, la trajectoire $x \mapsto \mathscr{R}(x,\omega)$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^+$. Notons que $R = \mathscr{R}(\cdot,\omega_0)$ est bien une trajectoire de $\mathscr{R}$. Dans la suite, on omet d'indiquer la dépendance en ω et on parlera de $x \mapsto \mathscr{R}(x)$ comme d'une fonction ou série (aléatoire).

On définit la fonction $\rho(x) = \Big(\delta x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^4}\, e^{-2x/n^2}\Big)^{1/2}$, dont on montrera qu'elle vérifie

$$\lim_{x\to+\infty} x^{-1/4}\rho(x) = (3/2)^{1/2}(2\pi)^{-1/4}.$$

Théorème 3. *On se place sur l'espace probabilisé $(I_3, \mathscr{B}(I_3), \mathbb{P})$.*

(i) Il existe une constante absolue $C > 0$ (explicitable) telle que l'on ait $\mathbb{P}$-presque sûrement

$$|\mathscr{R}(x)| \leq Cx^{1/4}\sqrt{\log\log(x)} \tag{21}$$

lorsque $x \to +\infty$.

(ii) Quand $x \to +\infty$, la fonction $\mathscr{R}(x)/\rho(x)$ tend en loi vers une variable aléatoire normale de loi $\mathscr{N}\big(0,1\big)$, c'est-à-dire que pour tout réel t,

$$\lim_{x\to+\infty} \mathbb{P}\Big(\frac{\mathscr{R}(x)}{\rho(x)} > t\Big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_t^{\infty} e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u. \tag{22}$$

6. Démonstration du théorème 3

On se servira plusieurs fois du lemme suivant, que nous démontrons dès à présent. Pour tous réels $s > 1/2$ et $x \geq 0$, définissons $\psi_s(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\big(\frac{1}{n^2}\, e^{-x/n^2}\big)^s$.

Lemme 2. *Pour tout réel $s > 1/2$, on a*

$$\lim_{x\to+\infty} x^{s-1/2}\,\psi_s(x) = \frac{1}{2}\, s^{1/2-s}\,\Gamma\big(s-\frac{1}{2}\big).$$

La fonction $\rho(x)$ introduite avant l'énoncé du théorème 3 vérifie $\rho(x) = \sqrt{\delta x^2\psi_2(x)}$ et le lemme implique que l'on a bien

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\rho(x)}{x^{1/4}} = \frac{(2\pi)^{1/4}}{4\sqrt{\zeta(2)}}.$$

Démonstration du lemme 2. La démonstration est basée sur la comparaison entre $\psi_s(x)$ et l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-sx/t^2}t^{-2s}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\,x^{s-1/2}s^{1/2-s}\,\Gamma\big(s-\frac{1}{2}\big).$$

(Cette égalité découle immédiatement du changement de variable $u = sx/t^2$ et de la définition de la fonction Gamma.) Les $\psi_s(x)$ étant des fonctions décroissantes de x, on peut supposer pour simplifier que $\sqrt{x}$ est un entier. Notons que la fonction $t\mapsto \exp(-sx/t^2)/t^{2s}$ atteint son maximum $(ex)^{-s}$ sur $]0,+\infty[$ en $t=\sqrt{x}$. On en déduit que :

$$\begin{aligned}\psi_s(x) &= \Big(\sum_{n=1}^{\sqrt{x}-1}+\sum_{n=\sqrt{x}+1}^{\infty}\Big)n^{-2s}\,e^{-sx/n^2}+(ex)^{-s}\\ &\le \Big(\int_1^{\sqrt{x}}+\int_{\sqrt{x}}^{\infty}\Big)e^{-sx/t^2}t^{-2s}\mathrm{d}t+(ex)^{-s} \le \int_0^\infty e^{-sx/t^2}t^{-2s}\,\mathrm{d}t+(ex)^{-s}.\end{aligned}$$

De façon similaire, on a

$$\begin{aligned}\psi_s(x) &= \Big(\sum_{n=1}^{\sqrt{x}}+\sum_{n=\sqrt{x}+1}^{\infty}\Big)n^{-2s}\,e^{-sx/n^2}\\ &\ge \Big(\int_0^{\sqrt{x}}+\int_{\sqrt{x}+1}^{\infty}\Big)e^{-sx/t^2}t^{-2s}\mathrm{d}t \ge \int_0^\infty e^{-sx/t^2}\,\frac{\mathrm{d}t}{t^{2s}}-\int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{x}+1}e^{-sx/t^2}t^{-2s}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Le lemme en découle car les fonctions $(ex)^{-s}$ et $\int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{x}+1}e^{-sx/t^2}t^{-2s}\,\mathrm{d}t$ sont des $o(x^{1/2-s})$. $\square$

Passons maintenant à la démonstration du théorème 3. On va exploiter le fait que l'on connaît bien le comportement $\mathbb{P}$-presque sûr de la somme $M_n = \mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n$. Posons

$$E_n(x) = \frac{e^{-x/n^2}}{n^2}-\frac{e^{-x/(n+1)^2}}{(n+1)^2},$$

qui vérifie l'inégalité $|E_n(x)|\le 2n^{-2}$ pour tous $x\ge 0$ et $n\ge 1$. La transformation d'Abel nous permet d'exprimer $\mathscr{R}(x)$ au moyen de M_n : pour tout entier $N\ge 1$, on a

$$\sum_{n=1}^{N}\mu_n\,\frac{e^{-x/n^2}}{n^2} = \sum_{n=1}^{N-1}M_nE_n(x)+M_NE_N(x). \tag{23}$$

On a $|M_n(\omega)|\le n$ pour tout $\omega\in I_3$ donc $|M_n(\omega)E_n(x)|\ll 1/n$ pour tout $\omega\in I_3$. On peut donc passer à la limite $N\to+\infty$ dans (23) et on obtient que pour tout $x\ge 0$ (et tout

$\omega \in I_3$), on a

$$\mathscr{R}(x) = x\sum_{n=1}^{\infty}\big(\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n\big)E_n(x).$$

Il s'en suit que, presque sûrement pour tout $x \geq 0$, on a $|\mathscr{R}(x)| \leq x\sum_{n=1}^{\infty} n^{1/2+\varepsilon}|E_n(x)|$.

Pour aller plus loin, il nous faut majorer $E_n(x)$ plus finement que ci-dessus. Posons $u = x/n^2$, $v = n^2/(n+1)^2$: on a $E_n(x) = \frac{1}{n^2}\left(e^{-u} - ve^{-vu}\right)$ que l'on majore en appliquant le théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[v,1]$ à la fonction $z \mapsto ze^{-zu}$ (de dérivée $(1-uz)e^{-zu}$). On obtient ainsi l'existence d'un réel $\xi \in]v,1[$ tel que $E_n(x) = \frac{1}{n^2}(1-v)(1-u\xi)e^{-u\xi}$. Remarquons que

$$\begin{aligned}
&0 \leq 1 - v = \frac{2n+1}{(n+1)^2} \leq \frac{2}{n+1},\\
&|1-u\xi| \leq 1 + u\xi \leq 1 + \frac{x}{n^2} \leq 1 + \frac{4x}{(n+1)^2},\\
&\exp(-u\xi) \leq \exp(-x/(n+1)^2).
\end{aligned}$$

On a donc, pour tous $n \geq 1$ et $x \geq 0$,

$$|E_n(x)| \leq \frac{4}{(n+1)^2}\left(\frac{2}{n+1} + \frac{4x}{(n+1)^3}\right)e^{-x/(n+1)^2}$$

Il en découle que, presque sûrement, pour tout $x \geq 0$, on a

$$|\mathscr{R}(x)| \ll x\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^{1/2+\varepsilon}}{n^2}\left(\frac{1}{n}+\frac{x}{n^3}\right)e^{-x/n^2},$$

où la constante implicite est absolue. Le lemme 2 nous donne les majorations

$$x\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{5/2-\varepsilon}}\,e^{-x/n^2} \ll x^{1/4+\varepsilon/2} \quad \text{et} \quad x^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{9/2-\varepsilon}}\,e^{-x/n^2} \ll x^{1/4+\varepsilon/2}.$$

Il en découle que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a presque sûrement $\lim_{x\to+\infty} x^{-(1/4+\varepsilon)}\mathscr{R}(x) = 0$, ce qui était le résultat annoncé dans la remarque suivant l'énoncé du théorème 3.

Démontrons maintenant le théorème 3 proprement dit.

Pour (i), il s'agit de raffiner les calculs précédents. La loi du logarithme itéré implique que, presque sûrement, on a $\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n = \mathcal{O}\big(\sqrt{n\log\log(n)}\big)$, où la constante implicite est absolue. En reportant dans (6), on en déduit que presque sûrement pour tout $x \geq 0$, on a

$$|\mathscr{R}(x)| \ll \sum_{n=3}^{\infty}\sqrt{n\log\log(n)}E_n(x).$$

On majore ensuite $E_n(x)$ comme en (i) et on obtient que

$$|\mathscr{R}(x)| \ll x\sum_{n=3}^{\infty}\sqrt{\log\log(n)}\left(\frac{1}{n^{5/2}}+\frac{x}{n^{9/2}}\right)e^{-x/n^2}$$

où la constante implicite est absolue.

Notons que, pour tout $x \gg 0$, on a les majorations triviales

$$x \sum_{n \geq x} \frac{\sqrt{\log\log(n)}}{n^{5/2}}\, e^{-x/n^2} = \mathcal{O}(1) \quad \text{et} \quad x^2 \sum_{n \geq x} \frac{\sqrt{\log\log(n)}}{n^{9/2}}\, e^{-x/n^2} = \mathcal{O}(1).$$

(Les deux fonctions tendent même vers 0 lorsque $x \to +\infty$.) Il en découle que

$$\begin{aligned} |\mathscr{R}(x)| &\ll x \sum_{3 \leq n \leq x} \sqrt{\log\log(n)} \left(\frac{1}{n^{5/2}} + \frac{x}{n^{9/2}} \right) e^{-x/n^2} + \mathcal{O}(1) \\ &\ll x\sqrt{\log\log(x)} \sum_{2 \leq n \leq x} \left(\frac{1}{n^{5/2}} + \frac{x}{n^{9/2}} \right) e^{-x/n^2} + \mathcal{O}(1) \\ &\ll x^{1/4}\sqrt{\log\log(x)}. \end{aligned}$$

La dernière majoration résulte du lemme 2 appliqué aux deux séries $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-5/2} e^{-x/n^2}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-9/2} e^{-x/n^2}$.

(*ii*) La démonstration est basée de nouveau sur le théorème de Lévy, énoncé dans la partie 4. Rappelons que $\delta = 1/\zeta(2)$ et posons pour simplifier $\mathscr{A}_n(x) = xe^{-x/n^2}/(n^2\rho(x))$. Dans toute la suite, on note $\cos t\mathscr{A}_n(x)$ pour $\cos\big(t\mathscr{A}_n(x)\big)$. La fonction caractéristique $\varphi_x(t)$ de $\mathscr{R}(x)/\rho(x)$ est

$$\varphi_x(t) = \int_\Omega e^{\sum_{n=1}^{\infty} it\mathscr{A}_n(x)\mu_n}\, \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_\Omega \prod_{n=1}^{\infty} e^{it\mathscr{A}_n(x)\mu_n}\, \mathrm{d}\mathbb{P}. \tag{24}$$

En utilisant le théorème de convergence dominée et l'indépendance des variables aléatoires μ_n, on a

$$\int_\Omega \prod_{n=1}^{\infty} e^{it\mathscr{A}_n(x)\mu_n}\, \mathrm{d}\mathbb{P} = \prod_{n=1}^{\infty} \int_\Omega e^{it\mathscr{A}_n(x)\mu_n}\, \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Comme l'intégrale $\int_\Omega e^{it\mathscr{A}_n(x)\mu_n}\, \mathrm{d}\mathbb{P}$ se calcule aisément, on obtient en définitive que

$$\varphi_x(t) = \prod_{n=1}^{\infty} \big(1 - \delta + \delta \cos t\mathscr{A}_n(x)\big) \tag{25}$$

pour tout réel t.

Nous allons maintenant étudier le comportement asymptotique du produit à droite de (25) afin de montrer que $\varphi_x(t)$ tend vers $\varphi(t) = e^{-t^2/2}$ quand x tend vers $+\infty$. Le théorème de Lévy s'appliquera alors de la façon suivante : pour toute suite de réels $(x_k)_{k\geq 0}$ tendant vers $+\infty$, la suite de fonctions $\varphi_{x_k}(t)$ tend vers $\varphi(t)$. Donc $\mathscr{R}(x_k)/\rho(x_k)$ tend en loi vers une variable aléatoire X de loi $\mathscr{N}(0,1)$, indépendante de la suite choisie. La topologie de la convergence en loi étant métrisable, on a donc finalement que $\mathscr{R}(x)/\rho(x)$ tend aussi en loi vers X quand $x \to +\infty$.

Fixons le réel t. Pour tout $x > 0$, le maximum de la fonction $y \mapsto xy^{-2}\exp(-x/y^2)$ pour $y > 0$ est e^{-1}, atteint en $y = \sqrt{x}$. Donc pour tout entier $n \geq 1$ et tout $x > 0$,

$$0 \leq |\, t\mathscr{A}_n(x)| \leq \frac{|\, t|}{e\rho(x)}. \tag{26}$$

Comme le membre de droite de (26) tend vers 0 quand $x \to +\infty$, il existe deux constantes positives $C_1 = C_1(t)$ et $\alpha = \alpha(t) < 1$ telle que, si $x \geq C_1$, on ait $0 \leq d\big(1 - \cos t\mathscr{A}_n(x)\big) \leq \alpha$. De plus, il existe une constante $C_2 = C_2(t)$ telle que, pour tout $v \in [0, \alpha]$, on ait $|\log(1-v) + v| \leq C_2 v^2$. Comme chacune des séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big(1 - \cos t\mathscr{A}_n(x)\big) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \big(1 - \cos t\mathscr{A}_n(x)\big)^2$$

est convergente, on déduit des considérations précédentes et de l'égalité

$$\log(\varphi_x(t)) = \sum_{n=1}^{\infty} \log\Big(1 - \delta\big(1 - \cos t\mathscr{A}_n(x)\big)\Big)$$

que, pour tout $x \geq C_1$, on a

$$\log(\varphi_x(t)) = -\delta \sum_{n=1}^{\infty} \big(1 - \cos t\mathscr{A}_n(x)\big) + S_1(x,t) \tag{27}$$

avec $|S_1(x,t)| \leq C_2 \sum_{n=1}^{\infty} \big(1 - \cos t\mathscr{A}_n(x)\big)^2$.

Comme par ailleurs, pour tout réel v, on a $1 - \cos(v) = v^2/2 + \mathcal{O}(v^4)$ et $\big(1 - \cos(v)\big)^2 = \mathcal{O}(v^4)$ où les constantes implicites sont absolues, on déduit de (27) qu'il existe une constante $C_3 = C_3(t)$ telle que, pour tout $x \geq C_1$,

$$\log(\varphi_x(t)) = -\frac{\delta}{2}\, t^2 \sum_{n=1}^{\infty} \mathscr{A}_n^2(x) + S_2(x,t). \tag{28}$$

avec $|S_2(x,t)| \leq C_3 \sum_{n=1}^{\infty} \mathscr{A}_n^4(x)$.

Étant donnée la définition de $\rho(x)$, on a $\delta \sum_{n=1}^{\infty} \mathscr{A}_n^2(x) = 1$. En appliquant le lemme 2 avec $s = 4$ et $s = 2$ (pour le comportement de ρ), on obtient que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathscr{A}_n^4(x) = \big(x/\rho(x)\big)^4 \psi_4(x) = \mathcal{O}(x^{-1/2}) \tag{29}$$

quand $x \to +\infty$. Il résulte donc de (28) et (29) que l'on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi_x(t) = e^{-t^2/2}$, c'est-à-dire que $\mathscr{R}(x)/\rho(x)$ tend en loi vers $\mathscr{N}(0,1)$.

7. La fonction de Liouville comme alternative à la fonction de Möbius

Rappelons que la fonction λ de Liouville est définie par $\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)}$, où $\Omega(n)$ dénote le nombre de facteurs premiers de n comptés avec multiplicité. Elle est totalement multiplicative, c'est-à-dire que $\lambda(nm) = \lambda(n)\lambda(m)$ pour tous entiers $n, m \geq 1$. Définissons pour tout $x \in \mathbb{C}$ une fonction $L(x)$, similaire à celle de Riesz, par

$$L(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \frac{\zeta(4k)}{\zeta(2k)} x^k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa+i\infty}^{\kappa-i\infty} \frac{\zeta(4s)\Gamma(1-s)}{\zeta(2s)} x^s \mathrm{d}s, \tag{30}$$

la deuxième égalité valant pour les x tels que $-\pi/2 + \eta \leq \arg(x) \leq \pi/2 - \eta$, $\eta > 0$ et *a priori* $1/2 < \kappa < 1$. Comme pour R, on montrer que HR équivaut au fait que, pour tout $\varepsilon > 0$, on ait

$$\lim_{x \to +\infty} x^{-(1/4+\varepsilon)} L(x) = 0.$$

Par ailleurs, au moyen de l'identité $\zeta(2s)\zeta(s)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(n) n^{-s}$, on montre sans peine que pour tout $x \in \mathbb{C}$, on a $L(x) = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^2} e^{-x/n^2}$.

La fonction λ n'est pas plus facile à étudier que μ. On sait que les suites $\frac{1}{N}\#\{n \leq N : \lambda(n) = 1\}$ et $\frac{1}{N}\#\{n \leq N : \lambda(n) = -1\}$ tendent vers $1/2$ lorsque $N \to +\infty$. Le théorème de nombres premiers implique également que $\sum_{n \leq N} \lambda(n) = o(N)$. L'hypothèse de Riemann étant équivalente à l'estimation $\sum_{n \leq N} \lambda(n) = \mathcal{O}(N^{1/2+\varepsilon})$, Denjoy [8] a remarqué une certaine analogie entre $(\lambda(n))_{n \geq 1}$ et une suite de variables aléatoires de Bernoulli $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ identiquement distribuées définies sur un espace probabilisé convenable $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ et de loi

$$\mathbb{P}(\lambda_n = 1) = \mathbb{P}(\lambda_n = -1) = 1/2. \tag{31}$$

Ainsi qu'on l'a indiqué à la fin du paragraphe 1.2, on peut facilement modéliser une telle suite de variables aléatoires en posant $\lambda_n = 2\omega_n(\omega) - 1$, où $\omega = 0, \omega_1\omega_2 \cdots$ avec $\omega_j = \omega_j(\omega) \in \{0, 1\}$ et $\omega \in I_2$ l'ensemble des réels de $[0, 1]$ qui ne sont pas de la forme $m/2^n$ avec $1 \leq m < 2^n, n = 1, 2$, etc. La mesure de probabilité est alors simplement la mesure de Lebesgue (encore notée $\mathbb{P}$) sur $(I_2, \mathscr{B}_2(I_2))$. Comme pour la suite $(\mu)_{n \geq 1}$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante c_ε et un ensemble $M_\varepsilon \in \mathscr{B}(I_3)$ tel que $\mathbb{L}(M_\varepsilon = 1)$ et pour tout $\omega \in M_\varepsilon$, on ait

$$|\lambda_1(\omega) + \lambda_2(\omega) + \cdots + \lambda_n(\omega)| \leq c_\varepsilon n^{1/2+\varepsilon}.$$

Étant donné que $\lambda_n(1) = \lambda(n)$ pour tout $n \geq 1$, Iosifescu [18, p. 446] remarque que la preuve de HR est ramenée à celle que le réel 1 est dans un sous-ensemble de $[0, 1]$ de mesure de Lebesgue 1.

Définissons un processus $(\mathscr{L}(x, \cdot))_{x \geq 0}$ sur $(I_2, \mathscr{B}_2(I_2), \mathbb{P})$ par

$$\mathscr{L}(x, \omega) = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n(\omega)}{n^2} e^{-x/n^2},$$

qui est une version aléatoire de la fonction L définie ci-dessus. De nouveau, il s'agit d'un processus analytiquement très simple puisque, pour tout $\omega \in I_2$, les trajectoires $x \mapsto \mathscr{L}(x,\omega)$ sont C^∞ sur $\mathbb{R}^+$.

On a alors pour $\mathscr{L}$ des résultats parfaitement analogues à ceux obtenus pour $\mathscr{R}$. On omet la démonstration qui est une simple adaptation de celle du théorème 3.

Théorème 4. (*i*) *Il existe une constante absolue $D > 0$ (explicitable) telle que l'on ait Lebesgue-presque sûrement*

$$|\mathscr{L}(x)| \le D x^{1/4} \sqrt{\log\log(x)}$$

lorsque $x \to +\infty$.

(*ii*) *Quand x tend vers $+\infty$, la fonction $x^{-1/4}\mathscr{L}(x)$ tend en loi vers une variable aléatoire normale de loi $\mathscr{N}\big(0, 4/(2\pi)^{1/4}\big)$, c'est-à-dire que pour tout réel t,*

$$\lim_{x\to+\infty} \mathbb{P}\Big(\frac{\mathscr{L}(x)}{x^{1/4}} > t\Big) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_t^\infty e^{-\frac{1}{2\sigma^2}u^2}\,\mathrm{d}u$$

avec $\sigma = 4/(2\pi)^{1/4}$.

Cette note a pour origine diverses discussions que j'ai eues avec Éric Saias et Zhan Shi en 2001, principalement sur la partie 5. Ceci m'a conduit à considérer les versions aléatoires de la fonction de Möbius présentées dans les premières parties. Michel Balazard m'a fait remarquer qu'il fallait probablement utiliser les théorèmes taubériens en plusieurs variables de de la Bretèche, et Driss Essouabri m'a expliqué comment vérifier les hypothèses, très générales et techniques, de ces théorèmes. La note est restée endormie jusqu'en janvier 2015 lorsqu'Éric Saias m'en a reparlé, ce qui m'a incité à la terminer. Je remercie très chaleureusement tous ces collègues pour l'intérêt qu'ils ont manifesté pour ce travail.

Références

[1] Luis Baez-Duarte, *Moebius-convolutions and the Riemann hypothesis*, Int. J. Math. Math. Sci. **22** (2005), 3599–3608.

[2] P. Biane, J. Pitman et M. Yor, *Probability laws related to the Jacobi theta and Riemann zeta functions, and Brownian excursions*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **38** (2001), no. 4, 435–465.

[3] P. Biane, *La fonction zêta de Riemann et les probabilités*, La fonction zêta, 165–193, Ed. Éc. Polytech., Palaiseau, 2003.

[4] R. de la Bretèche, *Estimation de sommes multiples de fonctions arithmétiques*, Compositio Math. **128** (2001), no. 3, 261–298.

[5] S. D. Chatterji, *Certain induced measures and the fractional dimensions of their "support"*, Z. Warhrsch. Verw. Gebiete **3** (1964), 184–192.

[6] R. F. Churchhouse et I. J. Good, *The Riemann hypothesis ans pseudorandom features of the Möbius sequence*, Math. Comp. **22** (1968), 857–861.

[7] A. Denjoy, *L'hypothèse de Riemann sur la distribution des zéros de $\zeta(s)$, reliée à la théorie des probabilités*, C. R. Acad. Paris **192** (1931), 656–658.

[8] A. Denjoy, *Probabilités confirmant l'hypothèse de Riemann sur les zéros de $\zeta(s)$*, C. R. Acad. Paris **259** (1964), 3143–3145.

[9] H. M. Edwards, *Riemann's zeta function*, Pure and Applied Mathematics, Vol. **58**, Academic Press, 1974.

[10] D. Foata et A. Fuchs, *Calcul des probabilités*, Éditions Dunod, 1996.

[11] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics, 1966.

[12] K. Ford, *Vinogradov's integral and bounds for the Riemann zeta function*, Proc. London Math. Soc. (3) **85** (2002), no. 3, 565–633.

[13] G. H. Hardy, *Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann*, C. R. Acad. Paris **158** (1915), 1012–1014.

[14] G. H. Hardy et J. E. Littlewood, *Contributions to the theory of the Riemann zeta- function and the theory of the distribution of primes*, Acta Math. **41** (1918), 119–196.

[15] G. H. Hardy et E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford Science Publications, Fith Edition, 1979.

[16] P. Hartman et A. Wintner, *On the law of the iterated logarithm*, Amer. J. Math. **63** (1941), 169–176.

[17] F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig, Veit & Co., 1914.

[18] M. Iosifescu, *On the random Riemann hypothesis*, Proceedings of the seventh conference on probability theory (Braşov, 1982), 435–450, VNU Sci. Press, Utrecht, 1985.

[19] T. Kotnik et J. van de Lune, *On the order of the Mertens Function*, Experiment. Math. **13** (2004), no.4, 473–481.

[20] N. Ng, *The distribution of the summatory function of the Mbius function*, Proc. London Math. Soc. (3) **89** (2004), no. 2, 361–389.

[21] *Recent perspectives in random matrix theory and number theory*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **322**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2005.

[22] M. Riesz, *Sur l'hypothèse de Riemann*, Acta Math. **40** (1916), 185–190.

[23] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, Cours spécialisé **1**, Collection SMF, 1995.

[24] E. C. Titchmarsh, *A consequence of the Riemann Hypothesis*, J. Lond. Math. Soc **2** (1927), 247–254

[25] B. Saffari, *Sur la fausseté de la conjecture de Mertens*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **271** (1970), A1097–A1101.

[26] A. Wintner, *Random factorizations and Riemann's hypothesis*, Duke Math. J. **11** (1944), 267–275.

Institut Fourier, CNRS UMR 5582 / Université Grenoble 1, 100 rue des Maths, BP 74, 38402 Saint-Martin d'Hères cedex, France

E-mail address: `tanguy.rivoal@ujf-grenoble.fr`