

Somme et produit de deux nombres transcendants

Tanguy Rivoal

29 juin 2021

Dans le préluce de son livre *Nombres Remarquables* [4, p. 17], François Le Lionnais écrit “Ainsi $\pi + e$ et $\pi \times e$, qui posent un problème non résolu : on sait que l’une au moins de ces deux combinaisons est transcendante mais on ignore laquelle et on ne sait pas ce qu’il faut penser de l’autre”. Cette phrase peut sembler mystérieuse mais elle l’est moins une fois que l’on a vu qu’elle n’est pas du tout spécifique aux deux nombres transcendants e et π . En effet, étant donnés α et β deux nombres complexes dont au moins un est transcendant, on a toujours que l’un au moins des nombres $\alpha + \beta$ et $\alpha\beta$ est transcendant. Supposons au contraire que $\xi_1 := \alpha + \beta$ et $\xi_2 := \alpha\beta$ soient tous les deux algébriques. Alors $\alpha^2 - \xi_1\alpha + \xi_2 = \beta^2 - \xi_1\beta + \xi_2 = 0$, ce qui implique que α et β sont algébriques, contrairement à l’hypothèse.

Près de 40 ans après la publication de ce livre, on ignore malheureusement toujours la nature arithmétique des deux combinaisons $\pi + e$ et $\pi \times e$, bien que l’on croie fortement qu’il s’agit de nombres transcendants. Est-il possible d’aller un peu plus loin et de quantifier cette indécision ? Une manière standard de le faire en approximation diophantienne est de donner une minoration de la quantité, qui est strictement positive lorsque α ou β est transcendant,

$$\mathcal{M} := |\alpha + \beta - \eta_1| + |\alpha\beta - \eta_2|$$

en terme de degrés et hauteurs des nombres algébriques η_1 et η_2 . Michel Waldschmidt m’a fait remarquer que l’on peut très aisément le faire au moyen d’une mesure de non-quadraticité de α sur le corps $\mathbb{Q}(\eta_1, \eta_2)$ (en supposant α transcendant par exemple). Sa remarque est basée sur le simple fait suivant : étant donnés α et β deux nombres complexes, pour tout couple de nombres complexes (η_1, η_2) , on a

$$|\alpha + \beta - \eta_1| + |\alpha\beta - \eta_2| \geq \frac{1}{\widehat{\alpha}} |\alpha^2 - \eta_1\alpha + \eta_2|, \quad (0.1)$$

où l’on a posé $\widehat{\alpha} := \max(1, |\alpha|)$. En effet, en posant $\psi_1 := \alpha + \beta - \eta_1$ et $\psi_2 := \alpha\beta - \eta_2$, on a

$$|\alpha^2 - \eta_1\alpha + \eta_2| = |\alpha\psi_1 - \psi_2| \leq \widehat{\alpha} \cdot (|\psi_1| + |\psi_2|).$$

En particulier, si α est transcendant et η_1 et η_2 sont algébriques, Eq. (0.1) fournit une minoration de \mathcal{M} à partir d’une minoration de $|\alpha^2 - \eta_1\alpha + \eta_2|$ (qui est non-nul) en terme des degrés et hauteurs de η_1 et η_2 . Une telle minoration découle par définition d’une mesure de

non-quadraticité de α sur $\mathbb{Q}(\eta_1, \eta_2)$. Notons au passage que pour minorer non trivialement \mathcal{M} , il suffit par exemple que α ne soit pas dans le corps $\mathbb{Q}(\eta_1, \eta_2)$, ni quadratique sur ce corps.

On peut ainsi seulement supposer que α n'est pas un nombre quadratique sur \mathbb{Q} lorsque $\eta_1 = \frac{a}{b}$ et $\eta_2 = \frac{c}{d}$ sont des nombres rationnels, avec $bd \neq 0$. On a alors

$$|\alpha^2 - \eta_1\alpha + \eta_2| = \frac{|bd\alpha^2 - ad\alpha + bc|}{|bd|}$$

et il s'agit donc d'obtenir une mesure de non-quadraticité de α sur \mathbb{Q} . Prendre $\alpha = e$ est intéressant car ce nombre a une très bonne mesure de non-quadraticité sur \mathbb{Q} . En effet, il existe deux constantes $\delta > 0, \lambda > 0$ telles que pour tous entiers $p, q, r \in \mathbb{Z}$ tels que $|p| + |q| + |r| \geq 1$, on ait (voir [3])

$$|pe^2 + qe + r| \geq \frac{\lambda}{H^{2+\delta/\log \log(H+2)}}, \quad H := \max(|p|, |q|, |r|). \quad (0.2)$$

(On ne peut pas remplacer l'exposant 2 par un réel plus petit.) On en déduit la

Proposition 1. *Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tous entiers $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ tels que $bd \neq 0$, on a*

$$\left|e + x - \frac{a}{b}\right| + \left|ex - \frac{c}{d}\right| \geq \frac{\lambda}{e} \cdot \frac{1}{|bd|H^{2+\delta/\log \log(H+1)}}, \quad H := \max(|bd|, |ad|, |bc|).$$

Le membre de droite de cette mesure ne dépend pas de x ; cela quantifie le fait que soit $e + x$ soit ex est un nombre irrationnel, voire les deux. On en déduit l'existence de deux constantes $\kappa_x > 0$ et $\delta_x > 0$ telles que, dans les mêmes conditions, on ait

$$\left|e + x - \frac{a}{b}\right| + \left|ex - \frac{c}{d}\right| \geq \frac{\kappa_x}{|bd|^{3+\delta_x/\log \log(|bd|+1)}}. \quad (0.3)$$

On peut à loisir changer e en un autre nombre, par exemple π . L'analogie de (0.2) est alors beaucoup plus faible. Par [6], on sait ainsi qu'il existe deux constantes $\omega > 0$ et $\mu \geq 7.1033$ telles que pour tous entiers $p, q, r \in \mathbb{Z}$ tels que $|p| + |q| + |r| \geq 1$, on ait

$$|p\pi^2 + q\pi + r| \geq \frac{\omega}{\max(|p|, |q|, |r|)^\mu}.$$

(Le minorant 7.1033 de μ n'est conjecturalement pas optimal puisque que l'on pense que l'on peut le remplacer par n'importe quel nombre fixé aussi proche de 2 que voulu, quitte à augmenter la valeur de ω .) Il en découle comme ci-dessus que pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe une constante $\nu_y > 0$ telle que pour tous entiers $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ tels que $bd \neq 0$, on ait

$$\left|\pi + y - \frac{a}{b}\right| + \left|\pi y - \frac{c}{d}\right| \geq \frac{\nu_y}{|bd|^{\mu+1}}. \quad (0.4)$$

En comparant les mesures que l'on obtient avec $x = \pi$ dans (0.3) et avec $y = e$ dans (0.4) respectivement, on voit donc que la mesure

$$\left|e + \pi - \frac{a}{b}\right| + \left|e\pi - \frac{c}{d}\right| \geq \frac{\kappa_\pi}{|bd|^{3+\delta_\pi/\log \log(|bd|+1)}}.$$

est la meilleure que l'on puisse obtenir par cette méthode élémentaire. À défaut de savoir démontrer que $e + \pi$ et $e\pi$ sont tous les deux irrationnels, il serait intéressant d'améliorer au moins l'exposant 3 en exploitant vraiment une propriété spécifique commune à e et π , et non pas seulement prendre $x = \pi$ dans (0.3).

Pour finir, mentionnons qu'il existe d'autres combinaisons liées aux nombres e et π dont on sait dire quelque chose de la nature arithmétique. Par exemple on sait que e^π est transcendant [2], que e^π et π sont algébriquement indépendants sur \mathbb{Q} [5], et qu'au moins un des nombres e^e ou e^{e^2} est transcendant [1, 7]; les démonstrations de ces deux résultats sont particulièrement peu évidentes. En revanche, on ne sait rien de la nature arithmétique de π^e et π^π .

Références

- [1] D. W. Brownawell, *The algebraic independence of certain numbers related by the exponential function*, J. Number Theory **6.1** (1974), 22–31.
- [2] A. O. Gel'fond, *Sur les nombres transcendants*, C. R. Acad. Sci. Paris **189** (1929), 1224–1226.
- [3] M. Hata, *Remarks on Mahler's transcendence measure for e* , J. Number Theory **54.1** (1995), 81–92.
- [4] F. Le Lionnais, *Nombres remarquables*, Actualités scientifiques et industrielles 1407, Hermann, 1983.
- [5] Yu. V. Nesterenko, *Modular functions and transcendence questions*, Sb. Math. **187.9** (1996), 1319–1348; traduction en anglais de Mat. Sb. **187.9** (1996), 65–96 en russe.
- [6] D. Zeilberger, W. Zudilin, *The irrationality measure of π is at most 7.103205334137...*, Mosc. J. Comb. Number Theory **9.4**, 407–419 (2020).
- [7] M. Waldschmidt, *Solution du huitième problème de Schneider*, J. Number Theory **5** (1973), 191–202.

T. Rivoal, Institut Fourier, CNRS et Université Grenoble Alpes, CS 40700, 38058 Grenoble cedex 9, France