

# Intégrales de Schwarz-Christoffel et Fonctions de Mahler

T. Rivoal

16 septembre 2017

Le livre de Driscoll et Trefethen [4] est consacré à la formule intégrale de Schwarz-Christoffel qui donne une expression explicite des applications conformes (i.e, biholomorphes) du disque unité ou du demi-plan supérieur de  $\mathbb{C}$  sur un polygone simple quelconque. Driscoll et Trefethen mentionnent [4, §4.5, p. 55] que cette formule devrait en principe permettre de représenter des courbes fractales par passage à la limite, mais ils ajoutent que peu voire rien n'a été fait à ce sujet. On peut ainsi se poser la question suivante : connaît-on *explicitement* une fonction  $F$  holomorphe sur le disque  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ , continue sur le cercle  $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ , et qui applique conformément le disque  $D$  sur l'intérieur du flocon de von Koch ?

La frontière, notée  $\mathcal{K}$ , du flocon de von Koch est probablement l'exemple le plus connu de courbe fractale du plan ; elle est représentée à la figure (1), engendrée grâce au programme Maple de [6]. On construit cette courbe de la façon classique suivante. Partant d'un triangle équilatéral  $Q_1$ , on coupe chaque côté en trois segments égaux et on remplace le segment central par un triangle équilatéral à l'extérieur de  $Q_1$ , puis l'on répète ce même procédé sur les côtés de  $Q_2$ , ce qui génère  $Q_3$ , etc, on construit ainsi une suite de polygones  $Q_n$  qui "converge" vers  $\mathcal{K}$ . On connaît depuis longtemps une fonction qui applique conformément  $D$  sur l'intérieur d'un triangle équilatéral :  $\int_0^z (1-x^3)^{-2/3} dx$ . Obtenir une représentation conforme de  $D$  sur l'intérieur de  $\mathcal{K}$  est toujours un problème ouvert, qui a été abordée, pour la première fois semble-t'il, dans l'article de Carrasco, Preiss, Riera [9] consacré à la représentation conforme des polygones ayant une infinité de sommets. Ils obtiennent une représentation conforme de  $D$  sur l'intérieur de  $Q_2$  mais ce n'est plus le cas pour les autres  $Q_n$  pour  $n \geq 3$  ; leur formule intégrale limite ne répond malheureusement pas à la question pour  $\mathcal{K}$ .

Dans ce document informel, je présente les objets mathématiques utilisés dans [9], puis j'évoque quelques généralisations qui soulèvent des questions mathématiques intéressantes et produisent de jolies représentations graphiques, dont le remarquable "pentagone" à la figure (16).

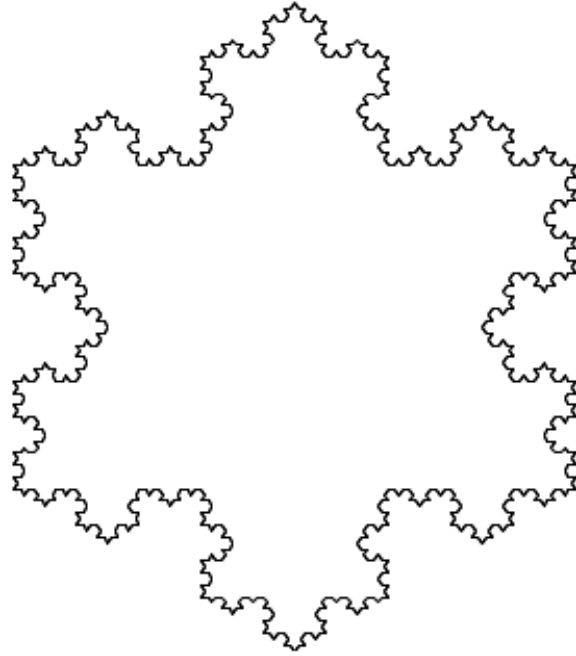


FIGURE 1 – La courbe de von Koch  $\mathcal{K}$ , après 4 itérations

## 1 La formule de Schwarz-Christoffel

Par le théorème de représentation conforme de Riemann, il existe une application conforme (essentiellement unique) du disque unité  $D$  sur l'intérieur d'un  $n$ -gone  $P$  simple dont on se donne les sommets  $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{C}$  et les angles intérieurs  $\alpha_1\pi, \dots, \alpha_n\pi$ , où chaque  $\alpha_j \in ]0, 2[$ . La remarquable formule de Schwarz-Christoffel donne une telle application conforme.

**Théorème 1** (Formule de Schwarz-Christoffel). *Dans les conditions précédentes, toute application conforme de  $D$  vers l'intérieur de  $P$  est de la forme*

$$f(z) = A + B \int^z \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x}{x_k}\right)^{\alpha_k - 1} dx, \quad (1.1)$$

où  $A$  et  $B$  sont des constantes complexes, et où  $w_k = f(x_k)$  et  $|x_k| = 1$  pour tout  $k$ .

Pour chaque  $k$ , la branche du logarithme  $\log(1 - \frac{x}{x_k})$  est arbitraire, le passage de l'une à l'autre affectant seulement la valeur de  $B$ . Cette formule est semi-explicite puisqu'il n'existe aucune recette facile pour calculer les  $x_k$ ; divers algorithmes sont présentés dans [4] pour y parvenir de façon aussi précise que voulue. Les méthodes de [4] permettraient en particulier de donner une fonction explicite de la forme (1.1) dont l'image de  $C$  serait une approximation polygonale de la courbe  $\mathcal{K}$  de von Koch, similaire à la figure (1).

On peut procéder à l'inverse. On se donne  $k$  points distincts  $x_1, \dots, x_k$  du cercle unité, que l'on suppose placé dans cet ordre sur le cercle. On se donne également des réels

$\alpha_1, \dots, \alpha_k$  dans  $]0, 2[$ . Alors une fonction de la forme

$$F(z) = \int^z \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x}{x_k}\right)^{\alpha_k - 1} dx,$$

a les propriétés suivantes. En notant  $w_k = F(x_k)$ , l'image de l'arc de cercle  $\widehat{x_j, x_{j+1}}$  (avec par convention  $x_{n+1} := x_1$ ) est le segment  $[w_k, w_{k+1}]$  (avec par convention  $w_{n+1} := w_1$ ), et l'angle intérieur entre les segments  $[w_{k-1}, w_k]$  et  $[w_k, w_{k+1}]$  est  $\alpha_j \pi$ . Les segments  $[w_k, w_{k+1}]$ ,  $k = 1, \dots, n$  forment donc une ligne polygonale, qui se referme si et seulement si  $\sum_{k=1}^n \alpha_k = n - 2$  auquel cas elle forme un polygone.

Cette approche conduit à des intégrales assez simples si les  $x_k$  et  $\alpha_k$  le sont mais elle a plusieurs défauts. Premièrement, on ne contrôle pas *a priori* les longueurs des segments  $[w_k, w_{k+1}]$ , seulement les angles qu'ils forment. Deuxièmement, cette ligne polygonale peut s'auto-intersecter ailleurs qu'en ses deux extrémités, et donc ne pas former un polygone simple (ou de Jordan). Enfin, bien que  $F$  soit localement univalente sur  $D$  (car  $F'$  ne s'annule clairement pas sur  $D$ ),  $F$  n'est pas forcément univalente sur  $D$ . Néanmoins, si  $\sum_{k=1}^n \alpha_k = n - 2$  et si le polygone  $P$  obtenu est simple, alors  $F$  applique conformément  $D$  sur l'intérieur de  $P$ ; de plus  $F$  s'étend alors continûment à  $\overline{D}$  en produisant un homéomorphisme de  $C$  sur  $P$  (conséquence d'un théorème de Carathéodory).

## 2 Le flocon de Carrasco, Preiss, Riera

Les auteurs de [9] ne cherchent pas produire une très bonne approximation de la courbe  $\mathcal{K}$  de von Koch, et ils adoptent la deuxième approche décrite ci-dessus. Ils indiquent que pour tout entier  $k \geq 0$ , la fonction

$$\mathcal{F}_k(z) = \int_0^z \frac{[\prod_{n=0}^{k-1} (1 + x^{6 \cdot 4^n})]^{1/3}}{[(x^3 - 1) \prod_{n=0}^{k-1} (1 + x^{3 \cdot 4^n})]^{2/3}} = \int_0^z \prod_{n=0}^{k-1} (1 + x^{6 \cdot 4^n}) \frac{dx}{(1 - x^{3 \cdot 4^k})^{2/3}}.$$

envoie  $D$  sur l'intérieur d'un polygone  $P_k$  à  $3 \cdot 4^k$  côtés qui ressemble visuellement au  $k$ -ième polygone  $Q_k$  (usuel) tendant vers la courbe  $\mathcal{K}$ . On construit les segments de  $P_k$  et  $Q_k$  de la même façon : on coupe chaque côté de  $P_{k-1}$ , resp.  $Q_{k-1}$ , en 3 segments et l'on remplace le segment "central" par un triangle équilatéral extérieur à  $P_{k-1}$ , resp.  $Q_{k-1}$ . Les angles aux sommets de  $P_k$  et  $Q_k$  sont donc les mêmes, mais l'emplacement et la longueur des côtés des triangles équilatéraux ne le sont pas. Ils montrent que les polygones  $P_1$  et  $P_2$  n'ont pas d'auto-intersection et indiquent sans démonstration que c'est vrai également pour tous les  $P_k$ . Ils en concluent que la fonction

$$\mathcal{F}(z) = \int_0^z \prod_{n=0}^{\infty} (1 + x^{6 \cdot 4^n}) dx. \quad (2.1)$$

applique conformément le disque unité sur un domaine borné bordé par une courbe de Jordan  $\mathcal{F}(C)$  imitant  $\mathcal{K}$ . Il serait intéressant d'avoir une preuve complète de ces faits.

On peut montrer que les deux courbes sont bien distinctes, confirmant ce que l'on voit sur les figures (1) et (5). Ceci est dû à l'absence de contrôle des longueurs des côtés des polygones  $P_k$ .

Des approximations des polygones  $P_k$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ , sont données par les figures (2) à (5); ces figures ont été obtenues avec Maple en utilisant le développement de Taylor de  $\prod_{n=0}^{k-1} (1 + x^{6 \cdot 4^n}) (1 - x^{3 \cdot 4^k})^{-2/3}$  à l'ordre 1000. Pour cette raison, les courbes obtenues ne sont pas des polygones.

### 3 Fonctions de Mahler

L'intégrande  $\prod_{n=0}^{\infty} (1 + x^{6 \cdot 4^n})$  dans (2.1) est un exemple de *fonction de Mahler*. Il s'agit d'une classe des fonctions holomorphes à l'origine satisfaisant certaines équations fonctionnelles liées à la transformation  $z \mapsto z^k$ ,  $k \geq 2$  entier fixé. Elles ont été étudiées de façon général par Mahler en 1929 dans le but de prouver la transcendance de leurs valeurs en des points algébriques; voir [7]. Parmi ces fonctions, on distingue la classe des  $M$ -fonctions c'est-à-dire les séries  $F(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[[z]]$  vérifiant une équation linéaire de la forme

$$\sum_{j=0}^d P_j(z) F(z^{k^j}) = 0$$

où  $P_j(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$  et  $d \geq 1$ ,  $k \geq 2$  sont des entiers.

La série  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$  est un exemple simple de  $M$ -fonction puisqu'elle vérifie l'équation  $f(z^4) - (1+z)f(z^2) - zf(z) = 0$ . C'est un cas particulier des  $M$ -fonctions  $\sum_{n=0}^{\infty} u^n x^{v^n-1}$ , où  $v \geq 2$  et  $u$  sont des entiers, que l'on rencontrera plus loin..

Pour tous entiers  $a \geq 1, b \geq 2$ , les fonctions  $g_{a,b}(z) = \prod_{n=0}^{\infty} (1 + z^{a \cdot b^n})$  sont aussi des  $M$ -fonctions puisqu'elles vérifient  $g_{a,b}(z) = (1 + z^a)g_{a,b}(z^b)$ . On a

$$g_{a,b}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} S_b(n) z^{an} = \sum_{m=0}^{\infty} z^{a\sigma_b(m)}$$

où  $S_b(n) = 1$  si  $n$  est somme de puissances distinctes de  $b$ , et 0 sinon. Cela définit la suite d'entiers  $\sigma_b(m)$  strictement croissante. (Si  $b = 2$ ,  $S_b(n) = 1$  pour tout  $n \geq 0$ , de sorte que  $g_{a,2}(z) = \frac{1}{1-z^a}$ ; on ne s'intéresse plus à ce cas dans la suite.) Si  $b \geq 3$ , pour tout  $k \geq 0$ , on a (par exemple)

$$\sigma_b(2^k + 1) = b^{k+1}, \quad \sigma_b(2^k) = \frac{b^{k+1} - 1}{b - 1}.$$

et  $g_{a,b}(z)$  est une fonction transcendante. De plus, la fonction

$$\mathcal{G}_{a,b}(z) := \int_0^z g_{a,b}(x) dx = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{a\sigma_b(m)+1}}{a\sigma_b(m) + 1}$$

est continue sur le cercle unité. En effet, on a

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\sigma_b(m)} = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{m=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{1}{\sigma_b(m)} \right) \leq (b-1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{b^{k+1}-1} < +\infty.$$

Il suit que la courbe  $\mathcal{G}_{a,b}(C)$  est contenue dans le disque de centre 0 et de rayon  $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{a\sigma_b(m)+1}$ . Notons que  $\mathcal{G}_{6,4}(z)$  est la fonction  $\mathcal{F}(z)$  de Carrasco, Preiss, Riera.

Chaque courbe  $\mathcal{G}_{a,b}(C)$  est invariante par rotation de centre 0 et d'angle  $2k\pi/a$ ,  $k \in \{0, \dots, a-1\}$ . Elle présente également une certaine auto-similarité puisque, pour tout  $z \in \overline{D}$ , on a

$$\left| \mathcal{G}_{a,b}(z) - \frac{z^{b-1} + z^{a-1}}{b} \mathcal{G}_{a,b}(z^b) \right| \leq \frac{b-1 + |b-a-1|}{a^2(b^2-2)}. \quad (3.1)$$

En effet, en effectuant un changement de variable et une intégration par partie, on voit que

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{a,b}(z) &= \int_0^z (1+x^a)g_{a,b}(x^b)dx = \frac{1}{b} \int_0^{z^b} (1+x^{a/b})x^{1/b-1}g_{a,b}(x)dx \\ &= \frac{z^{b-1} + z^{a-1}}{b} \mathcal{G}_{a,b}(z^b) + \mathcal{H}_{a,b}(z) \end{aligned}$$

où

$$\mathcal{H}_{a,b}(z) := \frac{1}{b} \int_0^z \frac{(b-1) + (b-a-1)x^a}{x^b} \mathcal{G}_{a,b}(x^b)dx.$$

Comme

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{a,b}(z) &= \frac{b-1}{b} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{ab\sigma_b(m)+1}}{(a\sigma_b(m)+1)(ab\sigma_b(m)+1)} \\ &\quad + \frac{b-a-1}{b} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{ab\sigma_b(m)+a+1}}{(a\sigma_b(m)+1)(ab\sigma_b(m)+a+1)}, \end{aligned}$$

la fonction  $t \mapsto \mathcal{H}_{a,b}(e^{2i\pi t})$  est une fonction  $C^1$  donc plus régulière que  $t \mapsto \mathcal{G}_{a,b}(e^{2i\pi t})$ . On déduit rapidement (3.1).

## 4 Quand les fonctions $\mathcal{G}_{a,b}(z)$ sont-elles univalentes ?

Il est bien sûr très intéressant de savoir quand  $\mathcal{G}_{a,b}(z)$  est univalente sur  $D$  (i.e, conforme sur l'intérieur de  $\mathcal{G}_{a,b}(C)$ ).

Notons qu'une condition nécessaire pour cela est que  $\mathcal{G}'_{a,b}(z)$  vérifie le *théorème de distorsion* de Koebe [8, p.10, Theorem 1.3] : si  $f(z)$  est univalente sur  $D$ , alors

$$|f'(z)| \leq |f'(0)| \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}, \quad z \in D. \quad (4.1)$$

Or la Proposition 2.1 de [3] montre que

$$|\mathcal{G}'_{a,b}(z)| \ll \frac{1}{(1-|z|)^{\frac{\log(2)}{\log(b)}}}, \quad z \in D$$

Comme  $\log(2)/\log(b) < 1$ ,  $\mathcal{G}_{a,b}(z)$  vérifie donc (probablement) (4.1). Notons aussi que puisque  $\mathcal{G}_{a,b}(z)$  est continue sur  $\overline{D}$ , si on peut montrer que  $\mathcal{G}_{a,b}(C)$  est une courbe de Jordan alors  $\mathcal{G}_{a,b}(z)$  sera univalente sur  $\overline{D}$  (voir [8, p. 16]).

Lorsque qu'une fonction holomorphe  $f(z)$  est localement univalente sur  $D$  (i.e. lorsque  $f'(z) \neq 0$  pour tout  $z \in D$ ), une condition suffisante pour que  $f$  soit univalente sur  $D$  est que l'inégalité

$$\left| z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right| \leq \frac{1}{1-|z|^2}$$

soit vraie pour tout  $z \in D$ . C'est le *critère d'univalence de Becker* [8, p. 16, Theorem 1.1]), où la constante 1 au numérateur est optimale. On peut tester ce critère avec  $f(z) = \mathcal{G}_{a,b}(z)$  qui est localement univalente, puisque sa dérivée  $\prod_{n=0}^{\infty} (1+z^{a \cdot b^n})$  ne s'annule pas sur  $D$ . Il s'agit alors de savoir si l'inégalité

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{ab^n z^{a \cdot b^n}}{1+z^{a \cdot b^n}} \right| \stackrel{?}{\leq} \frac{1}{1-|z|^2} \quad (4.2)$$

est vraie pour tout  $z \in D$ .

On peut facilement montrer que pour tout  $a \geq 1$  et tout  $b \geq 27$ , (4.2) n'a pas lieu pour  $z$  proche de  $e^{i\pi/a}$  et donc que le critère ne s'applique pas. En effet, en notant  $x = |z|$ , on a pour tout  $z \in D$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ab^n z^{a \cdot b^n}}{1+z^{a \cdot b^n}} \right| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ab^n x^{a \cdot b^n}}{1-x^{a \cdot b^n}} \leq \int_0^{\infty} \frac{ab^t x^{a \cdot b^t}}{1-x^{a \cdot b^t}} dt \\ &= \frac{1}{\log(b) \log(1/x)} \int_{a \log(1/x)}^{\infty} \frac{u}{e^u - 1} du \quad (\text{avec } u = a \log(1/x) b^t) \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\leq \frac{\pi^2}{6 \log(b) \log(1/|z|)}. \quad (4.4)$$

Donc

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{ab^n z^{a \cdot b^n}}{1+z^{a \cdot b^n}} \right| &\geq \left| \frac{a|z|}{|1+z^a|} - \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{ab^n z^{a \cdot b^n}}{1+z^{a \cdot b^n}} \right| \right| \\ &\geq \left| \frac{a|z|}{|1+z^a|} - \frac{\pi^2}{6 \log(b) \log(1/|z|)} \right|. \end{aligned}$$

D'où

$$\liminf_{z \rightarrow e^{i\pi/a}} (1-|z|^2) \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{ab^n z^{a \cdot b^n}}{1+z^{a \cdot b^n}} \right| \geq \left| 2 - \frac{\pi^2}{3 \log(b)} \right| > 1$$

dès que  $b > e^{\pi^2/3} \approx 26,8$ . Par ailleurs, l'inégalité inverse

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{ab^n z^{a \cdot b^n}}{1 + z^{a \cdot b^n}} \right| \leq \frac{a|z|}{|1 + z^a|} + \frac{\pi^2}{6 \log(b) \log(1/|z|)}$$

n'est pas assez fine pour que l'on puisse en déduire que (4.2) est vraie lorsque  $3 \leq b \leq 26$ .

Néanmoins les calculs précédents présentent un intérêt. En effet le critère de Becker montre que la fonction

$$\mathcal{G}_{ab,b}(z) = \int_0^z \prod_{n=1}^{\infty} (1 + x^{a \cdot b^n}) dx$$

est univalente sur  $D$  au moins lorsque  $b \geq 27$ ,  $a \geq 1$ . Il s'agit en effet juste de vérifier que pour tout  $z \in D$

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ab^n z^{a \cdot b^n}}{1 + z^{a \cdot b^n}} \right| \leq \frac{1}{1 - |z|^2},$$

ce qui découle de (4.4).

Beaucoup de ce qui précède peut également être dit de la fonction

$$\mathcal{M}_{a,b}(z) := \int_0^z \prod_{n=0}^{\infty} (1 - x^{a \cdot b^n}) dx$$

puisque

$$|\mathcal{M}'_{ab,b}(|z|)| \leq \frac{\pi^2}{6 \log(b) \log(1/|z|)}.$$

La fonction  $\mathcal{M}_{a,b}(z)$  est donc univalente sur  $D$  au moins pour  $b \geq 27$ ,  $a \geq 1$ , et la courbe  $\mathcal{M}_{a,b}(C)$  est contenue dans le disque de centre 0 et de rayon  $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{a\sigma_b(m)+1}$ .

## 5 Primitives de $M$ -fonctions

Il est intéressant de comparer les images respectives de  $C$  par les fonctions  $\mathcal{G}_{a,b}(z)$  et  $\mathcal{M}_{a,b}(z)$  avec celles des  $M$ -fonctions

$$\mathcal{J}_{u,v}(z) = \int_0^z \left( \sum_{n=0}^{\infty} u^n x^{v^n-1} \right) dx$$

où  $1 \leq u < v$  sont des entiers, dont l'intégrande est aussi une  $M$ -fonction. Comme on l'a vu avec la fonction  $\mathcal{G}_{6,4}(z)$  de Carrasco, Preiss, Riera, la famille  $\mathcal{G}_{a,b}(z)$  a un lien avec la représentation conforme des polygones, mais un tel lien semble lointain, voire inexistant, pour la famille  $\mathcal{J}_{u,v}(z)$ . Néanmoins, la famille  $\mathcal{J}_{u,v}(z)$  nous sert à illustrer la difficulté de conjecturer les propriétés géométriques de courbes issues des  $M$ -fonctions, puisque des effets de seuil peuvent se produire. Notons que

$$\mathcal{J}_{u,v}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{u}{v} \right)^n z^{v^n}$$

est toujours une  $M$ -fonction (contrairement à  $\mathcal{G}_{a,b}(z)$ ) et que  $\mathcal{J}_{u,v}(C)$  est une courbe continue puisque  $u < v$ .

Les figures (6) à (9) représentent  $\mathcal{J}_{u,6}(z)$  pour  $u = 1, 2, 3, 4$ , en prenant des séries tronquées à  $n = 20$ . Elles illustrent le fait bien connu suivant [5] : les courbes  $\mathcal{J}_{u,v}(C)$  sont des courbes de Peano lorsque  $u/v < 1$  est suffisamment proche de 1, c'est-à-dire qu'elles remplissent un ouvert non vide de  $\mathbb{C}$ , qui dépend de  $u$  et  $v$ ; en particulier elles ne sont pas simples. (Voir aussi le survol [1].) Bariński [2] a montré que la dimension de Minkowski du graphe  $(\text{Re}(\mathcal{J}_{u,v}(C)), \text{Im}(\mathcal{J}_{u,v}(C))) \subset \mathbb{R}^3$  est  $3 + 2 \frac{\ln(u/v)}{\ln(v)}$ , ce qui implique que la dimension de Minkowski de  $\mathcal{J}_{u,v}(C) \subset \mathbb{R}^2$  est  $\leq 3 + 2 \frac{\ln(u/v)}{\ln(v)}$ . Le fait que  $\mathcal{J}_{u,v}(z)$  soit lacunaire joue un rôle important pour ces résultats. Rappelons qu'étant donné des  $a_n \neq 0$ , et  $b_n$  une suite d'entiers strictement croissante, la série entière  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{b_n}$  est dite lacunaire si  $\liminf_n \frac{b_{n+1}}{b_n} > 1$ .

Les développements de Taylor des  $\mathcal{G}_{a,b}(z)$  ne sont pas lacunaires car  $\liminf_n \frac{\sigma_b(n+1)}{\sigma_b(n)} = 1$  et les résultats précédents ne s'appliquent pas. Les figures (10) à (17) représentent  $\mathcal{G}_{a,b}(C)$  pour  $b = 3, 4$ ,  $a \in \{3, 4, 5, 6\}$  et sont obtenues en tronquant les produits à  $n = 5$ , voire 6 selon les cas. En particulier  $\mathcal{F}_4(C)$  et la troncation de  $\mathcal{G}_{4,6}(C)$  sont des approximations (légèrement différentes) du flocon  $\mathcal{F}(C)$  de Carrasco, Preiss et Riera. On peut poser les questions suivantes lorsque  $b \geq 3$  :

- (1) Pour quelles valeurs de  $a$  et  $b$  la fonction  $\mathcal{G}_{a,b}(z)$  est-elle univalente sur  $D$  ?
- (2) Existe-t'il des valeurs de  $a$  et  $b$  telles que la courbe  $\mathcal{G}_{a,b}(C)$  soit de Jordan ? de Peano ?
- (3) Que valent les diverses dimensions de ces courbes, par exemple les dimensions de Minkowski et de Hausdorff ?
- (4) Sagan [10] a montré que les fonctions coordonnées de  $\mathcal{K}$  (paramétrées par  $C$ ) ne sont nulle part dérivables. Qu'en est-il des fonctions coordonnées de  $t \mapsto \mathcal{G}_{a,b}(e^{2i\pi t})$ .
- (5) Quelle est la nature diophantienne des nombres  $\mathcal{G}_{a,b}(\alpha)$  lorsque  $\alpha$  est un nombre algébrique tel que  $0 < |\alpha| \leq 1$  ?

On peut poser des questions analogues pour les courbes  $\mathcal{M}_{a,b}(C)$ , dont on donne quelques représentations graphiques (figures (18) à (21)).

Plus généralement que (5), on peut aussi poser le problème de déterminer la nature arithmétique des valeurs aux points algébriques de la primitive nulle à l'origine d'une  $M$ -fonction transcendante. Une identité, due à Catalan et Vacca [11], montre que la constante d'Euler  $\gamma$  est une telle valeur :

$$\gamma = \int_0^1 \frac{\sum_{n=1}^{\infty} z^{2^n}}{z(1+z)} dz$$

## 6 Représentations graphiques

Hormis la figure (1), toutes les représentations graphiques ont été obtenues à l'aide de Maple de la manière suivante, dénuée de sophistication : on calcule le développement de Taylor d'une  $M$ -fonction à un grand ordre (environ 1000) de sorte qu'après intégration



on représente graphiquement un polynôme trigonométrique. Maple permet également de zoomer, par exemple là où elles semblent s’auto-intersecter. Il peut être difficile de tirer des conclusions à ce sujet car le graphe est parfois assez grossier. Par exemple, la figure (10) n’est visiblement pas invariante par rotation d’angle  $2\pi/3$ , comme elle devrait l’être puisque  $\mathcal{G}_{3,3}(z)$  est une fonction holomorphe de  $z^3$ .

## Bibliographie

- [1] K. Barański, *Dimension of the graphs of the Weierstrass-type functions*, Fractal Geometry and Stochastics V, 77-91, Progr. Probab. **70**, Birkhäuser Verlag, Basel, 2015.
- [2] K. Barański, *On the complexification of the Weierstrass non-differentiable function*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **27.2** (2002), 325–339.
- [3] S. Checcoli, J. Roques, *On some arithmetic properties of Mahler functions*, prépublication, 23 pages, 2017.
- [4] T. A. Driscoll, L. N. Trefethen, *Schwarz-Christoffel Mapping*, Cambridge University Press, 2002.
- [5] J-P. Kahane, M. Weiss, G. Weiss, *On lacunary power series*, Arkiv Math. **5** (1963), 1–26.
- [6] M. Ciavarella, M. Marchisio, *Some Fractals with Maple*, programme disponible à <http://www.maplesoft.com/applications/view.aspx?SID=97624&view=html>
- [7] K. Nishioka, *Mahler Functions and Transcendence*, Lecture Notes in Mathematics, Springer, 2016.
- [8] C. Pommerenke, *Boundary Behaviour of Conformal Maps*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **299**, Springer-Verlag, 1991.
- [9] R. Riera, H. Carrasco, R. Preiss, *The Schwarz-Christoffel Conformal Mapping for “Polygons” with Infinitely Many Sides*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, Vol. **2008** (2008), 20 pages.
- [10] H. Sagan, *Nowhere differentiability of the coordinate functions of the von Koch curve* Int. J. Math. Educ. Sci. Technol. **27.1** (1996), 146–148.
- [11] G. Vacca, *A new series for the Eulerian constant  $0.577\dots$* , Quart. J. Pure Appl. Math. **41** (1909–10), 363–364.

T. Rivoal, Institut Fourier, CNRS et Université Grenoble Alpes, CS 40700, 38058 Grenoble cedex 9, France. [tanguy.rivoal\(A\)univ-grenoble-alpes.fr](mailto:tanguy.rivoal(A)univ-grenoble-alpes.fr)

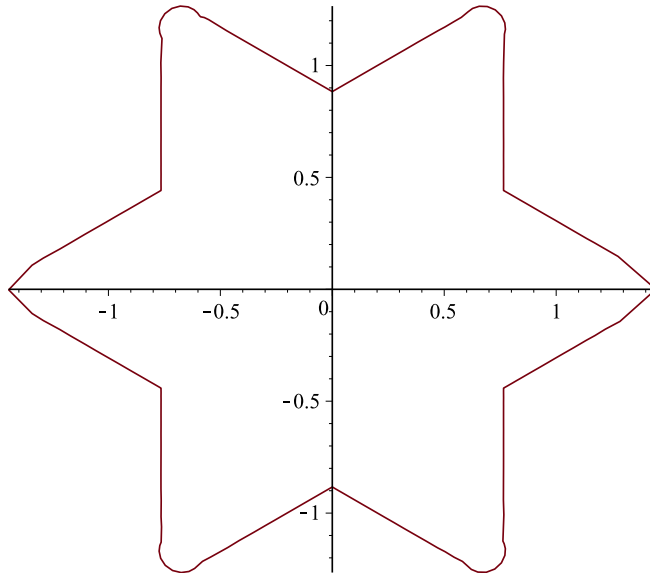


FIGURE 2 – La courbe  $\mathcal{F}_1(C)$

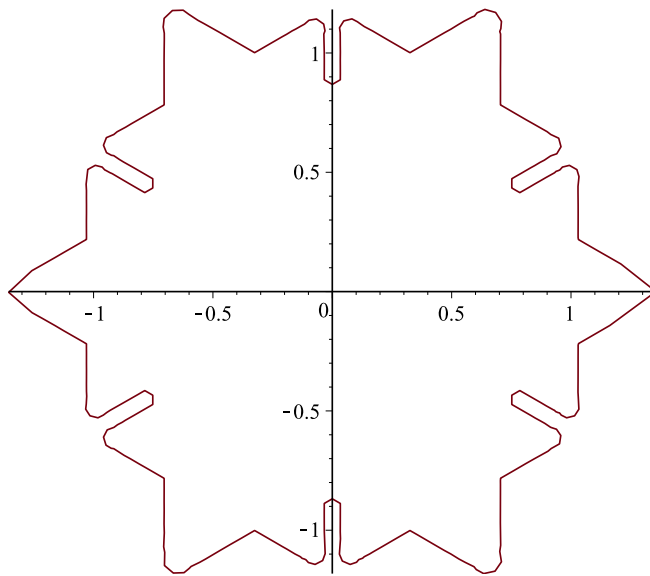


FIGURE 3 – La courbe  $\mathcal{F}_2(C)$

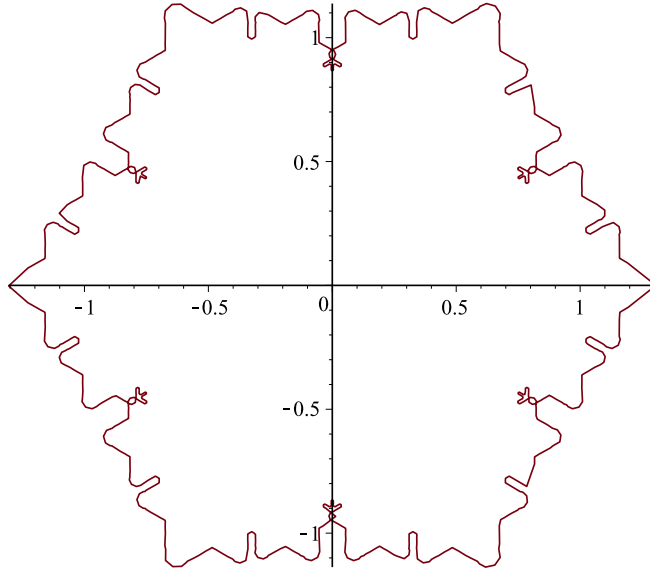


FIGURE 4 – La courbe  $\mathcal{F}_3(C)$

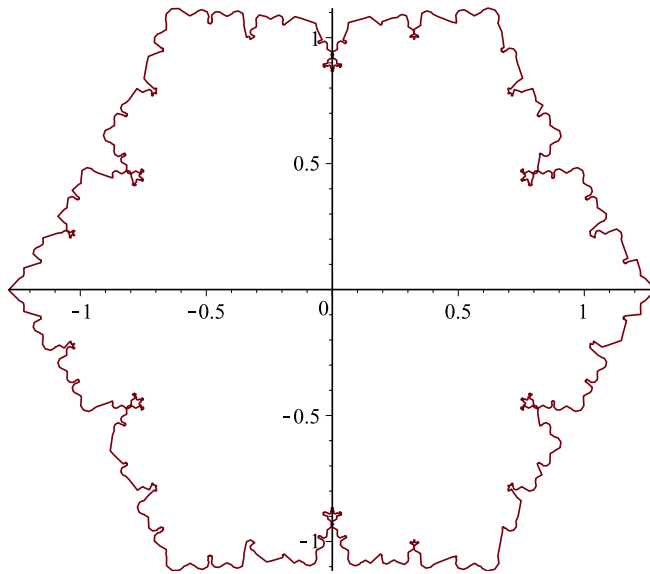


FIGURE 5 – La courbe  $\mathcal{F}_4(C)$

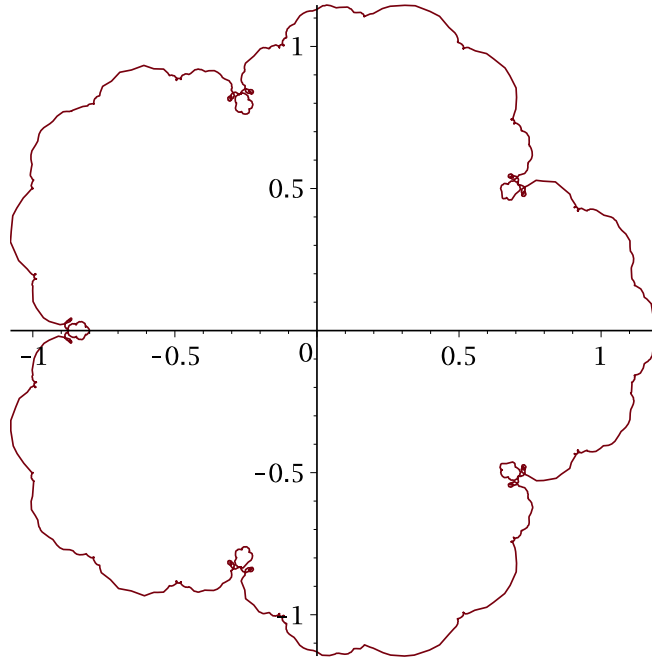


FIGURE 6 – La courbe  $\mathcal{J}_{1,6}(C)$

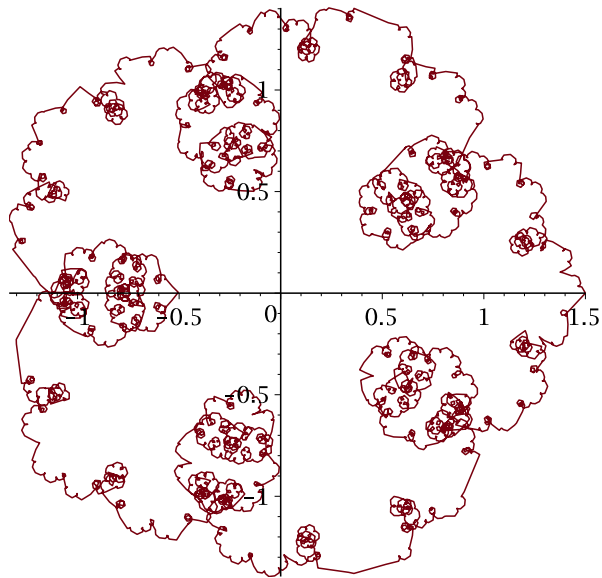


FIGURE 7 – La courbe  $\mathcal{J}_{2,6}(C)$

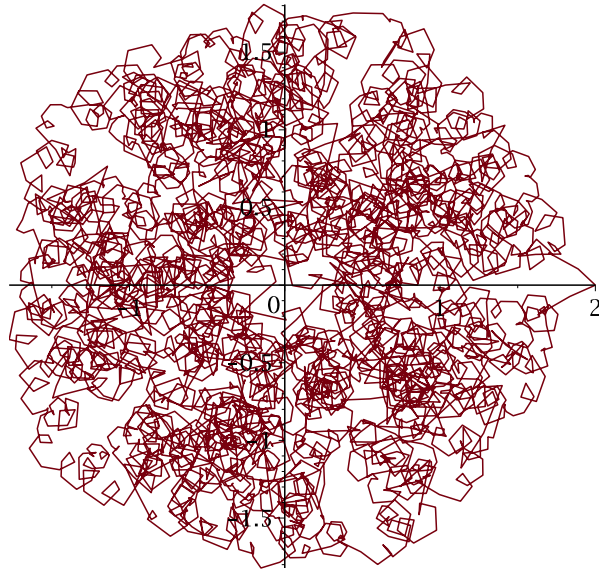


FIGURE 8 – La courbe  $\mathcal{J}_{3,6}(C)$

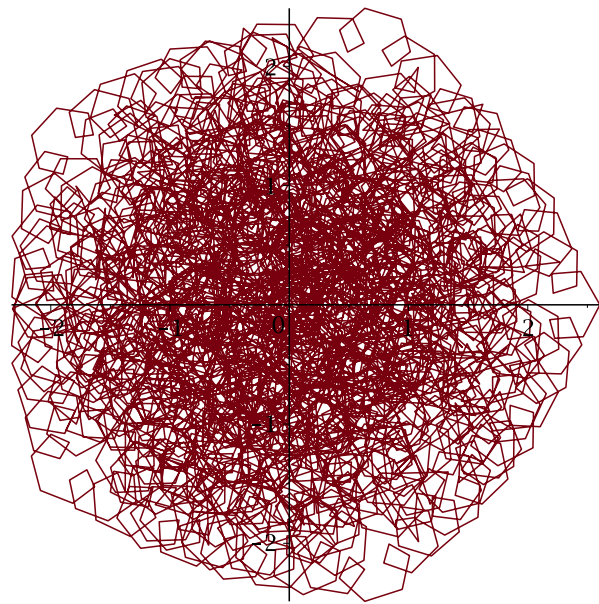


FIGURE 9 – La courbe  $\mathcal{J}_{4,6}(C)$

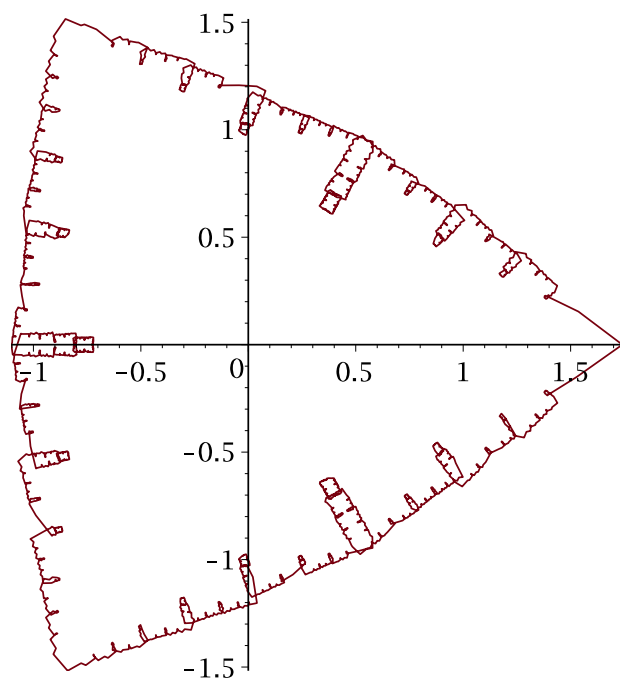


FIGURE 10 – La courbe  $\mathcal{G}_{3,3}(C)$

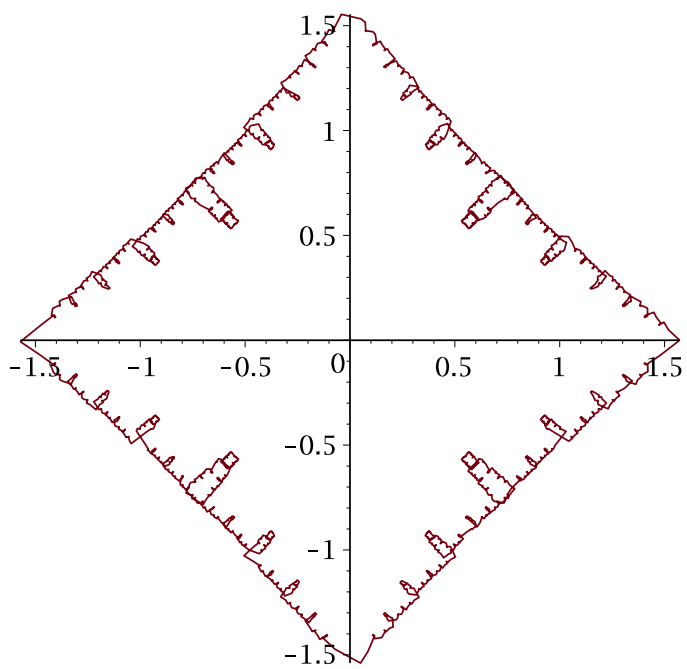


FIGURE 11 – La courbe  $\mathcal{G}_{4,3}(C)$

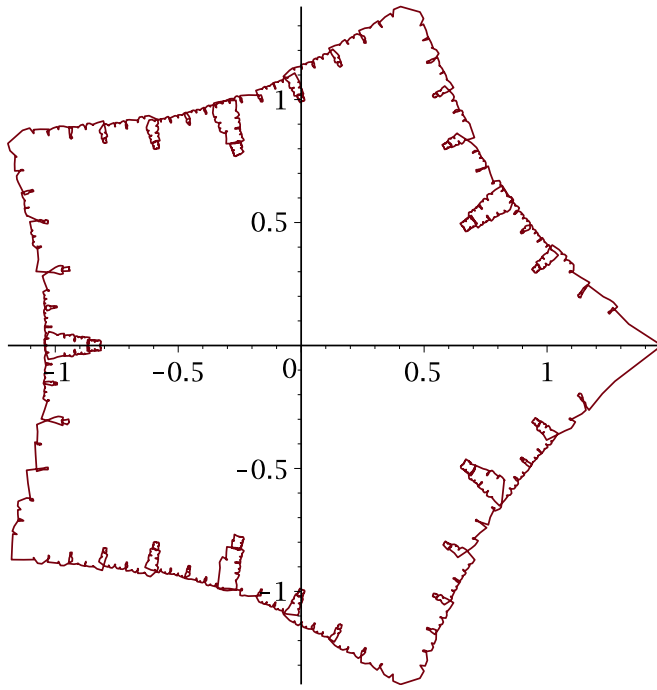


FIGURE 12 – La courbe  $\mathcal{G}_{5,3}(C)$

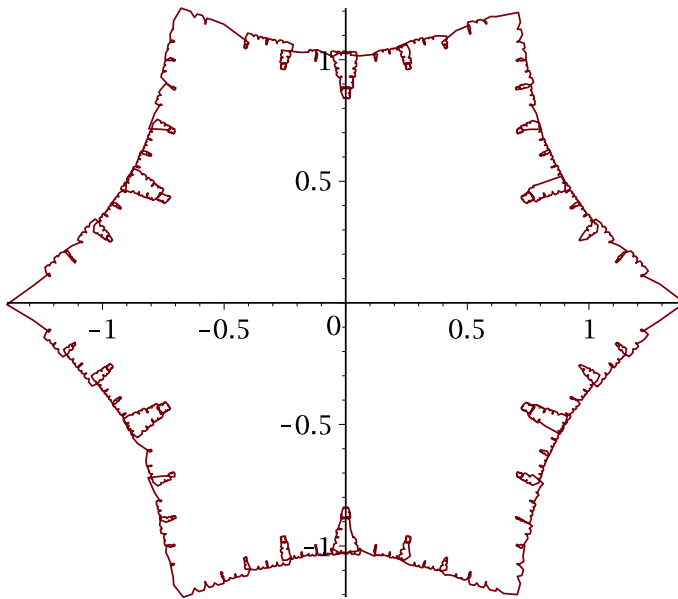


FIGURE 13 – La courbe  $\mathcal{G}_{6,3}(C)$

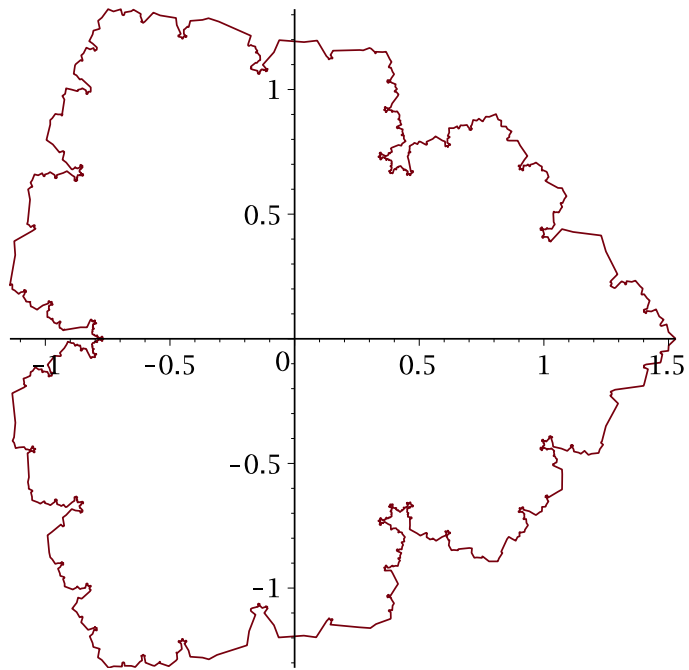


FIGURE 14 – La courbe  $\mathcal{G}_{3,4}(C)$

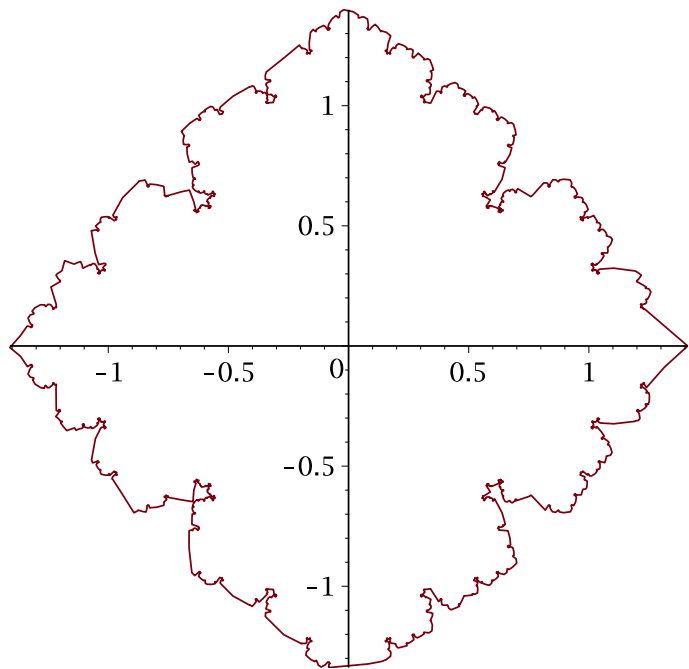


FIGURE 15 – La courbe  $\mathcal{G}_{4,4}(C)$



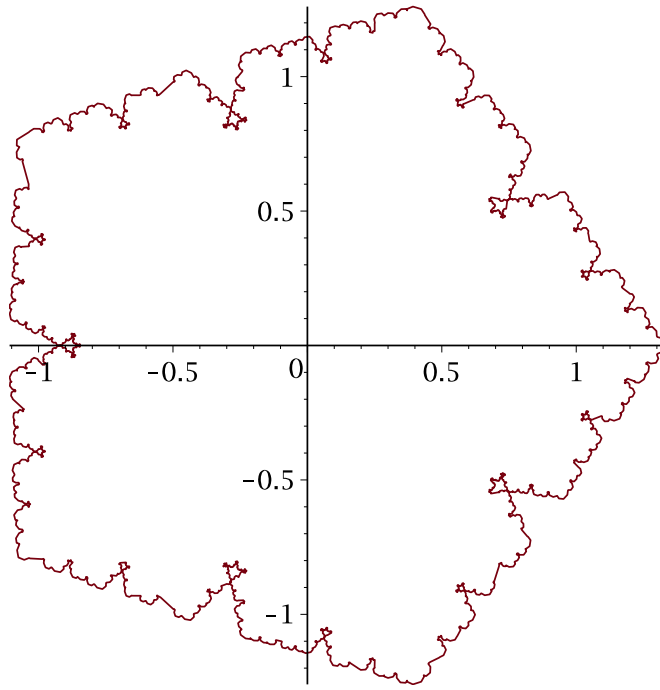


FIGURE 16 – La courbe  $\mathcal{G}_{5,4}(C)$

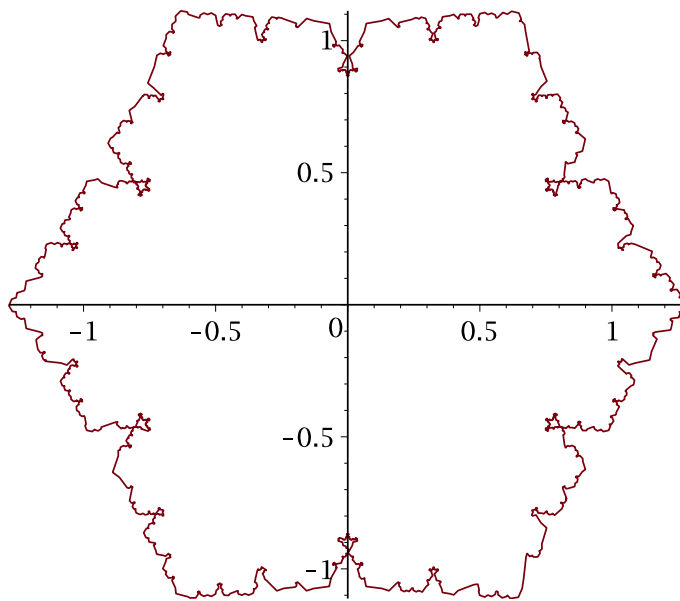


FIGURE 17 – La courbe  $\mathcal{G}_{6,4}(C)$

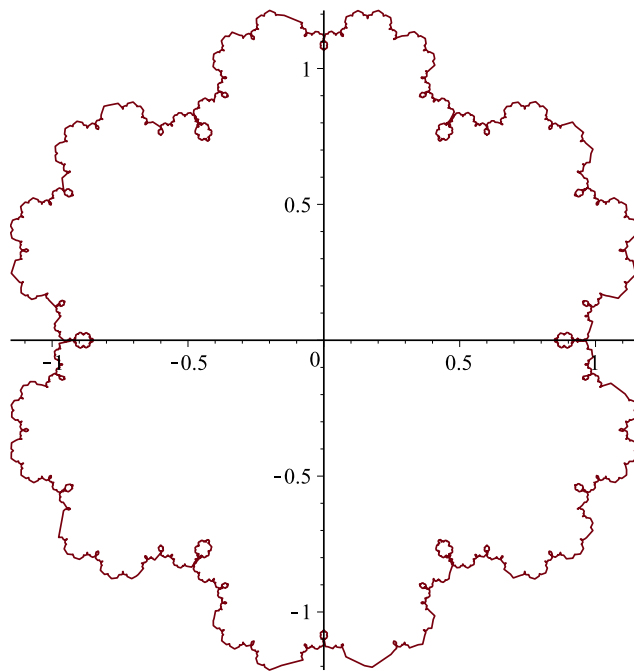


FIGURE 18 – La courbe  $\mathcal{M}_{6,4}(C)$

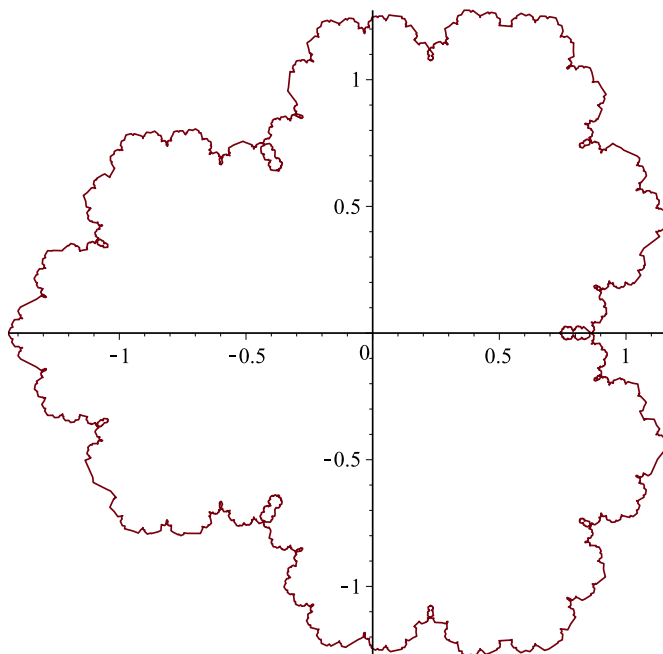


FIGURE 19 – La courbe  $\mathcal{M}_{3,5}(C)$

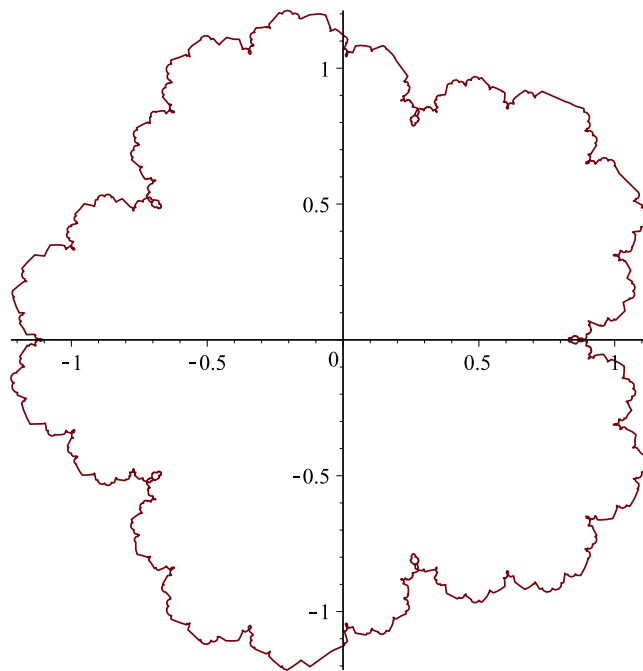


FIGURE 20 – La courbe  $\mathcal{M}_{5,6}(C)$

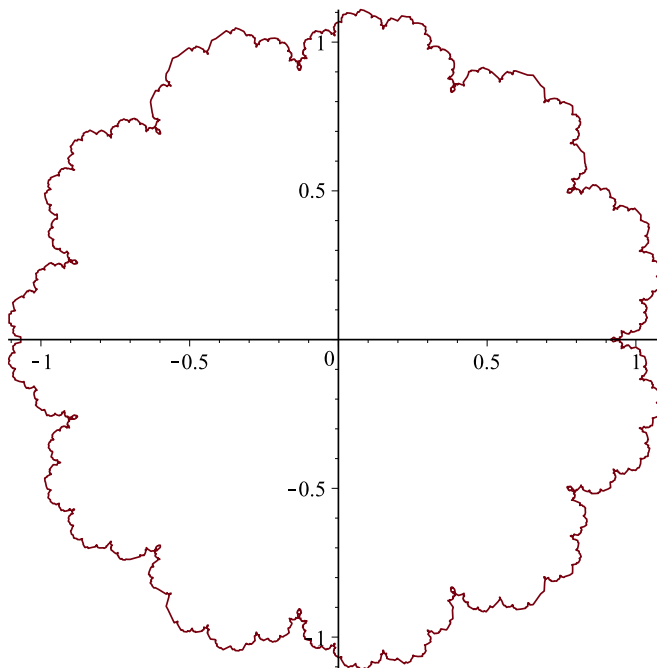


FIGURE 21 – La courbe  $\mathcal{M}_{11,6}(C)$