Quelques applications de l'hypergéométrie à l'étude des valeurs de la fonction zêta de Riemann.

Tanguy Rivoal

Mémoire d'Habilitation à diriger des recherches, soutenu le 26 octobre 2005 à l'Institut Fourier devant le jury composé des professeurs

- Frits Beukers, rapporteur, Université d'Utrecht ;
- Henri Cohen, rapporteur, Université de Bordeaux 1 ;
- Christian Krattenthaler, Université de Wien ;
- Alexei Pantchichkine, Université de Grenoble 1 ;
- Emmanuel Peyre, Université de Grenoble 1 ;
- Michel Waldschmidt, rapporteur, Université de Paris 6.

Table des matières

Introduction

Dans ce mémoire, je décris mes travaux de recherche pendant la période post-thèse courant sur les années 2001-2005, ainsi que quelques projets que j'entends mener à bien dans le futur, certains étant d'ailleurs bien avancés. J'indique également quelques pistes de réflexion qui, je l'espère, intéresseront d'autres personnes que moi. Mon activité peut être essentiellement classée en cinq thèmes ayant une coloration hypergéométrique plus ou moins forte et un dernier un peu à part :

(*i*) *Les séries hypergéométriques très bien équilibrées*, en particulier leurs applications à la démonstration de certaines conjectures, dites « conjectures des dénominateurs ».

(*ii*) *Les méthodes générales de l'hypergéométrie*, qui donnent un cadre global à un certain nombre de phénomènes éparpillés dans la théorie diophantienne de la fonction zêta.

(*iii*) *L'approximation diophantienne*, essentiellement la nature arithmétique de la fonction zêta de Riemann, des polylogarithmes et fonctions associées, dont leurs q-analogues.

(*iv*) *Les approximants de Padé* et leurs éventuelles applications arithmétiques.

(*v*) *Les polyzêtas*, plus précisément, la production d'un algorithme constituant un préalable indispensable à leur étude arithmétique.

(*vi*) *La théorie analytique des nombres* et l'extension d'une méthode heuristique de Golomb pour les nombres premiers jumeaux au cas de la conjecture de Bateman-Horn.

Je me suis efforcé de mettre en lumière les éventuels liens entre ces sujets et les raisons qui m'ont amené à les aborder.

Dans toute la suite et sauf mention contraire, les résultats que j'ai obtenus (seul ou en collaboration) sont indiqués par **Théorème**, alors que ceux dus à un autre auteur sont indiqués par **Théorème** [UNTEL]. Certaines de mes (pré)publications sont disponibles sur l'arXiv et toutes le sont sur `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~rivoal/`.

1 Les séries hypergéométriques très bien équilibrées

Une grande part de mes recherches a porté sur des problèmes importants liés aux résultats obtenus dans ma thèse, qui portait sur la nature arithmétique de la fonction zêta de Riemann. Ces problèmes m'ont conduit à orienter ma recherche sur la nature du lien fondamental entre les résultats alors obtenus et l'hypergéométrie, aspect que je n'avais alors pas du tout développé. Le premier sous-paragraphe est essentiellement de rappel ; dans les deux suivants, j'expose des résultats obtenus en collaboration avec Krattenthaler.

Les *séries hypergéométriques* sont définies par une série entière dépendant d'un certain nombre de paramètres :

$$
{}_{q+1}F_q\left[\begin{matrix}\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_q \\ \beta_1, \ldots, \beta_q\end{matrix}; z\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_0)_k\,(\alpha_1)_k \cdots (\alpha_q)_k}{k!\,(\beta_1)_k \cdots (\beta_q)_k} z^k,
$$

où $\alpha_j \in \mathbf{C}$, $\beta_j \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{Z}_{\leq 0}$ et $(x)_m = x(x+1)\cdots(x+m-1)$ est le symbole de Pochhammer. Une telle série converge pour tout $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z| < 1$, et aussi pour $z = \pm 1$, pourvu que $\mathrm{Re}(\beta_1 + \cdots + \beta_q) > \mathrm{Re}(\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_q)$. Lorsque $z = 1$, on omet de l'écrire dans les paramètres. La littérature (voir [8, 31, 81]) mentionne divers cas particuliers lorsque ces paramètres satisfont certaines relations : par exemple, une série hypergéométrique est dite

- *balancée* (balanced) si $\alpha_0 + \cdots + \alpha_q + 1 = \beta_1 + \cdots + \beta_q$;
- *quasi équilibrée du premier genre* (nearly-poised of the first kind) si $\alpha_1 + \beta_1 = \cdots = \alpha_q + \beta_q$;
- *bien équilibrée* (well-poised) si $\alpha_0 + 1 = \alpha_1 + \beta_1 = \cdots = \alpha_q + \beta_q$;
- *très bien équilibrée* (very-well-poised) si elle est bien équilibrée et $\alpha_1 = \frac{1}{2}\,\alpha_0 + 1$.

Le cas « très bien équilibré » s'avère d'une grande importance. Au sous-paragraphe 3.2, on introduira les q–analogues de ces séries.

1.1 Résultats diophantiens pour la fonction zêta

Pour donner davantage de relief aux résultats nouveaux, je rappelle tout d'abord quelques uns de ceux concernant la nature arithmétique des nombres $\zeta(2n+1)$ pour $n \geq 1$ entier. Le premier résultat majeur de la théorie est le suivant, montré par Apéry en 1978 [7].

Théorème 1 (Apéry)**.** *Les nombres $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$ sont irrationnels.*

Les progrès ultérieurs sont essentiellement contenus dans les deux résultats suivants au moyen d'une méthode assez éloignée de l'approche originale d'Apéry. On trouvera d'autres résultats de même nature dans [69, 95].

Théorème 2.
(i) [9, 67] *Pour tout entier impair $A \geq 3$, on a*

$$\dim_{\mathbf{Q}}(\mathbf{Q} + \mathbf{Q}\zeta(3) + \mathbf{Q}\zeta(5) + \cdots + \mathbf{Q}\zeta(A)) \geq \frac{1+o(1)}{1+\log(2)}\log(A).$$

(ii) [68] *Il existe un irrationnel parmi les neuf nombres $\zeta(5), \zeta(7), \ldots, \zeta(21)$.*

Le point *(ii)* a immédiatement été amélioré par Zudilin [94] par des techniques similaires aux miennes mais poussées au maximum de généralité.

Théorème 3 (Zudilin)**.** *Il existe un irrationnel parmi $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$.*

La stratégie générale ([1]) pour démontrer tous ces résultats est la suivante. Soit une fraction rationnelle de la forme

$$R_{A,n}(k) = \frac{Q_n(k)}{(k(k+1)\cdots(k+n))^A} = \frac{Q_n(k)}{(k)_{n+1}^A} \in \mathbf{Q}(k)$$

où $n \geq 0$, $A \geq 1$ sont entiers et $Q_n(k) \in \mathbf{Q}[k]$. Pour tout entier $C \geq 0$, considérons la série

$$S_{A,C,n}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{C!}\frac{\partial^C R_{A,n}(k)}{\partial k^C}\, z^{-k},$$

que l'on suppose convergente pour $z = 1$, ce qui impose que l'on ait $\deg(Q_n(k)) \leq A(n+1) - 2 + C$. En développant en éléments simples $R_n(k)$, on montre alors qu'il existe des polynômes $P_{0,C,n}(z)$ et $P_{j,n}(z) \in \mathbf{Q}[z]$, de degré au plus n (seul $P_{0,C,n}(z)$ dépend de C), tels que

$$S_{A,C,n}(z) = P_{0,C,n}(z) + (-1)^C \sum_{j=1}^{A} \binom{j+C-1}{j-1} P_{j,n}(z)\mathrm{Li}_{j+C}(1/z),$$

où l'on a utilisé les fonctions polylogarithmes, définies par

$$\mathrm{Li}_s(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^s}$$

(la série converge pour $|z| \leq 1$ pourvu que $(z, s) \neq (1, 1)$). On a bien sûr $\mathrm{Li}_s(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s)$ et $\mathrm{Li}_s(-1) = (2^{1-s} - 1)\zeta(s)$ pour tout $s > 1$.

Sous ces conditions, on peut montrer que

$$\mathrm{d}_n^{A+C} P_{0,C,n}(z) \in \mathbf{Z}[z] \quad \text{et} \quad \mathrm{d}_n^{A-j} P_{j,n}(z) \in \mathbf{Z}[z] \tag{1.1}$$

[1] C'est essentiellement la seule dont on dispose : toutes les autres approches *a priori* différentes produisent finalement les mêmes formes linéaires (voir [28]).

où $\mathrm{d}_n = \mathrm{ppcm}\{1, 2, \ldots, n\}$, et $P_{1,n}(1) = 0$. Il existe donc des entiers $p_{j,C,n}$ tels que

$$\mathrm{d}_n^{A+C} S_{A,C,n}(1) = p_{0,C,n} + \sum_{j=2}^{A} p_{j,C,n}\zeta(C+j),$$

et une expression similaire pour $S_{A,C,n}(-1)$.

Tout le problème réside dans des choix de A et de $Q_n(k)$ tels que l'on puisse appliquer efficacement des critères d'indépendance linéaire, par exemple celui de Nesterenko [58]. Pour démontrer les Théorèmes 1 et 2, on peut ainsi utiliser les séries

$$n!\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k-n)_n}{(k)_{n+1}^2} = p_n\zeta(2) - q_n, \qquad -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial}{\partial k}\left(\frac{(k-n)_n^2}{(k)_{n+1}^2}\right) = a_n\zeta(3) - b_n, \tag{1.2}$$

$$n!^{A-2r}\sum_{k=1}^{\infty}\left(k+\frac{n}{2}\right)\frac{(k-rn)_{rn}(k+n+1)_{rn}}{(k)_{n+1}^A}(-1)^{Ak} = p_{0,n} + \sum_{\substack{j=2\\ j\equiv A-1[2]}}^{A} p_{j,n}\zeta(j) \tag{1.3}$$

et

$$n!^{14}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial k^2}\left(\left(k+\frac{n}{2}\right)\frac{(k-n)_n^3(k+n+1)_n^3}{(k)_{n+1}^{20}}\right) = \tilde{p}_{0,n} + \sum_{\substack{j=5\\ j\mathrm{impair}}}^{21}\tilde{p}_{j,n}\zeta(j). \tag{1.4}$$

Le Théorème 3 nécessite l'emploi d'une série beaucoup plus complexe :

$$\prod_{u=1}^{10}\frac{((13+2u)n)!}{(27n)!^6}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial k^2}\left(\left(k+\frac{37n}{2}\right)\frac{(k-27n)_{27n}^3(k+37n+1)_{27n}^3}{\prod_{u=1}^{10}(k+(12-u)n)_{(13+2u)n+1}}\right)$$
$$= \mathbf{z}_{0,n} + \sum_{j=1}^{4}\mathbf{z}_{j,n}\zeta(2j+3). \tag{1.5}$$

Dans tous les cas, on conclut par des procédés de nature analytique maintenant standard, que je ne rappelle pas ici : voir les articles cités auparavant.

1.2 La conjecture des dénominateurs

Bien qu'en apparence compliquées, les séries (1.3), (1.4) et (1.5) précédentes sont particulièrement importantes, puisque la forme très spéciale de leurs numérateurs permet de construire des formes linéaires « dichotomiques » en les valeurs de zêta. En particulier, cela permet de faire disparaître les nombres $\zeta(2n)$, qui rendent les résultats totalement triviaux et inintéressants lorsqu'ils apparaissent simultanément aux côtés des $\zeta(2n+1)$. Ce phénomène est en fait facilement compréhensible et surtout généralisable à beaucoup de situations connexes, une fois que l'on a remarqué que la série à gauche de (1.3) peut aussi s'écrire ([2]) comme une *série hypergéométrique très bien équilibrée*

$$\frac{(rn)!^{A+1}((2r+1)n+2)!}{2((r+1)n+1)!^{A+1}n!^{2r-A}} \times {}_{A+3}F_{A+2}\left[\begin{matrix}(2r+1)n+2, \frac{2r+1}{2}n+2, rn+1, \ldots, rn+1\\ \frac{2r+1}{2}n+1, (r+1)n+2, \ldots, (r+1)n+2\end{matrix}; (-1)^A\right] \quad (1.6)$$

et que l'on s'efforce alors de travailler avec de telles séries ou celles, très proches, qui font intervenir une dérivée $(\partial/\partial k)^C$ (comme (1.4) ou (1.5)).

Le monde hypergéométrique très bien équilibré est la pierre de voûte ([3]) de tous les résultats récents sur la nature diophantienne des valeurs de zêta et il englobe même les travaux antérieurs d'Apéry. En effet, on a

$$\frac{n!^5(3n+2)!}{2(2n+1)!^4}\,{}_6F_5\left[\begin{matrix}3n+2, \frac{3}{2}n+2, n+1, \ldots, n+1\\ \frac{3}{2}n+1, 2n+2, \ldots, 2n+2\end{matrix}; -1\right] = -\mathbf{p}_n\frac{\zeta(2)}{2} - \mathbf{q}_n$$

avec $\mathrm{d}_n\mathbf{p}_n$ et $\mathrm{d}_n^3\mathbf{q}_n$ entiers et, de même, Ball a introduit la série

$$\frac{n!^7(3n+2)!}{2(2n+1)!^5}\,{}_7F_6\left[\begin{matrix}3n+2, \frac{3}{2}n+2, n+1, \ldots, n+1\\ \frac{3}{2}n+1, 2n+2, \ldots, 2n+2\end{matrix}\right] = \mathbf{a}_n\zeta(3) - \mathbf{b}_n$$

avec $\mathrm{d}_n\mathbf{a}_n$ et $\mathrm{d}_n^4\mathbf{b}_n$ entiers. Le lien avec les célèbres approximations d'Apéry est donné par la remarque cruciale suivante, qui a conditionné une grande partie de mes recherches : numériquement, il semble que

$$\mathbf{p}_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{j}^2\binom{n+j}{n} = p_n \quad \text{et} \quad \mathbf{a}_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{j}^2\binom{n+j}{n}^2 = a_n, \quad (1.7)$$

qui sont exactement les sommes utilisées par Apéry et qui apparaissent dans (1.2). On constate par ailleurs que cela implique que les rationnels $\mathbf{p}_n$ et $\mathbf{a}_n$ sont apparemment des entiers.

D'autres essais numériques m'ont amené à formuler la conjecture suivante dans [69, 70]. Soient A, B, C, n et r des entiers positifs tels que $0 \leq 2Br \leq A$. Selon le schéma général développé au sous-paragraphe 1.1, on a

$$n!^{A-2Br}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{C!}\frac{\partial^C}{\partial k^C}\left(\left(k+\frac{n}{2}\right)\frac{(k-rn)_{rn}^B(k+n+1)_{rn}^B}{(k)_{n+1}^A}\right)(-1)^{kA}$$
$$= \mathbf{p}_{0,C,n}((-1)^A) + \sum_{\substack{j=2\\ j\equiv A-1[2]}}^{A}\binom{C+j-1}{j-1}\mathbf{p}_{j,n}((-1)^A)\zeta(C+j),$$

[2]La série (1.3) n'est pas sous forme hypergéométrique. On passe à la forme (1.6) en appliquant des formules triviales telles que $(\alpha)_k = \frac{k!}{(\alpha-1)!}(k+1)_{\alpha-1}$ (pour des entiers $\alpha \geq 1$ et $k \geq 0$). Cette remarque s'applique à beaucoup des séries considérées dans la suite.

[3]C'est aussi l'axe majeur du développement de la théorie (q–)hypergéométrique au cours du XX[e] siècle : voir [5].

où
$$\mathrm{d}_n^{A+C}\mathbf{p}_{0,C,n}((-1)^A) \in \mathbf{Z} \quad \text{et} \quad \mathrm{d}_n^{A-j}\mathbf{p}_{j,n}((-1)^A) \in \mathbf{Z},$$
en accord avec l'estimation générale des dénominateurs donnée par les relations (1.1). Pourtant, on constate que l'on pourrait éliminer au moins un facteur d_n.

Conjecture des dénominateurs. *Dans les conditions ci-dessus, les nombres rationnels* $\mathrm{d}_n^{A+C-1}\mathbf{p}_{0,C,n}((-1)^A)$ *et* $\mathrm{d}_n^{A-j-1}\mathbf{p}_{j,n}((-1)^A)$ *sont entiers.*

Outre une nouvelle démonstration de l'irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$ dans le droit chemin des résultats récents, on déduit de cette conjecture qu'il existe au moins un irrationnel parmi les huit nombres $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, ..., $\zeta(19)$. Bien que ce dernier résultat soit moins fort que le Théorème 3, il est notable que Zudilin propose lui-même une « super » conjecture des dénominateurs pour les séries qu'il utilise : on voit donc pourquoi il est essentiel de démontrer ces conjectures pour espérer progresser par cette méthode.

Dans un travail en commun avec Krattenthaler [47], nous avons démontré le théorème suivant ([4]).

Théorème 4. *La conjecture des dénominateurs est vraie.*

Il reste donc en suspens le cas de la conjecture des dénominateurs de Zudilin (voir la fin de [47]), que nous n'avons pas encore essayé de démontrer : cela constitue un de nos projets de recherche futurs.

Les explications ci-dessous sont essentiellement une traduction de celles données dans mon survol [75]. Je ne considère que le cas du coefficient dominant, c'est-à-dire le coefficient $\mathbf{p}_{A-1,n}\left((-1)^A\right)$ of $\zeta(C+A-1)$, qui dépend de A, B et r mais pas de C. De plus, on suppose dorénavant que $r=1$ et on note $P_n(A,B) = (-1)^{B(n+1)}\mathbf{p}_{A-1,n}\left((-1)^A\right)$. On a alors

$$P_n(A,B) = \sum_{j=0}^{n}\left(\frac{n}{2}-j\right)\binom{n}{j}^A\binom{n+j}{n}^B\binom{2n-j}{n}^B \cdot\left((A+B)H_{n-j}-(A+B)H_j+BH_{n+j}-BH_{2n-j}-\frac{1}{\frac{n}{2}-j}\right),$$

où $H_m = 1+1/2+\cdots+1/m$ est un nombre harmonique : il n'est donc pas surprenant que l'estimation générale montre que $\mathrm{d}_nP_n(A,B)\in\mathbf{Z}$.

La conjecture des dénominateurs affirme que $P_n(A,B)$ est en fait un entier, ce qui est beaucoup plus surprenant. Dans le cas de $\zeta(2)$ (pour $A=3$, $B=1$) et $\zeta(3)$ (pour $A=4$, $B=1$), il est même possible d'identifier ces coefficients avec les nombres d'Apéry : l'avantage de (1.7) est qu'il bien sûr beaucoup plus facile de démontrer une identité et, de fait, (1.7) peut se démontrer à l'aide du programme Ekhad de Zeilberger [27, 92]. Voir l'introduction de [47] pour les références à ce sujet.

[4] parmi d'autres de même nature qui le complètent mais sont plus compliqués à énoncer ; par exemple, l'un de nos résultats prouve une amélioration de la conjecture des dénominateurs dans un cas spécial lié à des approximations rationnelles de $\zeta(4)$, que Zudilin avait conjecturée dans [93]

Mais, en général, on ne dispose pas d'une telle identité à démontrer et notre première tâche a été d'en trouver une, ce que nous sommes parvenus à faire de la façon suivante. Dans [88], Vasilyev a introduit une généralisation des célèbres intégrales de Beukers [14] pour $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$: pour tout entier $E \geq 2$, on pose

$$J_{n,E} = \int_{[0,1]^E} \frac{\prod_{j=1}^{E} x_j^n (1-x_j)^n \, \mathrm{d}x_j}{Q_E(x_1, x_2, \ldots, x_E)^{n+1}}$$

où $Q_E(x_1, x_2, \ldots, x_E) = 1 - (\cdots(1-(1-x_1)x_2)\cdots)x_E$. Il a montré dans [89] que $J_{n,4} \in \mathbf{Q} + \mathbf{Q}\zeta(2) + \mathbf{Q}\zeta(4)$ et $J_{n,5} \in \mathbf{Q} + \mathbf{Q}\zeta(3) + \mathbf{Q}\zeta(5)$, tandis que Beukers avait quant à lui montré que $J_{n,2} \in \mathbf{Q} + \mathbf{Q}\zeta(2)$ et $J_{n,3} \in \mathbf{Q} + \mathbf{Q}\zeta(3)$. Vasilyev a alors conjecturé que cette dichotomie est valable pour tout E : cela a été démontré par Zudilin dans [93].

Théorème 5 (Zudilin)**.** *Pour tout $E \geq 2$, on a*

$$J_{n,E} = \frac{n!^{2E+1}(3n+2)!}{2(2n+1)!^{E+2}} \, {}_{E+4}F_{E+3}\left[\begin{matrix} 3n+2, \frac{3}{2}n+2, n+1, \ldots, n+1 \\ \frac{3}{2}n+1, 2n+2, \ldots, 2n+2 \end{matrix} ; (-1)^{E+1}\right]. \tag{1.8}$$

La série hypergéométrique (1.8) est un cas spécial de la série très bien équilibrée (1.6) : elle s'exprime donc comme une forme linéaire en valeurs pairs ou impairs de zêta et le coefficient de $\zeta(E)$ est exactement $(-1)^{n+1}P_n(E+1,1)$. Mais il est aussi possible, quoique difficile, de « développer » l'intégrale à gauche de (1.8) comme une combinaison linéaire de valeurs de zêta et aussi de polyzêtas (voir le paragraphe 5 pour la définition) et ensuite d'isoler le coefficient de $\zeta(E)$. En supposant vrai le fait raisonnable que les valeurs $\zeta(n)$ ($n \geq 2$) sont $\mathbf{Q}$–linéairement indépendantes, la comparaison des deux membres de (1.8) nous a conduit à la

Conjecture de dénominateurs raffinée ($B = 1$)**.** *Pour $A = 2m+1 \geq 3$ impair, posons*

$$p_n(A,1) = \sum_{0 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_m \leq n} \binom{n}{i_m}^2 \binom{n+i_m}{n} \prod_{k=1}^{m-1} \binom{n}{i_k}^2 \binom{n+i_{k+1}-i_k}{n},$$

et pour $A = 2m \geq 2$ pair, posons

$$p_n(A,1) = \sum_{0 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_m \leq n} (-1)^{i_m} \binom{n}{i_m} \binom{n+i_m}{n} \prod_{k=1}^{m-1} \binom{n}{i_k}^2 \binom{n+i_{k+1}-i_k}{n},$$

Alors, pour tous entiers $A \geq 2$, $n \geq 0$, on a $P_n(A,1) = (-1)^{An+1} p_n(A,1)$.

On voit donc maintenant davantage pourquoi les nombres $P_n(A,1)$ seraient entiers. Une identité intégrale similaire nous a permis de formuler un tel raffinement pour les $P_n(A,0)$. Il est aussi possible d'énoncer des identités conjecturales pour les quelques valeurs de A non couvertes et que l'on prouve à la main.

La deuxième étape a été d'utiliser le logiciel HYP, développé par Krattenthaler [46] : il s'agit d'une version électronique interactive du livre de Gasper et Rahman [31], qui liste les très nombreuses identités entre séries (q–)hypergéométriques. À l'aide de HYP, il est beaucoup plus facile, bien que toujours difficile dans notre situation, de manipuler rapidement les sommes hypergéométrique finies ayant beaucoup de paramètres. Les identités conjecturales raffinées ci-dessus s'avèrent découler d'un certain nombre d'identités particulièrement complexes (c'est-à-dire ayant beaucoup de paramètres et tenant difficilement sur une page). La preuve utilise la transformation de Whipple (voir [8, identité (7.1.1), p. 87]) entre une série ${}_4F_3$ balancée terminée et une série ${}_7F_6$ très bien équilibrée terminée, de manière itérative. Bien plus tard, nous nous sommes aperçus que nos principales identités étaient essentiellement des variations du cas classique d'une identité q-hypergéométrique terminée, prouvée sans HYP par Andrews [4] dans les années soixante-dix :

$$
\begin{aligned}
&{}_{2s+5}F_{2s+4}\left[\begin{matrix} a, \frac{a}{2}+1, b_1, c_1, \dots, b_{s+1}, c_{s+1}, -N \\ \frac{a}{2}, 1+a-b_1, 1+a-c_1, \dots, 1+a-b_{s+1}, 1+a-c_{s+1}, 1+a+N \end{matrix}\right] \\
&\quad = \frac{(1+a)_N\,(1+a-b_{s+1}-c_{s+1})_N}{(1+a-b_{s+1})_N\,(1+a-c_{s+1})_N} \sum_{k_1,k_2,\dots,k_s\geq 0} \frac{(-N)_{k_1+\cdots+k_s}}{(b_{s+1}+c_{s+1}-a-N)_{k_1+\cdots+k_s}} \\
&\qquad\qquad \cdot \prod_{j=1}^{s} \frac{(1+a-b_j-c_j)_{k_j}\,(b_{j+1})_{k_1+\cdots+k_j}\,(c_{j+1})_{k_1+\cdots+k_j}}{k_j!\,(1+a-b_j)_{k_1+\cdots+k_j}\,(1+a-c_j)_{k_1+\cdots+k_j}}. \qquad (1.9)
\end{aligned}
$$

Les deux membres sont des sommes finies en raison de la présence du paramètre entier négatif $-N$: le faire tendre faire l'infini a une conséquence intéressante, expliquée au sous-paragraphe 1.3.

Il est possible d'en déduire des identités confirmant la conjecture des dénominateurs pour les autres coefficients $P_n(A, B)$ avec $B \geq 2$, mais beaucoup plus de travail « humain » est nécessaire pour déduire de ce type d'identités le bon dénominateur pour les autres coefficients des formes linéaires : on se réfèrera à [47] pour les détails. Par soucis de précision, indiquons que la conjecture est prouvée pour $2\mathbf{p}_{0,C,n}(\pm 1)$ et non $\mathbf{p}_{0,C,n}(\pm 1)$ (ce facteur 2 est anodin pour les applications) : c'est le cas le plus difficile de la conjecture et aussi le plus important puisque le dénominateur de $\mathbf{p}_{0,C,n}(\pm 1)$ est toujours celui de la forme linéaire en valeurs de zêta associée.

1.3 Une nouvelle preuve de la conjecture de Vasilyev

Après avoir remarqué l'importance de l'identité de Andrews pour la solution de la conjecture des dénominateurs, nous nous sommes rendu compte que l'on pouvait aussi l'utiliser pour donner une nouvelle démonstration de la conjecture de Vasilyev, qui est bien sûr maintenant le Théorème 5, dû à Zudilin. Selon nous, il s'agit d'une observation intéressante car tous les essais pour démontrer ce théorème par des manipulations directes de séries hypergéométriques avaient échoué à cause de problème de divergence de certaine séries intermédiaires. Zudilin a contourné ces problèmes en ayant recours à une *intégrale* complexe de type Barnes à la place de *séries*.

Notre observation montre qu'il existe bien une démonstration purement hypergéométrique (c'est-à-dire une preuve utilisant seulement des sommations et des transformations entre séries hypergéométriques) mais pour cela il faut monter d'un cran dans la hiérarchie, c'est-à-dire qu'il faut trouver une identité terminée « au dessus » de celle que l'on veut prouver, qui en est alors un cas limite. La conjecture de Vasilyev s'obtient ainsi à partir de (1.9) en faisant tendre $N \to +\infty$. Il nous a donc fallu justifier soigneusement ce passage à la limite, particulièrement délicat et peu évident, pour obtenir dans [48] le théorème suivant, dont j'omet les conditions techniques qui sont vérifiées dans le cas qui nous intéresse.

Théorème 6. *Pour tout entier $s \geq 1$, sous certaines conditions sur les complexes a, c_0, $b_1, \ldots, b_s$, $c_1, \ldots, c_s$, on a*

$$
\begin{aligned}
&{}_{2s+3}F_{2s+2}\left[\begin{matrix} a, \frac{a}{2}+1, c_0, b_1, c_1, \ldots, b_s, c_s \\ \frac{a}{2}, 1+a-c_0, 1+a-b_1, 1+a-b_1, \ldots, 1+a-b_s, 1+a-c_s \end{matrix}\right] \\
&\quad = \frac{\Gamma(1+a-b_s)\,\Gamma(1+a-c_s)}{\Gamma(1+a)\,\Gamma(1+a-b_s-c_s)} \sum_{k_1,k_2,\ldots,k_s \geq 0} \frac{(b_1)_{k_1}\,(c_1)_{k_1}}{k_1!\,(1+a-c_0)_{k_1}} \\
&\qquad \cdot \prod_{j=2}^{s} \frac{(1+a-b_{j-1}-c_{j-1})_{k_j}\,(b_j)_{k_1+\cdots+k_j}\,(c_j)_{k_1+\cdots+k_j}}{k_j!\,(1+a-b_{j-1})_{k_1+\cdots+k_j}\,(1+a-c_{j-1})_{k_1+\cdots+k_j}}
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

et une identité similaire pour une ${}_{2s+4}F_{2s+3}$ évaluée en $z = -1$.

Bien que cela ne soit pas évident à première vue, les deux identités ainsi obtenues ne sont qu'une reformulation du théorème de Zudilin. Soient z, $a_0, a_1, \ldots, a_m$ et $b_1, \ldots, b_m$ des complexes tels que $|z| < 1$, $\mathrm{Re}(b_i) > \mathrm{Re}(a_i) > 0$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, m$. Posons

$$
J_m\left[\begin{matrix} a_0, a_1, \ldots, a_m \\ b_1, \ldots, b_m \end{matrix}; z\right] = \int_{[0,1]^m} \frac{\prod_{i=1}^m x_i^{a_i-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1}\mathrm{d}x_i}{(1-(1-(\cdots(1-x_m)x_{m-1})\cdots)x_1 z)^{a_0}},
$$

qui converge absolument si l'on suppose en plus que $\mathrm{Re}(b_1 - a_1) > \mathrm{Re}(a_0)$ si $m = 1$, respectivement $\mathrm{Re}(b_1 - a_1) \geq \mathrm{Re}(a_0)$ si $m \geq 2$.

Théorème 7 (Zudilin). *Pour tout entier $m \geq 1$, on a*

$$
\begin{aligned}
&J_m\left[\begin{matrix} h_1, h_2, h_3, \ldots, h_{m+1} \\ 1+h_0-h_3, 1+h_0-h_4, \ldots, 1+h_0-h_{m+2} \end{matrix}; 1\right] \\
&\quad = \frac{\Gamma(1+h_0)\prod_{j=3}^{m+1}\Gamma(h_j)}{\prod_{j=1}^{m+2}\Gamma(1+h_0-h_j)} \cdot \left(\prod_{j=1}^{m+1}\Gamma(1+h_0-h_j-h_{j+1})\right) \\
&\qquad \times {}_{m+4}F_{m+3}\left[\begin{matrix} h_0, \frac{1}{2}h_0+1, h_1, \ldots, h_{m+2} \\ \frac{1}{2}h_0, 1+h_0-h_1, \ldots, 1+h_0-h_{m+2} \end{matrix}; (-1)^{m+1}\right],
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

pourvu que $1 + \mathrm{Re}(h_0) > \frac{2}{m+1}\sum_{j=1}^{m+2}\mathrm{Re}(h_j)$, $\mathrm{Re}(1+h_0-h_{j+1}) > \mathrm{Re}(h_j) > 0$ pour $j = 2, 3, \ldots, m+1$, et $\mathrm{Re}(1+h_0-h_3-h_2) \geq \mathrm{Re}(h_1)$, ces conditions assurant que les deux membres de (1.11) sont bien définis.

À droite de (1.11), on reconnaît la série hypergéométrique très bien équilibrée la plus générale possible comme à gauche de (1.10), ce qui indique pourquoi les deux formules sont identiques : lorsque l'on exprime comme une série l'intégrale à gauche de (1.11), on tombe exactement sur la série multiple à droite de (1.10).

En supposant un certain nombre de conditions naturelles sur les paramètres, on peut aussi exprimer (1.10) comme combinaison linéaire de valeurs de zêta aux entiers pairs ou impairs : un tel degré de généralité semble nécessaire pour espérer progresser vers l'irrationalité de $\zeta(5)$ par ces méthodes. On peut également noter que la série multiple dans le Théorème 6 est du type de celles qui apparaissent naturellement dans l'étude de la nature arithmétique des polyzêtas, telle que je l'expose au paragraphe 5.

2 Autres liens entre hypergéométrie et zêta

Je me suis également intéressé à un certain nombre d'autres problèmes liés à la fonction zêta et dont la nature est clairement hypergéométrique. J'en décris trois dans ce paragraphe.

2.1 Une utilisation de l'intégrale de Selberg

Au paragraphe précédent, j'ai mis en évidence l'importance fondamentale des séries hypergéométriques très bien équilibrées pour l'étude des valeurs de zêta. Cependant, il est essentiel de trouver de nouvelles approches et, dans ce but, Amoroso m'avait suggéré d'utiliser l'identité suivante, due à Selberg [80], pour construire de nouvelles approximations rationnelles des valeurs de la fonction zêta :

$$\int_{[0,1]^{A+1}} \prod_{j=0}^{A} x_j^{\alpha}(1-x_j)^{\beta} \prod_{0\leq j<\ell\leq A} |x_j-x_\ell|^{2\gamma}\,\mathrm{d}x_0\cdots\mathrm{d}x_A \\ = \prod_{j=0}^{A} \frac{\Gamma(\gamma+j\gamma+1)\Gamma(\alpha+j\gamma+1)\Gamma(\beta+j\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+1)\Gamma(\alpha+\beta+(A+j)\gamma+2)}, \quad (2.1)$$

où les nombres complexes α, β et γ vérifient

$$\mathrm{Re}(\alpha)>-1,\ \mathrm{Re}(\beta)>-1,\ \mathrm{Re}(\gamma)>-\min\left(\frac{1}{a+1},\frac{\mathrm{Re}(\alpha)+1}{a},\frac{\mathrm{Re}(\beta)+1}{a}\right).$$

En effet, par une procédure simple, on peut se servir de (2.1) afin de prouver que, pour tous entiers $A\geq 2$, $\alpha,\beta,\gamma\geq 0$, on a ([5])

$$\int_{[0,1]^{A+1}} \frac{\prod_{0\leq j<\ell\leq A}(x_j-x_\ell)^{2\gamma}\prod_{j=0}^{A}x_j^{\alpha}(1-x_j)^{\beta}\mathrm{d}x_j}{(1-x_0\cdots x_A)^{2\alpha+\beta+2a\gamma+2}} = p_0^{\alpha,\beta,\gamma}+\sum_{j=2}^{A}p_j^{\alpha,\beta,\gamma}\zeta(j),$$

avec des rationnels $p_j^{\alpha,\beta,\gamma}$ qui sont nuls lorsque $A(\beta+1)+j$ est impair. L'idée était d'exploiter le discriminant $\prod_{0\leq j<\ell\leq A}(x_j-x_\ell)^{2\gamma}$ pour montrer que cette intégrale est très petite (pour un bon choix de paramètres) et ainsi espérer améliorer les théorèmes obtenus par la voie *très bien équilibrée*. Malheureusement, cela n'a pu aboutir en raison du trop gros dénominateur commun aux coefficients rationnels $p_j^{\alpha,\beta,\gamma}$: ceci n'était apparu qu'après un long calcul technique.

Plus récemment, j'ai réalisé que la raison de cet insuccès était en fait une conséquence du résultat suivant [72].

[5] Ce type d'intégrale est très courant dans cette théorie et celle pour $\gamma=0$ est déjà présente dans [9, 67]. Voir aussi le sous-paragraphe 2.3 consacré aux intégrales de Rhin-Viola.

Théorème 8. *Dans les conditions ci-dessous, on a*

$$\int_{[0,1]^{A+1}} \frac{\prod_{0\le j<\ell\le A}(x_j-x_\ell)^{2\gamma}\prod_{j=0}^{A} x_j^{\alpha}(1-x_j)^{\beta}\mathrm{d}x_j}{(1-x_0\cdots x_A)^{2\alpha+\beta+2a\gamma+2}} = \mathrm{Selberg}_A^{\alpha,\beta,\gamma}$$
$$\times\ {}_{A+2}F_{A+1}\left[\begin{matrix}\delta+1, & \alpha+1, & \alpha+\gamma+1, & \alpha+2\gamma+1, & \ldots, & \alpha+A\gamma+1\\ \alpha+\beta+2A\gamma+2, & \alpha+\beta+(2A-1)\gamma+2, & \ldots, & \alpha+\beta+A\gamma+2 & & \end{matrix}\right],$$

où $\delta = 2\alpha+\beta+2A\gamma+1$ *et* $\mathrm{Selberg}_A^{\alpha,\beta,\gamma}$ *désigne le membre de droite de* (2.1).

La preuve est assez simple puisqu'il suffit de développer en série entière le dénominateur de l'intégrale, d'inverser les signes $\int$ et $\sum$, puis d'utiliser l'identité de Selberg et la définition d'une série hypergéométrique. On remarque alors que la série hypergéométrique est *bien équilibrée* ([6]), c'est-à-dire que l'on retombe sur le type de séries déjà utilisées pour démontrer les Théorèmes 2 et 3. Il est donc improbable que l'on obtienne par cette méthode des résultats autres que ceux déjà connus : la complexité des calculs que j'avais faits n'est finalement qu'une conséquence de celle de la fonction hypergéométrique ci-dessus.

2.2 Les séries de type Apéry

Au cours de sa démonstration de l'irrationalité de $\zeta(3)$, Apéry [7] a mentionné l'identité

$$\zeta(3) = \frac{5}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{\binom{2k}{k}k^3}. \tag{2.2}$$

Bien que la série à droite converge beaucoup plus vite que celle définissant $\zeta(3)$, la formule (2.2) n'est pas essentielle dans la preuve d'Apéry puisque ses troncations *ne sont pas* des approximations diophantiennes de $\zeta(3)$. D'un autre côté, il est probable que (2.2) ait été une source d'inspiration pour Apéry (voir [22, 85] pour l'explication de la méthode originale d'Apéry) et de nombreux auteurs ont cherché des identités similaires dans l'espoir qu'elles donnent de nouvelles idées pour prouver l'irrationalité de $\zeta(2s+1)$ pour tout entier $s\ge 2$: voir par exemple [17, 24, 44, 52, 86].

Comme on l'a vu, la nature arithmétique des valeurs de zêta est loin d'être totalement connue mais de très belles identités de type Apéry ont été obtenues. Plus précisément, deux familles de telles identités, apparemment sans lien entre elles, sont apparues pour les nombres $\zeta(2s+3)$ et $\zeta(4s+3)$: on les explique plus facilement au moyen des séries génératrices

$$\sum_{s=0}^{\infty}\zeta(2s+3)\,a^{2s} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n^2-a^2)} \quad \text{et} \quad \sum_{s=0}^{\infty}\zeta(4s+3)\,b^{4s} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^4-b^4}.$$

[6] La différence entre *très bien équilibrée* et *bien équilibrée* tient seulement à la présence ou non du facteur $k+n/2$ dans les séries utilisées : il est la raison d'être des diverses conjectures des dénominateurs, bien que la preuve de cette conjecture soit loin d'avoir éclairci ce mystérieux lien. En dehors de cela, le facteur $k+n/2$ ne joue aucun rôle asymptotique et on peut parfaitement l'omettre si une estimation « triviale » des dénominateurs suffit ; c'est d'ailleurs le cas des résultats de [9, 67].

(Les séries des membres de gauche convergent seulement pour $|a| < 1$ et $|b| < 1$, alors que celles des membres de droite convergent sur des domaines plus grands.) Koecher [44] (et indépendamment Leshchiner [52] dans une forme développée) a prouvé que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n^2-a^2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\binom{2k}{k}k^3} \frac{5k^2-a^2}{k^2-a^2} \prod_{n=1}^{k-1}\left(1-\frac{a^2}{n^2}\right), \tag{2.3}$$

pour tout complexe a tel que $|a| < 1$ et, plus récemment, Almkvist et Granville [3] ont montré une autre identité, initialement conjecturée sur des bases expérimentales par Borwein et Bradley [17] :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4-b^4} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\binom{2k}{k}} \frac{5k}{k^4-b^4} \prod_{n=1}^{k-1}\left(\frac{n^4+4b^4}{n^4-b^4}\right), \tag{2.4}$$

pour tout complexe b tel que $|b| < 1$. Pour $a = b = 0$, ces identités se réduisent à (2.2) mais leur développement de Taylor conduisent à des identités fort différentes pour les nombres $\zeta(4s+3)$.

Cohen m'a indiqué qu'il avait obtenu une formule conjecturale permettant d'unifier les formules (2.3) et (2.4) et il m'a encouragé à la démontrer, ce que je suis parvenu à faire dans [74] en généralisant la méthode combinatoire d'Almkvist et Granville (qui consiste à ramener le problème à une égalité de sommes finies).

Théorème 9. *Soient a et b des complexes tels que $|a|^2 + |b|^4 < 1$. On a alors*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4-a^2n^2-b^4} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\binom{2k}{k}k} \frac{5k^2-a^2}{k^4-a^2k^2-b^4} \prod_{n=1}^{k-1}\left(\frac{(n^2-a^2)^2+4b^4}{n^4-a^2n^2-b^4}\right). \tag{2.5}$$

Comme ce théorème unifie (2.3) (cas $b = 0$) et (2.4) (cas $a = 0$), il devrait fournir de nouvelles formules de type Apéry. C'est bien le cas puisque

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4-a^2n^2-b^4} = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \binom{r+s}{r} \zeta(2r+4s+3)\, a^{2r}\, b^{4s}$$

et que le nombre de représentations d'un entier $j \geq 0$ comme $j = r + 2s$ avec des entiers $r, s \geq 0$ est $[j/2] + 1$. Donc, (2.5) produit $[j/2] + 1$ différentes identités pour $\zeta(2j+3)$ pour tout entier $j \geq 0$, que l'on obtient en dérivant le membre de droite de (2.5) r, resp. s, fois par rapport à a^2, resp. b^4, avec $j = r + 2s$ et en prenant finalement $a = b = 0$. Pour $0 \leq j \leq 2$, un des entiers r, s est nul et on obtient seulement des identités résultant de (2.3) ou (2.4). C'est aussi le cas pour $j = 3$, $(r, s) = (3, 0)$ et la première identité apparemment nouvelle est pour $j = 3$, $(r, s) = (1, 1)$:

$$\begin{aligned}\zeta(9) = \frac{9}{4}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\binom{2k}{k}k^9} &+ 5\sum_{k>j\geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{\binom{2k}{k}k^5j^4} + 5\sum_{k>j\geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{\binom{2k}{k}k^3j^6} \\ &- \frac{5}{4}\sum_{k>j\geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{\binom{2k}{k}k^7j^2} - \frac{25}{4}\sum_{k>j>i\geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{\binom{2k}{k}k^3j^4i^2} - \frac{25}{4}\sum_{k>j>i\geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{\binom{2k}{k}k^3j^2i^4}.\end{aligned} \tag{2.6}$$

Dans [17], Borwein et Bradley mentionnent qu'ils ont obtenu un nombre incalculable d'identités de type Apéry pour les nombres $\zeta(2s+1)$ mais qu'ils n'ont pu les « structurer » que lorsque s est pair, en conjecturant (2.4). Ils ajoutent que le cas des nombres $\zeta(4s+1)$ leur échappent totalement ([7]) : on peut considérer que le Théorème 9 est un premier pas vers la compréhension de ces identités, puisqu'il donne une méthode algorithmique pour produire autant de formules pour les nombres $\zeta(4s+1)$ que pour les nombres $\zeta(4s+3)$.

Terminons sur une note plus spéculative. Les séries multiples qui apparaissent à droite de (2.6) ne sont pas sans rappeler les séries polyzêtas, dont la structure algébrique est assez bien comprise (au moins conjecturalement) : existe-t-il une telle structure dans le cas des séries du type d'Apéry ?

2.3 La conjecture de Rhin et Viola

Dans le but d'obtenir de bonnes mesures d'irrationalité pour $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$, Rhin et Viola ont développé dans [64, 65] une méthode très originale consistant à faire agir un groupe de changements de variables sur certaine intégrales hypergéométriques multiples. Ils ont en fait obtenu les meilleures mesures actuellement connues : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $Q(\varepsilon)$ tel que, pour tout couple $(p,q) \in \mathbf{Z}^2$ avec $q > Q(\varepsilon)$, on ait

$$\left|\zeta(2) - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q^{5,4413+\varepsilon}} \quad \text{et} \quad \left|\zeta(3) - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q^{5,5139+\varepsilon}}.$$

Je ne vais pas décrire en détail le travail de Rhin et Viola mais un phénomène hypergéométrique assez mystérieux apparu dans le cas de $\zeta(2)$. Indiquons seulement que leur méthode consiste à établir, *via* des changements de variables et une identité hypergéométrique classique, que si les entiers h, i, j, k, l, $j+k-h$, $k+l-i$, $l+h-j$, $h+i-k$, $i+j-l$ sont tous positifs, alors, une fois divisée par $h!i!j!k!l!$, l'intégrale

$$I(h,i,j,k,l) = \int_0^1\int_0^1 \frac{x^h(1-x)^i y^k(1-y)^j}{(1-xy)^{i+j-l+1}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

est une fonction symétrique des variables $h+i$, $i+j$, $j+k$, $k+l$, $l+h$ et que, de plus, $I(h,i,j,k,l) \in \mathbf{Q} + \mathbf{Q}\zeta(2)$. Ils exploitent alors l'invariance de $I(h,i,j,k,l)$ pour obtenir des renseignements très fins sur le dénominateur de la forme linéaire en 1 et $\zeta(2)$. Un bon choix des paramètres permet finalement d'obtenir une bonne mesure d'irrationalité pour $\zeta(2)$.

Rhin et Viola ont également formulé la conjecture suivante, qui impliquerait l'optimalité de leur méthode.

Conjecture 1 (Rhin-Viola)**.** *Soient $h, i, j, k, l, h', i', j', k', l'$ des entiers positifs.*
(i) Si $I(h,i,j,k,l) = I(h',i',j',k',l')$, alors il existe $\rho \in \mathbf{T}$ tel que $\rho(h) = h'$, $\rho(i) = i'$, $\rho(j) = j'$, $\rho(k) = k'$ et $\rho(l) = l'$.

[7] La formule de Koecher ne suffit pas à expliquer toutes les formules qu'ils obtiennent puisqu'elle ne génère qu'une seule identité de type Apéry pour chaque $\zeta(2s+1)$, que s soit pair ou impair.

(*ii*) *Supposons de plus que les entiers*

$$\begin{array}{lllll} j+k-h, & k+l-i, & l+h-j, & h+i-k, & i+j-l, \\ j'+k'-h', & k'+l'-i', & l'+h'-j', & h'+i'-k', & i'+j'-l' \end{array}$$

soient tous positifs. Si $I(h,i,j,k,l)/I(h',i',j',k',l') \in \mathbf{Q}$*, alors il existe* $\rho \in \mathbf{\Phi}$ *tel que* $\rho(h) = h', \rho(i) = i', \rho(j) = j', \rho(k) = k'$ *et* $\rho(l) = l'$*.*

Ici, $\mathbf{T}$ et $\mathbf{\Phi}$ désignent deux sous-groupes (qu'il est inutile de décrire) du groupe des permutations de l'ensemble $\{h, i, j, k, l, j+k-h, k+l-i, l+h-j, h+i-k, i+j-l\}$ qui ne changent pas la valeur de $I(h,i,j,k,l)/(h!i!j!k!l!)$.

Or cette conjecture est fausse, comme l'a montré Sato dans [77] en produisant six contre-exemples (apparemment par inspection numérique), dont le plus simple suffit à infirmer (*i*) et (*ii*) :

$$I(1,1,1,1,1) = 5 - 3\zeta(2) = I(3,1,1,2,0). \tag{2.7}$$

Deux problèmes intéressants consistent 1°) à démontrer (2.7) et les autres contre-exemples de Sato par des moyens purement hypergéométriques et 2°) à décider s'il existe une famille infinie de contre-exemples (et si oui, donner une telle famille). Dans un travail en collaboration avec Krattenthaler [50], nous avons pu répondre complètement à ces deux questions et j'explique maintenant comment. On peut montrer que

$$I(h,i,j,k,l) = \frac{h!i!j!k!}{(h+i+1)!(k+j+1)!}\,{}_3F_2\left[\begin{matrix} h+1, k+1, i+j-l+1 \\ h+i+2, k+j+2 \end{matrix}\right]$$

et, sous cette forme, le groupe de permutations des paramètres se révèle très classique puisqu'il est une expression synthétique des 120 relations entre ${}_3F_2$ déterminées par Thomae [84] en 1879. L'interprétation en terme de groupe est due à Hardy [38] et elle prend la très jolie forme suivante, obtenue dans [87, Section V, Proposition 5, $q \to 1$].

Théorème 10 (Hardy)**.** *Soit* $s = s(x_1x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5$*. La fonction*

$$\frac{1}{\Gamma(s)\Gamma(2x_4)\Gamma(2x_5)}\,{}_3F_2\left[\begin{matrix} 2x_1 - s, 2x_2 - s, 2x_3 - s \\ 2x_4, \quad 2x_5 \end{matrix}\right]$$

est une fonction symétrique de ses cinq variables x_1, x_2, x_3, x_4, x_5*.*

Le point (*ii*) de la conjecture de Rhin et Viola revient alors à l'affirmation suivante :

S'il existe une relation de dépendance linéaire sur $\mathbf{Q}$ *entre deux séries* ${}_3F_2$ *convergentes en* $z = 1$*, à paramètres entiers et dont les valeurs sont irrationnelles, alors cette relation découle de l'une des* 120 *relations de Thomae.*

Le contre-exemple (2.7) de Sato anéantit cet espoir. Il peut s'écrire (après avoir appliqué des transformations de Thomae aux deux membres) sous une forme plus parlante :

$${}_3F_2\left[\begin{matrix} 2,2,2 \\ 4,4 \end{matrix}\right] = 2\,{}_3F_2\left[\begin{matrix} 2,1,1 \\ 4,4 \end{matrix}\right]. \tag{2.8}$$

Une réécriture similaire des autres relations de Sato nous a alors mis sur la voie des deux identités suivantes, que l'on démontre, pour l'une, à l'aide d'une identité hypergéométrique entre une ${}_3F_2$ et une ${}_7F_6$ par un jeu de va et vient et, pour l'autre, par des relations de contiguïté appliquées successivement.

Théorème 11.
(i) *Soient* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{C}$ *tels que* $\mathrm{Re}(2\alpha+\beta+1) > 0$, $\mathrm{Re}(2\beta+\alpha+1) > 0$ *et* $\mathrm{Re}(2\alpha+2\beta-\gamma) > 0$. *Alors*

$$ {}_3F_2\left[\begin{matrix} \alpha+1, & \beta+1, & \gamma \\ 2\alpha+\beta+1, & 2\beta+\alpha+1 & \end{matrix}\right] = \frac{2(\alpha+\beta)}{2(\alpha+\beta)-\gamma}\, {}_3F_2\left[\begin{matrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ 2\alpha+\beta+1, & 2\beta+\alpha+1 & \end{matrix}\right]. \tag{2.9}$$

(ii) *Soit* $\alpha \in \mathbf{C}$ *tel que ni* α^2+2 *ni* $\alpha^2+\alpha+1$ *ne soient des entiers négatifs. Alors*

$$ {}_3F_2\left[\begin{matrix} \alpha^2, \alpha^2, \alpha+1 \\ \alpha^2+1, \alpha^2+\alpha+1 \end{matrix}\right] = \frac{\alpha^3+1}{\alpha^2+1}\, {}_3F_2\left[\begin{matrix} \alpha^2+1, \alpha^2, \alpha \\ \alpha^2+2, \alpha^2+\alpha \end{matrix}\right]. \tag{2.10}$$

Ces deux relations n'ont apparemment jamais été explicitées dans la littérature. On en déduit les conséquences suivantes, qui répondent aux questions 1°) et 2°) posées ci-dessus.

Théorème 12.
(i) *Les six contre-exemples de Sato s'expliquent par des moyens purement hypergéométriques, c'est-à-dire qu'il existe des identités hypergéométriques générales dont ils sont des cas particuliers.*
(ii) *Pour chaque entier* $\alpha \geq 1$, *l'équation*

$$ I(2\alpha-1, 2\alpha-1, \alpha, 2\alpha-1, \alpha) = I(2\alpha+1, 2\alpha-1, \alpha, 2\alpha, \alpha-1) \tag{2.11}$$

fournit un contre-exemple aux cas (i) *et* (ii) *de la conjecture* 1.

Cinq des six contre-exemples de Sato sont expliqués par la relation (2.9) tandis que le dernier l'est par la relation (2.10). On obtient (2.11) en prenant $\alpha = \beta$ entier et $\gamma = \alpha+\beta$ dans (2.9) : l'identité (2.8) en est alors le cas particulier $\alpha = 1$. Comme $I(2\alpha-1, 2\alpha-1, \alpha, 2\alpha-1, \alpha)$ tend vers 0 quand α tend vers l'infini, on produit de cette façon une infinité de contre-exemples à la conjecture de Rhin et Viola.

On peut bien sûr se demander si l'on peut exploiter d'un façon ou d'une autre les deux identités exotiques (2.9) et (2.10) (ou d'autres semblables s'il en existe) pour améliorer la mesure d'irrationalité de $\zeta(2)$.

3 Résultats diophantiens

La méthode hypergéométrique s'applique à d'autres fonctions que la fonction zêta et je décris ci-dessous les résultats obtenus.

3.1 Valeurs des polylogarithmes

La nature arithmétiques des valeurs prises par les polylogarithmes a beaucoup été étudiée, en particulier celles en des points rationnels. Parmi d'autres, on peut citer les résultats de Maier [54], Nikishin [60], Alladi et Robinson [2], Chudnovski [21], Hata [40], qui ont la particularité ([8]) d'être tous de la forme suivante :

Étant donné un entier $s \geq 1$*, il existe un réel* $0 < A(s) \leq 1$ *tel que si* $\alpha \in \mathbf{Q}$ *et* $0 < |\alpha| < A(s)$*, alors les nombres* $1, \mathrm{Li}_1(\alpha), \ldots, \mathrm{Li}_s(\alpha)$ *sont linéairement indépendants sur* $\mathbf{Q}$.

Dans la pratique, le nombre $A(s)$ est une fonction strictement décroissante de s et ces méthodes ne peuvent donc pas nous éclairer sur l'éventuelle indépendance linéaire sur $\mathbf{Q}$ des nombres $1, \zeta(2), \zeta(3), \ldots, \zeta(s)$ pour tout $s \geq 1$. Par exemple, le résultat le plus fin actuellement connu sur les valeurs du dilogarithme en certains rationnels est le suivant.

Théorème 13 (Hata). *Si* p *est un entier* ≥ 7 *ou* ≤ -6*, alors le nombre* $\mathrm{Li}_2(1/p)$ *est irrationnel et on peut en donner une mesure d'irrationalité effective.*

Dans tous ces résultats, l'entier s est fixé et on fait varier α : dans ma thèse de doctorat, j'ai abordé la question sous l'angle opposé, en fixant α et en faisant varier s.

Théorème 14. *Soit* α *un rationnel non nul fixé de l'intervalle* $]-1, 1[$*. L'ensemble*

$$\{1, \mathrm{Li}_1(\alpha), \mathrm{Li}_2(\alpha), \mathrm{Li}_3(\alpha), \ldots\}$$

contient une infinité d'éléments linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}$.

Le résultat est en fait plus précis car exactement de la forme de celle du Théorème 2 énoncé au sous-paragraphe 1.1. Il en existe également des versions localisées, en particulier pour $\alpha = 1/2$, qui est une valeur intéressante puisque l'on a les identités (voir [53])

$$\mathrm{Li}_2(1/2) = \frac{1}{2}\zeta(2) - \frac{1}{2}\log^2(2) \;\text{ et }\; \mathrm{Li}_3(1/2) = \frac{7}{8}\zeta(3) - \frac{1}{2}\zeta(2)\log(2) + \frac{1}{6}\log^3(2).$$

Théorème 15 (Hessami-Pilerhood [45]). *Il existe au moins un irrationnel parmi les nombres* $\mathrm{Li}_2(1/2)$*,* $\mathrm{Li}_3(1/2)$ *et* $\mathrm{Li}_4(1/2)$.

[8] Ceci est conséquence du fait que les polylogarithmes sont des G-fonctions au sens de Siegel, fonctions pour lesquelles la théorie diophantienne est loin d'être complète (voir [30]).

Dans un travail en commun avec Fischler [29], nous avons étendu le Théorème 14 et donné une variante du Théorème 15.

Théorème 16.
(i) Soit α un rationnel non nul fixé de l'intervalle $]0,1[$*. Pour tous réels U, V fixés, avec $(U,V) \neq (0,0)$, l'ensemble*

$$\left\{V,\, U\log(\alpha) + V\operatorname{Li}_1(\alpha),\, \frac{U}{2!}\log^2(\alpha) + V\operatorname{Li}_2(\alpha),\, \frac{U}{3!}\log^3(\alpha) + V\operatorname{Li}_3(\alpha), \ldots\right\}$$

contient une infinité d'éléments linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}$.
(ii) Il existe au moins un irrationnel parmi les nombres

$$\operatorname{Li}_2(1/2) + \log^2(2)\,, \quad \operatorname{Li}_3(1/2) - \frac{1}{2}\log^3(2)\,, \quad \operatorname{Li}_4(1/2) + \frac{1}{6}\log^4(2).$$

Pour démontrer aussi bien (i) que (ii), on construit explicitement deux formes linéaires en, d'un côté, des puissances de logarithmes et, de l'autre côté, des polylogarithmes : pour tous entiers $A \geq 1$, $n \geq 0$ et $\rho \geq 0$ fixés, il existe des polynômes $P_{j,A,n,\rho}(z) \in \mathbf{Z}[z]$ de degré au plus n tels que l'on ait

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-\rho)_\rho}{(k)_{n+1}^A}\, z^{-k} = P_{0,A,n,\rho}(z) + \sum_{j=1}^{A} P_{j,A,n,\rho}(z)\operatorname{Li}_j(1/z) \quad \text{et}$$

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathscr{C}} \frac{(s-\rho)_\rho}{(s)_{n+1}^A}\, z^{-s}\mathrm{d}s = \sum_{j=1}^{A}(-1)^{j-1}P_{j,A,n,\rho}(z)\frac{\log^{j-1}(z)}{(j-1)!},$$

où le logarithme est défini avec sa détermination principale et $\mathscr{C}$ est une courbe entourant les points $-n, -n+1, \ldots, 0$ dans le sens direct. Le succès de notre méthode repose entièrement sur le fait qu'il s'agit d'approximations *simultanées*, c'est-à-dire que les deux formes linéaires ont les *mêmes* coefficients polynomiaux $P_{j,A,n,\rho}(z)$. Le point (i) contient également la transcendance de $\log(\alpha)$ et, dans ce cas, les estimations analytiques employées sont essentiellement celles de Reyssat [63]. L'origine fonctionnelle de ces approximations est expliquée au sous-paragraphe 4.1.

Pour obtenir l'irrationalité de davantage des nombres $\operatorname{Li}_s(\alpha)$, il serait sans doute très fructueux de combiner l'approche par les séries ci-dessus avec la méthode des groupes d'invariance d'intégrales de type Rhin-Viola, évoquée au paragraphe 2.3, afin de raffiner de façon optimale les estimations arithmétiques des dénominateurs de formes linéaires en polylogarithmes. Dans cette direction, Rhin et Viola ont d'ailleurs annoncé qu'ils ont légèrement amélioré le résultat de Hata en remplaçant la condition $p \geq 7$ par $p \geq 6$, grâce à leur méthode de groupe de permutations agissant sur une intégrale [66].

Il serait également intéressant de généraliser les résultats mentionnés ci-dessus au cas où α est algébrique complexe car les valeurs prises par les polylogarithmes aux racines de l'unité font l'objet d'une grande attention (par exemple, il existe une conjecture connexe due à Milnor sur les relations de dépendance linéaire des valeurs du dilogarithme [56, p. 300].)

3.2 Un q-analogue de la fonction zêta

Dans un travail en commun avec Krattenthaler et Zudilin [51], nous nous sommes intéressés aux propriétés arithmétiques de q-analogues des valeurs de fonction zêta de Riemann. Il existe plusieurs tels analogues mais le plus naturel semble être donné par les séries $\zeta_q(s)$, où $s \geq 1$ et q est un nombre complexe tel que $|q| < 1$, définies par

$$\zeta_q(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_{s-1}(k)\, q^k = \sum_{m=1}^{\infty} m^{s-1} \frac{q^m}{1-q^m},$$

avec $\sigma_{s-1}(k) = \sum_{d|k} d^{s-1}$. Ces q-analogues normalisés de $\zeta(s)$ ont été considérés dans [43, 97], par exemple, où il est montré que

$$\lim_{q\to 1} (1-q)^s \zeta_q(s) = (s-1)! \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} = (s-1)!\, \zeta(s).$$

En adaptant la méthode hypergéométrique, nous avons pu montrer le théorème suivant.

Théorème 17. *Fixons $q \neq \pm 1$ tel que $1/q \in \mathbf{Z}$. Pour tout entier $A \geq 2$ pair, on a*

$$\dim_{\mathbf{Q}}\big(\mathbf{Q} + \mathbf{Q}\,\zeta_q(3) + \mathbf{Q}\,\zeta_q(5) + \cdots + \mathbf{Q}\,\zeta_q(A-1)\big) \geq \frac{\pi + o(1)}{2\sqrt{\pi^2+12}}\sqrt{A}.$$

On obtient également une minoration totalement similaire de la dimension de l'espace engendré sur $\mathbf{Q}$ par les valeurs de $\zeta_q(s)$ aux entiers pairs : cette minoration possède une intéressante traduction en terme des séries d'Eisenstein $E_{2s}(q)$, définies pour tout entier $s \geq 1$ par le développement en série de Fourier

$$E_{2s}(q) = 1 - \frac{4s}{B_{2s}} \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_{2s-1}(k)\, q^k.$$

Théorème 18. *Pour tout $q \neq \pm 1$ tel que $1/q \in \mathbf{Z}$, au moins un des deux nombres $E_4(q)$ et $E_6(q)$ est transcendant sur $\mathbf{Q}$.*

Ce dernier résultat n'est pas nouveau puisque Bertrand [13] a montré que « *pour tout $q \in \mathbf{C}$ tel que $0 < |q| < 1$, au moins un des nombres $E_4(q)$ et $E_6(q)$ est transcendant sur $\mathbf{Q}$* ». Cependant, la démonstration du Théorème 18 est basée sur une fonction auxiliaire totalement explicite (la série $S_n(z;q)$ ci-dessous) et pas sur celles, beaucoup moins explicites, que l'on peut construire avec les outils diophantiens usuels tels que le lemme de Siegel ou les déterminants d'interpolation de Laurent.

A contrario, le résultat pour les valeurs de $\zeta_q(s)$ aux entiers impairs est nouveau et ne possède aucune interprétation immédiate en terme de formes modulaires (bien qu'il soit tout de même possible de les lier aux périodes de séries d'Eisenstein non-holomorphes). Du point de vue diophantien, si l'irrationalité de $\zeta_q(1)$ était déjà connue pour diverses valeurs de q (voir les références citées dans [51]), celle de $\zeta_q(2\ell+1)$ (pour $\ell \geq 1$) ne l'était pour aucune valeur de q. En utilisant les estimations précises utilisées pour prouver le Théorème 17, nous avons pu démontrer le résultat suivant.

Théorème 19. *Pour tout $q \neq \pm 1$ tel que $1/q \in \mathbf{Z}$, au moins un des cinq nombres*

$$\zeta_q(3),\ \zeta_q(5),\ \zeta_q(7),\ \zeta_q(9),\ \zeta_q(11)$$

est irrationnel.

Pour montrer l'ensemble de ces résultats, nous avons adapté la méthode des séries hypergéométriques classiques au cas des séries hypergéométriques basiques, qui en sont les q-analogues. Plus précisément, soient A, n, r des entiers positifs, avec $0 \leq r \leq A/2$ et A pair. On définit les factorielles q-décalées par $(\alpha; q)_m = (1-\alpha)(1-\alpha q)\cdots(1-\alpha q^{m-1})$, avec la convention usuelle que les produits vides pour $m = 0$ valent 1. On pose alors

$$S_n(z;q) = (q;q)_n^{A-2r} \sum_{k=1}^{\infty} q^k \frac{(q^{k-rn};q)_{rn}\,(q^{k+n+1};q)_{rn}}{(q^k;q)_{n+1}^A}\, q^{(k-1/2)(A-2r)n/2} z^{-k},$$

avec $|z| \geq 1$: cette série est très bien équilibrée, au sens des séries basiques et on retombe d'ailleurs essentiellement sur la série (1.3) lorsque l'on fait convenablement tendre q vers 1. Il n'est donc pas surprenant que l'on puisse montrer l'existence d'une famille de polynômes $P_{j,n}(z;q) \in \mathbf{C}(q)[z]$, de degré au plus n, tels que

$$S_n(z;q) = P_{0,n}(z;q) + \sum_{j=1}^{A} P_{j,n}(z;q)\,\mathrm{Li}_j(1/z;q) \tag{3.1}$$

et vérifiant la relation de réciprocité $z^n q^{-n} P_{s,n}(1/z;1/q) = P_{s,n}(z;q)$. Ici, on a introduit les fonctions q-polylogarithmes définies, pour tout entier $s \geq 1$, par

$$\mathrm{Li}_s(z;q) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{(1-q^k)^s}\, z^k,$$

où z et q désignent des nombres complexes tels que $|q| < 1$ et $|zq| < 1$. On conclut de la même façon en cherchant à appliquer le critère de Nesterenko : la principale difficulté est de trouver un bon dénominateur commun aux $P_{j,n}(z;q)$.

Nous pensons que toutes nos estimations (arithmétiques et analytiques) nécessaires à l'étude la série $S_n(z;q)$ sont optimales. Néanmoins, il n'est pas impossible que l'on puisse démontrer qu'au moins un des nombres $\zeta_q(3)$, $\zeta_q(5)$, $\zeta_q(7)$, $\zeta_q(9)$ est irrationnel en utilisant une série légèrement différente de notre série $S_n(z;q)$, à condition que l'on puisse démontrer une certaine conjecture des dénominateurs pour cette nouvelle série. Les méthodes employées pour prouver la conjecture des dénominateurs dans le cas classique devraient certainement s'adapter, puisque l'identité de Andrews a été initialement démontrée dans le cas basique. Nous envisageons également de revenir sur ce point ultérieurement.

Enfin, ces fonctions $\zeta_q(s)$ soulèvent un certain nombre de problèmes qu'il serait intéressant de considérer :

(a) Poursuivant l'analogie entre les fonctions $\zeta(s)$ et $\zeta_q(s)$, Zudilin a conjecturé que les fonctions $\zeta_q(2), \zeta_q(4), \zeta_q(6), \zeta_q(3), \zeta_q(5), \zeta_q(7)$, etc, sont algébriquement indépendantes sur

$\mathbf{C}(q)$, ce qui est l'analogue fonctionnel de la conjecture que $\pi, \zeta(3), \zeta(5), \zeta(7)$, etc, sont algébriquement indépendants sur $\mathbf{Q}$. On peut espérer que le problème fonctionnel soit moins difficile ([9]).

(b) Un résultat de Ramanujan affirme que l'algèbre différentielle engendrée sur $\mathbf{Q}$ par les fonctions $\big(\zeta_q(2s)\big)_{s\in\mathbf{N}}$ coïncide avec $\mathbf{Q}[E_2, E_4, E_6]$, ce qui a été exploité par Nesterenko dans sa preuve de l'indépendance algébrique sur $\mathbf{Q}$ de $E_2(q)$, $E_4(q)$ et $E_6(q)$ pour tout q algébrique vérifiant $0 < |q| < 1$. Il serait intéressant d'obtenir un résultat de transcendance pour les valeurs des fonctions $\big(\zeta_q(2s+1)\big)_{s\in\mathbf{N}}$ par des méthodes similaires, à cette importante différence près que l'on ne connaît pas de système différentiel fini ou infini vérifié par ces fonctions $\zeta_q(s)$.

3.3 Indépendance des valeurs de la fonction beta

Une autre application de la méthode hypergéométrique a été développée en commun avec Zudilin dans [76] et concerne les valeurs de la série de Dirichlet (qui converge pour tout complexe s telle que $\mathrm{Re}(s) > 0$)

$$L(\chi, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s}.$$

Pour simplifier et accentuer l'analogie avec la fonction zêta, nous avons posé $\beta(s) = L(\chi, s)$. Euler a montré que, pour $s \geq 1$ impair, $\beta(s)$ est un multiple rationnel de π^s, plus précisément

$$\beta(2n+1) = \frac{(-1)^n E_{2n}}{2^{2n+2}(2n)!}\,\pi^{2n+1} \qquad \text{for } n = 0, 1, 2, \ldots$$

(Ici, les entiers E_{2n} sont les nombres d'Euler et n'ont aucun rapport avec les séries d'Eisenstein du sous-paragraphe précédent.) Les nombres $\beta(2n+1)$ sont donc transcendants sur $\mathbf{Q}$.

Pour s pair, aucune telle formule n'est connue et la nature de $\beta(s)$ est inconnue. La situation pour la fonction beta semble donc le miroir de celle pour la fonction zêta de Riemann, ce qui n'est pas complètement exact puisque l'équivalent du théorème d'Apéry pour la constante de Catalan

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} = \beta(2)$$

n'a pas été prouvé. Nous avons pu adapter la méthode hypergéométrique pour obtenir les deux résultats suivants.

[9]Zudilin a montré que chacune des fonctions $\zeta_q(s)$, s fixé, est transcendante sur $\mathbf{C}(q)$ (voir [98]). Il m'a également informé que l'un de ses étudiants a démontré que les fonctions $\zeta_q(2)$, $\zeta_q(3)$, $\zeta_q(4)$, $\zeta_q(5)$, $\zeta_q(6), \zeta_q(7)$, etc, sont *linéairement* indépendantes sur $\mathbf{C}(q)$, ce qui est un autre pas dans la bonne direction.

Théorème 20.
(i) Pour tout entier pair $A \geq 2$, on a

$$\dim_{\mathbf{Q}}(\mathbf{Q} + \mathbf{Q}\beta(2) + \mathbf{Q}\beta(4) + \cdots + \mathbf{Q}\beta(A)) \geq \frac{1+o(1)}{2+\log(2)}\,\log(A).$$

(ii) Au moins un de sept nombres

$$\beta(2),\, \beta(4),\, \beta(6),\, \beta(8),\, \beta(10),\, \beta(12),\, \beta(14)$$

est irrationel.

Les démonstrations utilisent des séries du type

$$\overline{S}_{n,A,B,C,r}\left((-1)^A\right) \;=\; n!^{A-2Br}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{C!}\frac{\partial^C}{\partial k^C}\left(\left(k+\frac{n-1}{2}\right)\frac{(k-rn)_{rn}^B(k+n)_{rn}^B}{\left(k-\frac{1}{2}\right)_{n+1}^A}\right)(-1)^{kA}$$

qui sont très bien équilibrées. La méthode exposée au sous-paragraphe 1.1 s'adapte sans problème (autre que technique, en raison du $1/2$ au dénominateur qui complique un peu les estimations) et on construit des formes linéaires dichotomiques en les valeurs de β aux entiers :

$$\overline{S}_{n,A,B,C,r}\left((-1)^A\right) = \mathbf{p}_{0,C,n}((-1)^A) + \sum_{\substack{j=2\\ j\equiv A-1[2]}}^{A}\binom{C+j-1}{j-1}\mathbf{p}_{j,n}\left((-1)^A\right)\beta(C+j).$$

Comme dans le cas de la fonction zêta, une conjecture des dénominateurs peut être formulée : les méthodes développées dans [47] s'appliquent également pour la démontrer, ce qui fera l'objet d'un travail dans le futur, dont nous espérons qu'il améliorera le point (ii) du Théorème 20. Dans le cas le plus simple de la construction précédente, il existe des rationnels $\mathbf{e}_n$ et $\mathbf{f}_n$ tels que $2^{4n}\mathrm{d}_{2n}\mathbf{e}_n$ et $2^{4n}\mathrm{d}_{2n}^3\mathbf{f}_n$ sont entiers et

$$\overline{S}_{n,3,1,0,1}\,(-1) = n!\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(k+\frac{n-1}{2}\right)\frac{(k-n)_n(k+n)_n}{\left(k-\frac{1}{2}\right)_{n+1}^3} = \mathbf{e}_nG - \mathbf{f}_n.$$

Dans ce cas particulier, la conjecture des dénominateurs affirme que les nombres $2^{4n}\mathbf{e}_n$ et $2^{4n}\mathrm{d}_{2n}^2\mathbf{f}_n$ sont déjà entiers. Bien que cette conjecture ne suffise pas à montrer l'irrationalité de G, elle a suscité des travaux de Zudilin (qui l'a montrée partiellement, voir [96]), puis je l'ai finalement démontrée totalement par une méthode très indirecte utilisant l'approximation de Padé, que j'exposerai au paragraphe 4.3.

4 L'approximation de Padé

L'approximation de Padé consiste à approcher de façon optimale une série formelle $F \in \mathbf{C}[[z]]$ par des fractions rationnelles de $\mathbf{C}(z)$. Plus précisément, pour tous entier $m, n \geq 0$, un simple exercice d'algèbre linéaire montre qu'il existe des polynômes P et Q, de degré respectifs au plus m et n, tels que l'ordre en 0 de la série formelle $Q(z)F(z) - P(z)$ soit au moins $m+n+1$. On ne peut en général pas obtenir mieux que $m+n+1$, ce qui est le sens du mot « optimale » ci-dessus ([10]). La fraction $P(z)/Q(z)$, qui est unique et notée $[m/n]_F(z)$, est donc une approximation rationnelle de la série $F(z)$: si celle-ci a un rayon de convergence R non nul, on peut espérer que, pour un rationnel x tel que $|x| < R$, la différence $F(x) - P(x)/Q(x)$ soit très petite sans que n et m ne soient trop grands.

Dans de très nombreuses situations, on peut calculer explicitement certains approximants de Padé de fonctions intéressantes, telles que $\exp(z)$ ou $\log(1-z)$, et en déduire des résultats d'irrationalité pour les valeurs prises par ces fonctions, au moyen du critère suivant : « Soit un réel x tel qu'il existe deux suites d'entiers $p_n(x)$ et $q_n(x)$ vérifiant $0 \neq q_n(x)F(x) - p_n(x) = o(1)$. Alors $F(x)$ est irrationnel. »

Ce procédé se généralise de deux manières différentes au cas de l'approximation simultanée de plusieurs séries formelles $F_1, \ldots, F_r \in \mathbf{C}[[z]]$:

(i) On cherche des polynômes $P_1, P_2 \ldots, P_r \in \mathbf{C}[z]$, de degré respectifs $d_1, \ldots, d_r$, tels que l'ordre en $z = 0$ de la série formelle

$$P_1(z)F_1(z) + P_2(z)F_2(z) + \cdots + P_r(z)F_f(z)$$

soit au moins $(d_1 + d_2 \cdots + d_r) + r - 1$. On parle d'approximants de Padé de type I ou de Hermite-Padé (voir pourquoi ci-dessous).

(ii) On cherche des polynômes $Q, P_1, P_2 \ldots, P_r \in \mathbf{C}[z]$, de degré respectifs $d_1 + \cdots + d_r, D_1 - d_1, D_2 - d_2, \ldots, D_r - d_r$, tels que chacune des séries formelles

$$Q(z) - P_j(z)F_j(z), \quad j = 1, \ldots, r$$

ait un ordre en $z = 0$ au moins égal à $D_j + 1$. On parle dans ce cas d'approximants de Padé de type II. Voir [34] pour les références sur les diverses sortes d'approximants de Padé.

Étant donné une famille de séries formelles, il peut être plus facile de calculer l'un ou l'autre type d'approximants ([11]) mais il est également fréquent que l'on puisse expliciter les deux types. Les deux peuvent d'ailleurs servir pour obtenir des résultats diophantiens. Hermite a ainsi construit le premier exemple explicite d'approximation de type II pour la famille $\big(\exp(\omega_j)\big)_{j=1,\ldots,r}$, où les w_j sont des complexes distincts, et en a déduit la transcendance du nombre $e = \exp(1)$; Mahler [55] a montré comment obtenir le même résultat

[10] On peut noter l'analogie avec le développement en fraction continue d'un réel lorsque $m = n$.

[11] Numériquement, on peut toujours calculer les deux types d'approximants de Padé pour des séries formelles données puisqu'il ne s'agit somme toute que de résoudre un système linéaire. Pour les applications diophantiennes, l'intérêt est de pouvoir le faire explicitement : si c'est le cas, on obtient bien souvent des résultats plus fins que ceux obtenus par les méthodes transcendantes basées sur le lemme de Siegel, qui sont néanmoins beaucoup souples d'utilisation.

avec les formules, également données par Hermite, pour le type I. Le Théorème 13 (mentionné au sous-paragraphe 3.1) est obtenu par la construction d'approximants de Padé de type I pour les fonctions $\log(1-z)$ et $\mathrm{Li}_2(z)$ mais il en existe des versions obtenus par l'approximation de type I pour les fonctions 1, $\log(1-z)$ et $\mathrm{Li}_2(z)$.

On peut aussi chercher la solution de problèmes de type Padé « mixte », où l'on mélange des conditions de type I à des conditions de type II, voire en plusieurs points simultanément ($0, 1, \infty$ par exemple) : voir le sous-paragraphe 4.1 pour de telles situations.

4.1 Une généralisation de travaux de Beukers

Toutes les démonstrations d'irrationalité des valeurs des fonctions $\zeta(s)$, $\zeta_q(s)$, $\beta(s)$ par des méthodes hypergéométriques peuvent paraître mystérieuses et magiques, puisqu'elles diffèrent sensiblement du schéma traditionnel des preuves de transcendance (contruction d'une fonction auxiliaire par le lemme de Siegel ou les déterminants d'interpolation, lemme d'interpolation ou de zéros, inégalité de Liouville, etc). Néanmoins, il est possible de les formaliser. En effet, dans [15] et [16], Beukers est parvenu à replacer les résultats d'Apéry dans le cadre plus connu des approximants de Padé des polylogarithmes. Il considère les deux problèmes suivants : déterminer pour tout entier $n \geq 0$ des polynômes a, b, c de degré au plus n tels que

$$\begin{cases} S(z) = a(z)\,\mathrm{Li}_2(1/z) + b(z)\,\mathrm{Li}_1(1/z) + c(z) = \mathcal{O}(z^{-n-1}) \\ R(z) = a(z)\log(z) - b(z) = \mathcal{O}\big((1-z)^{n+1}\big) \end{cases} \tag{4.1}$$

et des polynômes A, B, C et D de degré au plus n tels que ([12])

$$\begin{cases} U(z) = A(z)\,\mathrm{Li}_2(1/z) + B(z)\,\mathrm{Li}_1(1/z) + C(z) = \mathcal{O}(z^{-n-1}) \\ V(z) = 2A(z)\,\mathrm{Li}_3(1/z) + B(z)\,\mathrm{Li}_2(1/z) + D(z) = \mathcal{O}(z^{-n-1}) \\ W(z) = A(z)\log(z) - B(z) = \mathcal{O}(1-z)\ . \end{cases} \tag{4.2}$$

(Étant donné une fonction $F(w)$ développable en série de Laurent $F(w) = \sum_{n=-m}^{+\infty} a_n w^n$ au voisinage de $w=0$ (avec $w = z$, $1/z$ ou $1-z$ dans la suite), on note $F(w) = \mathcal{O}(w^{N+1})$ si $a_{-m} = a_{-m+1} = \cdots = a_N = 0$. Il s'agit d'une majoration quand z tend vers 0, l'infini ou 1, suivant la valeur de w). Dans [16], Beukers indique que la solution de (4.1) est unique (à une constante multiplicative près), donnée par une certaine intégrale que l'on transforme facilement en la série hypergéométrique (quasi équilibrée) suivante :

$$S(z) = n! \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-n)_n}{(k)_{n+1}^2}\, z^{-k}.$$

Il montre aussi dans [15] que (4.2) a une solution unique (à une constante multiplicative près) et son argument donne immédiatement :

$$V(z) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\left(\frac{(k-n)_n^2}{(k)_{n+1}^2}\right) z^{-k}\ .$$

[12]Beukers n'énonce pas la condition sur $W(z)$ mais la condition équivalente $B(1) = 0$.

On reconnait en $S(1)$ et $V(1)$ les deux séries mentionnées en (1.2) et dont on déduit les approximations d'Apéry pour $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$.

La question se pose donc d'expliciter si possible des problèmes de Padé tels que (4.1) et (4.2) et dont la solution ferait intervenir les diverses séries hypergéométriques qui servent à démontrer les résultats récents sur l'irrationalité des valeurs de zêta. Dans l'article [29] avec Fischler déjà mentionné au paragraphe 3.1, nous avons répondu positivement à cette question en construisant et résolvant des problèmes de Padé très généraux, sur lesquels se lisent les propriétés de réciprocité des solutions dans le cas de séries (très) bien équilibrées telles que (1.3).

Le bon problème à considérer s'est avéré être le suivant. Considérons des entiers $n \geq 0$, $A \geq 1$ et $\rho, \sigma \geq 0$ vérifiant $\rho + \sigma \leq A(n+1) - 1$ et que nous supposons fixés. Nous voulons déterminer des polynômes P_0, $\overline{P}_0$ et P_j (pour $1 \leq j \leq A$) de degré au plus n et des fonctions S, $\overline{S}$, R (qui dépendent de n, A, ρ, σ) tels que

$$\begin{cases} S(z) = P_0(z) + \displaystyle\sum_{j=1}^{A} P_j(z)\,\mathrm{Li}_j(1/z) = \mathcal{O}(z^{-\rho-1}) \\ \overline{S}(z) = \overline{P}_0(z) + \displaystyle\sum_{j=1}^{A} (-1)^j P_j(z)\,\mathrm{Li}_j(z) = \mathcal{O}(z^{n+\sigma+1}) \\ R(z) = \displaystyle\sum_{j=1}^{A} (-1)^{j-1} P_j(z) \frac{\log^{j-1}(z)}{(j-1)!} = \mathcal{O}\big((1-z)^{A(n+1)-\rho-\sigma-1}\big)\,. \end{cases} \tag{4.3}$$

(La fonction $\log(z)$ est définie avec sa détermination principale.)

On remarque que les deux paramètres ρ et σ permettent d'interpoler entre des problèmes d'approximation de Padé au voisinage de 0, 1 et ∞. On peut également noter que le problème (4.1) de Beukers est contenu dans ce nouveau problème, que le résultat suivant résout totalement.

Théorème 21. *À constante multiplicative près, le problème de Padé* (4.3) *a une unique solution et elle vérifie pour tout $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z| \geq 1$,*

$$S(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-\rho)_\rho (k+n+1)_\sigma}{(k)_{n+1}^A} z^{-k}, \tag{4.4}$$

$$P_A(z) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{kA} \frac{(-k-\rho)_\rho (n-k+1)_\sigma}{k!^A (n-k)!^A} z^k$$

et, si $z \notin]-\infty, 0]$,

$$R(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathscr{C}} \frac{(s-\rho)_\rho (s+n+1)_\sigma}{(s)_{n+1}^A} z^{-s} \mathrm{d}s$$

où $\mathscr{C}$ est une courbe entourant les points $-n, -n+1, \ldots, 0$ dans le sens direct.

Ce résultat concerne des séries quasi équilibrées ; dans le cas particulier $\rho = \sigma$ elles sont bien équilibrées. En effet, on peut écrire (4.4) sous la forme :

$$S(z) = \frac{\rho!^{A+1}(\rho+\sigma+n+1)!}{(\rho+n+1)!^{A+1} z^{\rho+1}} {}_{A+2}F_{A+1}\left[\begin{matrix}\rho+\sigma+n+2, \rho+1, \ldots, \rho+1 \\ \rho+n+2, \ldots, \rho+n+2\end{matrix} ; z^{-1}\right].$$

On reconnaît les formules mentionnées au sous-paragraphe 3.1 qui servent à montrer le Théorème 16.

Nous avons également obtenus les solutions de deux problèmes encore plus généraux, ce qui permet en théorie de justifier par l'approximation de Padé essentiellement tous les résultats connus d'irrationalité concernant la fonction zêta et les polylogarithmes. Voici l'un de ces résultats, qui non seulement interpole entre des conditions de Padé au voisinage de 0, 1 et ∞ mais également entre des approximations de type I et de type II.

On garde les mêmes notations que précédemment et on suppose que $M = L$, $\sigma = \rho$ et $2L\rho \leq A(n+1) - 2$. On cherche des polynômes $P_{0,\ell}$, $\overline{P}_{0,\ell}$, P_j (pour $1 \leq j \leq A$ et $0 \leq \ell \leq L-1$) de degré au plus n et des fonctions S_ℓ, $\overline{S}_\ell$ et R (qui dépendent aussi de ρ, L, A et n) tels que l'on ait simultanément les $2L+2$ conditions suivantes (pour $\ell = 0, \ldots, L-1$) :

$$\begin{cases} S_\ell(z) = P_{0,\ell}(z) + \displaystyle\sum_{j=1}^{A} \binom{\ell+j-1}{j-1} P_j(z) \operatorname{Li}_{\ell+j}(1/z) = \mathrm{O}(z^{-\rho-1}) \\ \overline{S}_\ell(z) = \overline{P}_{0,\ell}(z) + \displaystyle\sum_{j=1}^{A} (-1)^j \binom{\ell+j-1}{j-1} P_j(z) \operatorname{Li}_{\ell+j}(z) = \mathrm{O}(z^{n+\sigma+1}) \\ R(z) = \displaystyle\sum_{j=1}^{A} (-1)^{j-1} P_j(z) \frac{\log^{j-1}(z)}{(j-1)!} = \mathrm{O}\big((1-z)^{A(n+1)-2L\rho-2}\big) \\ P_A((-1)^A) = 0\,. \end{cases} \tag{4.5}$$

La solution complète est donnée par les formules suivantes.

Théorème 22. *À une constante multiplicative près, le problème de Padé* (4.5) *a une unique solution et elle vérifie pour tout* $\ell = 0, \ldots, L-1$ *:*

$$S_\ell(z) = \frac{(-1)^\ell}{\ell!} \sum_{k=1}^{\iota} \frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}k^\ell} \left(\left(k + \frac{n}{2}\right) \frac{(k-\rho)_\rho^L (k+n+1)_\rho^L}{(k)_{n+1}^a} \right) z^{-k}$$

et

$$P_A(z) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{kA} \left(\frac{n}{2} - k\right) \frac{(-k-\rho)_\rho^L (n-k+1)_\rho^L}{k!^A (n-k)!^A} z^k\,.$$

De plus, pour tous $j = 1, \ldots, A$ *et* $\ell = 0, \ldots, L-1$*, on a*

$$z^n P_j(1/z) = (-1)^{a(n+1)+j+1} P_j(z) \;\text{ et }\; z^n \overline{S}_\ell(1/z) = (-1)^{A(n+1)+1} S_\ell(z).$$

Si l'on supprime la condition $P_A((-1)^A) = 0$ dans le problème (4.5), on obtient essentiellement les mêmes formules pour $S_\ell(z)$ et $P_A(z)$, en enlevant juste le facteur $(k + n/2)$. Ce cas englobe alors le problème (4.2) de Beukers.

4.2 Le cas des q-polylogarithmes

La question se pose naturellement d'étendre le Théorème 21 au cas des q-analogues de la fonction zêta, en particulier dans l'espoir d'obtenir de nouveaux résultats diophantiens. C'est ce que nous avons fait dans un travail [49] avec Krattenthaler. Une des difficultés a été de déterminer un q-analogue $\log_q(z)$ de la fonction $\log(z)$ adapté à la situation : dans notre contexte, la fonction $\log(z)/\log(q)$ s'est naturellement imposée dans ce rôle. Cet analogue, qui possède donc une monodromie non-triviale en 0, est un choix historiquement classique : voir [1]. Certaines théories géométriques récentes (étudiant l'analogie entre équations aux q-différences et équations différentielles) ont mis en avant un q-analogue différent du logarithme : par exemple, Sauloy [78] utilise la fonction $\ell_q(z) = z\theta'_q(z)/\theta_q(z)$ comme q-logarithme, avec $\theta_q(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}}(-1)^n q^{-n(n-1)/2}z^n$, qui est méromorphe sur $\mathbf{C}$ et dont les pôles confluent le long d'une spirale lorsque $q \to 1$.

Il nous a alors été possible de résoudre le problème de Padé suivant, qui est un parfait q-analogue du problème (4.3) dans le cas classique. Étant donné des entiers $A \geq 1$, $n \geq 0$, $\rho \geq 0$, $\sigma \geq 0$ et $\nu \geq 0$ tels que $\rho+\sigma+\nu+2 \leq A(n+1)$, on cherche à résoudre le problème d'approximations simultanées de Padé suivant : déterminer des polynômes (dépendants de A, n, ρ, σ et ν) $P_0(z;q)$, $\overline{P}_0(z;q)$ et $P_j(z;q)$ (pour $j = 1,\dots,A$) en la variable z, de degré au plus n et à coefficients dans $\mathbf{Q}(q)$, tels que

$$\begin{cases} S(z;q) = P_0(z;q) + \displaystyle\sum_{j=1}^{A} P_j(z;q)\,\mathrm{Li}_j(1/z;q) = \mathcal{O}(z^{-\rho-1}) \quad \text{quand} \quad z \to \infty\,; \\ \overline{S}(z;q) = \overline{P}_0(z;q) + \displaystyle\sum_{j=1}^{A} P_j(z;q)\,\mathrm{Li}_j(z;1/q) = \mathcal{O}(z^{\sigma+n+1}) \quad \text{quand} \quad z \to 0\,; \\ I(z;q) = -\displaystyle\sum_{j=1}^{A} P_j(zq^{1-j};q)\frac{\big(-\log_q(1/z)\big)_{j-1}}{(j-1)!} = \mathcal{O}(z-q^{-\ell}) \text{ quand } z \to q^{-\ell} \\ \qquad \text{pour tout } \ell \in \{-\nu,-\nu+1,\dots,A(n+1)-\rho-\sigma-\nu-2\}. \end{cases} \tag{4.6}$$

Théorème 23. *Dans les conditions ci-dessus, le problème* (4.6) *a une solution unique, à une constante multiplicative près. En choisissant cette constante égale à* 1*, on a*

$$S(z;q) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \frac{(q^{k-\rho};q)_\rho\,(q^{k+n+1};q)_\sigma}{(q^k;q)_{n+1}^A}\, q^{\nu k} z^{-k}$$

et

$$I(z;q) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathscr{C}} \frac{(sq^{-\rho};q)_\rho\,(sq^{n+1};q)_\sigma}{(s;q)_{n+1}^A} s^{\nu-\log_q(z)}\,\mathrm{d}s,$$

où $\mathscr{C}$ est n'importe quelle courbe fermée directe qui entoure les pôles de l'intégrande, i.e. $1, q^{-1},\dots,q^{-n}$*, sans traverser la coupure* $\mathbf{R}_-$.

Les Théorèmes 21 et 23 sont formellement très similaires, à ceci près que le paramètre « q-analogique » ν n'a pas d'équivalent dans le cas classique. La différence majeure se situe dans l'énoncé des conditions d'annulation des fonctions $I(z)$ et $I(z;q)$, qui sont en plusieurs points : cela n'a cependant rien surprenant puisqu'il est fréquent dans ce genre de situation que des singularités en certaines puissances de q confluent vers une unique singularité en 1 (avec multiplicité) lorsque $q \to 1$.

Une autre différence importante avec le Théorème 21 est le contour d'intégration de $I(z;q)$ que l'on ne peut pas déformer librement en présence de la coupure. Ce simple fait nous a empêché pour l'instant de trouver de nouvelles applications diophantiennes car la fonction $I(z;q)$ n'est apparemment pas assez petite pour « faire de la transcendance ».

4.3 Approximations de la constante de Catalan

Dans le but de construire de bonnes approximations rationnelles de la constante de Catalan G et de démontrer la conjecture des dénominateurs évoquée à la fin du sous-paragraphe 3.3, j'ai adapté dans [73] la méthode très originale précédemment employée par Prévost [61] pour donner une nouvelle preuve de l'irrationalité de $\zeta(3)$. Dans le cas de G, la technique est la suivante. Considérons la fonction

$$\Psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^2}{((2k+1)z+1)^2}$$

qui définit une fonction méromorphe sur $\mathbf{C} \setminus \{0, -1, -1/3, -1/5, \ldots\}$. Pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$G = \beta(2) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} + (-1)^n \Psi\left(\frac{1}{2n}\right). \tag{4.7}$$

L'idée est d'essayer de remplacer le nombre $\Psi(1/2n)$ par une bonne approximation rationnelle, dans le but d'en obtenir une pour G. Bien sûr, on pense immédiatement aux approximants de Padé $[p/q](z)$ de $\Psi(z)$ au voisinage de $z = 0$ puisque $1/2n$ sera amené à tendre vers 0 : en un certain sens, on espère que cela va accélérer la convergence du reste de la série, tout en ayant une grande souplesse puisque l'on dispose alors de trois paramètres libres n, p et q. La fonction Ψ n'est pas holomorphe en 0 mais elle y est néanmoins C^∞ et possède le développement de Taylor suivant, de rayon de convergence nul,

$$\Phi(z) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) E_k z^{k+2}. \tag{4.8}$$

Il est possible de déterminer explicitement les approximants de Padé $[2n+1/2n]_\Phi(z) \in \mathbf{Q}(z)$ de Φ, qui s'avèrent être de très bonnes approximations rationnelles de Ψ elle-même : ceci illustre une importante propriété des approximants de Padé, à savoir de sommer des séries divergentes.

Le résultat exact est le suivant. Introduisons la suite de polynômes pairs de degré $2n$

$$P_{2n}(z) = {}_3F_2\left[\begin{matrix} -n, \frac{1-z}{2}, \frac{1+z}{2} \\ 1, 1 \end{matrix}; 1\right] = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \binom{\frac{z-1}{2}}{j} \binom{j + \frac{z-1}{2}}{j}$$

et définissons également la suite des polynômes de degré $2n-1$:

$$Q_{2n}(z) = \frac{z}{4}\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}\sum_{k=1}^{j}\binom{\frac{z-1}{2}+j}{j-k}\binom{\frac{z-1}{2}-k}{j-k}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2\binom{j}{k}^2}.$$

Posons $\tilde{Q}_{2n}(z) = z^{2n-1}Q_{2n}(1/z)$ et $\tilde{P}_{2n}(z) = z^{2n}P_{2n}(1/z)$.

Théorème 24. *La fraction rationnelle* $\dfrac{z^2\tilde{Q}_{2n}(z)}{2\tilde{P}_{2n}(z)}$ *est l'approximant de Padé* $[2n+1/2n]_\Phi(z)$ *de la série formelle* $\Phi(z)$*. De plus, pour tout réel* $z \geq 0$,

$$\left|\Psi(z) - \frac{z^2\tilde{Q}_{2n}(z)}{2\tilde{P}_{2n}(z)}\right| \leq \frac{|z|^2}{2|P_{2n}(1/z)|^2}.$$

La preuve de ce théorème est basée sur certaines formules explicites données par Carlitz [19] et Wilson [91] (concernant les polynômes orthogonaux hypergéométriques), ainsi que sur le *umbral calculus* ([13]) pour simplifier certains passages combinatoires assez délicats. En revenant au problème initial, on obtient que

$$G \approx \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} + [2n+1/2n]_\Phi(1/2n)$$

où le second membre est un rationnel proche de G. Formellement, il s'agit du résultat suivant.

Théorème 25. *Pour tout rationnel* $r > 0$ *et tout entier* $n \geq 1$ *tels que* rn *soit entier, il existe deux rationnels* explicites $u_{n,r}$, $v_{n,r}$ *tels que* $2^{4n}u_{n,r}$ *et* $2^{4n}d^2_{2\max(1,r)n}v_{n,r}$ *soient entiers et*

$$\left|G - \frac{v_{n,r}}{u_{n,r}}\right| \leq \frac{1}{u^2_{n,r}}.$$

On a

$$u_{n,r} = P_{2n}(2rn) = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\binom{rn-\frac{1}{2}}{j}\binom{rn+j-\frac{1}{2}}{j}$$

et une formule un peu plus compliquée pour $v_{n,r}$, basée sur les nombres $Q_{2n}(2rn)$. La majoration montre que, à r fixé, la convergence vers G est géométrique en n mais, malheureusement, aucune valeur de r ne permet d'en déduire l'irrationalité de G. Néanmoins, cette construction spécialisée en $r=1$ m'a permis de prouver la conjecture des dénominateurs pour G (fin du sous-paragraphe 3.3, dont je reprends les notations).

[13] Il s'agit de la méthode consistant à manipuler les éléments A_n d'une suite donnée comme s'il s'agissait des puissances A^n d'un élément formel A : par exemple, la formule de récurrence pour les nombres de Bernoulli $\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}B_k = 0$ prend ainsi la forme plus compacte $B^n = (B+1)^n$, que l'on peut ensuite injecter dans un calcul algébrique. Cette procédure est parfaitement licite dans beaucoup de situations combinatoires, voir [32].

Théorème 26. *Pour tout entier n, on a* $\mathbf{e}_n = u_{n,1} \in 2^{-4n}\mathbf{Z}$ *et* $\mathbf{f}_n = v_{n,1} \in 2^{-4n}\mathrm{d}_{2n}^{-2}\mathbf{Z}$.

La démonstration est assez compliquée et utilise, entre autres, diverses techniques hypergéométriques, dont l'algorithme de Zeilberger et l'identité

$$ {}_3F_2\left[\begin{matrix} 1,\ \alpha,\ \alpha \\ \alpha+1, \alpha+1 \end{matrix}; -1\right] = \frac{1}{2}\, {}_3F_2\left[\begin{matrix} 1,\ 1,\ \alpha \\ \alpha+1, \alpha+1 \end{matrix}; 1\right]. $$

Prévost et moi-même avons prévu ([14]) de développer cette méthode de construction d'approximations, en particulier pour essayer de comprendre pourquoi l'on retrouve les mêmes approximations rationnelles que celles construites par les approximants de Padé des polylogarithmes (lorsque l'on applique cette méthode à $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$). Ce phénomène n'a rien d'évident *a priori* et nous avons constaté qu'il se produit également lorsque l'on cherche à accélérer le reste de la série de Taylor en 0 de $\exp(z)$ et de $\log(1-z)$.

Remarquons enfin que des suites de rationnels convergeant géométriquement vers G ont déjà été obtenues par Batut et Olivier dans [12], au moyen de la méthode d'accélération de fractions continues d'Apéry. Bien que je n'aie pas fait le calcul, il est plausible que leurs approximations s'obtiennent par spécialisation du Théorème 25 car c'est déjà le cas des résultats analogues pour $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$. Cependant, la méthode décrite ici offre une souplesse supplémentaire grâce au paramètre r : il n'est lié à n que par la condition $rn \in \mathbf{N}$ et on peut donc le choisir comme fonction de n, par exemple, et pas forcément fixe. On obtient alors des approximations rationnelles de G nouvelles mais qui ne semblent pas plus utiles pour montrer l'irrationalité de G.

[14] Depuis la première version de ce mémoire, nous avons totalement explicité/expliqué le phénomène observé dans le cas de la fonction exponentielle : voir [62].

5 Les polyzêtas

Ce paragraphe est consacré à l'exposé d'une méthode qui fait l'objet d'un travail en cours et ne contient donc pas de résultats nouveaux à proprement parler.

Une généralisation, naturelle et très étudiée actuellement, de la fonction zêta de Riemann est donnée par les *polyzêtas*, définis pour tout entier $p \geq 1$ et tout p-uplet $\underline{s} = (s_1, s_2, \dots, s_p)$ de réels ≥ 1, avec $s_1 > 1$, par

$$\zeta(s_1, s_2, \dots, s_p) = \sum_{1 \leq k_p < \cdots < k_1} \frac{1}{k_1^{s_1} k_2^{s_2} \cdots k_n^{s_p}}.$$

Les entiers p et $q = s_1 + s_2 + \cdots + s_p$ sont respectivement la profondeur et le poids de $\zeta(s_1, s_2, \dots, s_p)$. Ces séries apparaissent, par exemple, quand on considère les produits des valeurs de la fonction zêta : on a ainsi $\zeta(n)\zeta(m) = \zeta(n+m) + \zeta(n,m) + \zeta(m,n)$, ce qui permet en quelque sorte de « linéariser » ces produits. En dehors de quelques identités telles que $\zeta(2,1) = \zeta(3)$ (due à Euler), la nature arithmétique de ces séries est aussi peu connue que celle des nombres $\zeta(s)$. Cependant, l'ensemble des nombres $\zeta(\underline{s})$ possède une très riche structure algébrique assez bien comprise, au moins conjecturalement (voir [90]). Par exemple, on peut s'intéresser aux $\mathbf{Q}$-sous-espaces vectoriels $\mathscr{Z}_p$ de $\mathbf{R}$, engendrés par les 2^{p-2} polyzêtas de poids $p \geq 2$: $\mathscr{Z}_2 = \mathbf{Q}\zeta(2)$, $\mathscr{Z}_3 = \mathbf{Q}\zeta(3) + \mathbf{Q}\zeta(2,1)$, $\mathscr{Z}_4 = \mathbf{Q}\zeta(4) + \mathbf{Q}\zeta(3,1) + \mathbf{Q}\zeta(2,2) + \mathbf{Q}\zeta(2,1,1)$, etc. Posons $v_p = \dim_{\mathbf{Q}}(\mathscr{Z}_p)$. On a alors la

Conjecture 2.
(*i*) (*Zagier*) *Pour tout entier $p \geq 2$, on a $v_p = c_p$, où l'entier c_p est défini par la récurrence de type Fibonacci $c_{p+3} = c_{p+1} + c_p$, avec $c_0 = 1$, $c_1 = 0$ et $c_2 = 1$.*

(*ii*) *Les $\mathbf{Q}$-espaces vectoriels $\mathbf{Q}$ et $\mathscr{Z}_p$ ($p \geq 2$), sont en somme directe.*

La suite $(v_p)_{p\geq 2}$ devrait donc croître comme α^q (où $\alpha \approx 1,3247$ est racine du polynôme $X^3 - X - 1$), ce qui est bien plus petit que 2^{p-2}. Il y a donc beaucoup de relations linéaires entre les polyzêtas de même poids (et conjecturalement aucune en poids différents) : le conditionnel n'est pas de mise car un théorème de Terasoma [83] affirme que l'on a $v_p \leq c_p$ pour tout entier $p \geq 2$. Il reste donc à montrer l'inégalité inverse mais aucune minoration non triviale de v_p n'est connue à ce jour : si l'on montre facilement que $v_2 = v_3 = v_4 = 1$, on est bloqué dès l'égalité $v_5 = 2$, qui est équivalente à l'irrationalité toujours inconnue de $\zeta(5)/(\zeta(3)\zeta(2))$. Plus généralement, un des intérêts de la Conjecture 2 est d'impliquer la suivante ([15]).

Conjecture 3. *Les nombres $\pi, \zeta(3), \zeta(5), \zeta(7), \zeta(9)$, etc, sont algébriquement indépendants sur $\mathbf{Q}$.*

[15]Cette implication est unanimement considérée comme un « résultat bien connu du folklore ». Je n'en ai jamais vu de démonstration convaincante. Néanmoins, le point (*ii*) implique l'indépendance linéaire sur $\mathbf{Q}$ des nombres $1, \zeta(2), \zeta(3), \zeta(4), \zeta(5)$, etc.

À défaut de prouver totalement ces conjectures qui semblent hors d'atteinte actuellement, j'ai entrepris une collaboration avec Cresson et Fischler dans l'espoir de produire une minoration non triviale de v_q. Il me semble intéressant d'expliquer sommairement ici notre démarche. Avant tout, notre but est d'adapter la méthode hypergéométrique en une variable, dont l'intérêt a été abondamment évoqué dans les pages précédentes. En effet, les premières séries qui viennent à l'esprit pour étudier les polyzêtas sont celles de la forme

$$\sum_{1\leq k_s<\cdots<k_1} \frac{P(k_1,k_2,\ldots,k_s)}{(k_1)_{n_1+1}^{A_1}(k_2)_{n_2+1}^{A_2}\cdots(k_s)_{n_s+1}^{A_s}},$$

où les A_j et n_j sont des paramètres entiers et P un polynôme à coefficients entiers. Pour diverses raisons, il est plus simple de considérer que la sommation est sur $1 \leq k_s \leq \cdots \leq k_1$ et, de fait, de telles séries apparaissent naturellement dans la littérature. Par exemple, Sorokin [82] a déduit l'irrationalité de $\zeta(3)$ d'un résultat que l'on peut écrire ainsi : pour tout entier $n \geq 0$, on a ([16])

$$V_n = n! \sum_{1\leq \ell\leq k} \frac{(\ell-n)_n(k-\ell+1)_n}{(k)_{n+1}^2(\ell)_{n+1}} = 2a_n\zeta(2,1) - 2b_n, \tag{5.1}$$

où a_n et b_n sont les nombres d'Apéry obtenus en (1.2). La méthode de Sorokin consiste à résoudre un subtil problème d'approximation de Padé, qu'il n'est malheureusement pas facile de généraliser à d'autres situations. Nous avons donc entrepris de démontrer (5.1) directement et ensuite d'étendre cette approche à un cadre plus global.

Pour éviter d'avoir à considérer un problème technique (évoqué plus bas) avec la série V_n, j'explique notre approche sur la série suivante

$$S_n(z_1,z_2) = \sum_{1\leq \ell\leq k} \frac{(\ell-n)_n(k-\ell+1)_n}{(k)_{n+1}^2(\ell)_{n+1}^2}\, z_1^{-k}z_2^{-\ell},$$

qui converge pour $|z_1| \geq 1$ et $|z_2| \geq 1$.

La première étape consiste à décomposer en éléments simples la fraction rationnelle en les deux variables k, ℓ qui constitue le sommande de $S_n(z_1,z_2)$ (les variables sont séparées au dénominateur, ce qui simplifie beaucoup cette étape). En reportant dans $S_n(z_1,z_2)$, on obtient ainsi

$$S_n(z_1,z_2) = \sum_{i,j=0}^{n}\sum_{e,f=1}^{2} c_{i,j,e,f} \sum_{1\leq \ell\leq k} \frac{z_1^{-k}z_2^{-\ell}}{(k+i)^e(\ell+j)^f},$$

où les $c_{i,j,e,f}$ sont des rationnels explicitables.

La deuxième étape consiste à exprimer explicitement la série sur k et ℓ comme combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbf{Q}(z_1,\ldots,z_p)$ en les polylogarithmes multiples

$$\mathrm{Li}_{s_1,s_2,\ldots,s_p}(z_1,\ldots,z_p) = \sum_{1\leq k_p\leq\cdots\leq k_1} \frac{z_1^{k_1}\cdots z_p^{k_p}}{k_1^{s_1}k_2^{s_2}\cdots k_p^{s_p}}.$$

[16] La série V_n est en fait un cas particulier de la série multiple considérée au membre de droite de (1.10).

(Ici, $p = 2$.) Dans le cas d'une seule variable (cas $p = 1$), c'est une étape triviale puisque l'on a tout simplement

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{-k}}{(k+i)^e} = z^i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{-k}}{k^e} - \sum_{k=1}^{i} \frac{z^{i-k}}{k^e} = z^i \mathrm{Li}_e(1/z) - \sum_{k=1}^{i} \frac{z^{i-k}}{k^e}. \tag{5.2}$$

Malheureusement, en deux variables, ce n'est déjà plus du tout immédiat, comme on va le voir maintenant. Il s'agit en effet de décomposer la série suivante à la manière de (5.2) :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_1^{-k}}{(k+i)^e} \sum_{\ell=1}^{k} \frac{z_2^{-\ell}}{(\ell+j)^f}. \tag{5.3}$$

On écrit la somme intérieure sur ℓ comme

$$\sum_{\ell=1}^{k} \frac{z_2^{-\ell}}{(\ell+j)^f} = \sum_{\ell=j+1}^{k+j} \frac{z_2^{j-\ell}}{\ell^f} = \left(\sum_{\ell=1}^{k+i} - \sum_{\ell=1}^{j} + \varepsilon_{i,j} \sum_{\ell=k+m+1}^{k+M} \right) \frac{z_2^{j-\ell}}{\ell^f} \tag{5.4}$$

où $m = \min(i,j)$, $M = \max(i,j)$ et $\varepsilon_{i,j} = 1$ si $i < j$, -1 si $i > j$, 0 si $i = j$. Puis on réinjecte ces trois sommes dans la somme sur k. Les deux premières séries se traitent facilement :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_1^{-k}}{(k+i)^e} \sum_{\ell=1}^{k+i} \frac{z_2^{j-\ell}}{\ell^f} &= \sum_{k=i+1}^{\infty} \frac{z_1^{i-k}}{k^e} \sum_{\ell=1}^{k} \frac{z_2^{j-\ell}}{\ell^f} \\ &= z_1^i z_2^j \, \mathrm{Li}_{e,f}(1/z_1, 1/z_2) - \sum_{k=1}^{i} \frac{z_1^{i-k}}{k^e} \sum_{\ell=1}^{k} \frac{z_2^{j-\ell}}{\ell^f} \end{aligned}$$

et

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_1^{-k}}{(k+i)^e} \sum_{\ell=1}^{j} \frac{z_2^{j-\ell}}{\ell^f} = z_1^i \left(\sum_{\ell=1}^{j} \frac{z_2^{j-\ell}}{\ell^f} \right) \mathrm{Li}_e(1/z_1) - \left(\sum_{k=1}^{i} \frac{z_1^{i-k}}{k^e} \right) \left(\sum_{\ell=1}^{j} \frac{z_2^{j-\ell}}{\ell^f} \right).$$

La troisième série est un peu plus compliquée : on a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_1^{-k}}{(k+i)^e} \sum_{\ell=k+m+1}^{k+M} \frac{z_2^{j-\ell}}{\ell^f} = \sum_{\ell=m+1}^{M} z_2^{j-\ell} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z_1 z_2)^{-k}}{(k+i)^e (k+\ell)^f}$$

et on développe la fraction rationnelle $\frac{1}{(k+i)^e (k+\ell)^f}$ en éléments simples pour conclure que cette série s'écrit elle aussi comme une combinaison linéaire de $\mathrm{Li}_s(1/z_1 z_2)$ avec $1 \leq s \leq \max(e,f)$ (et aussi $\mathrm{Li}_{e+f}(1/z_1 z_2)$ si $\ell = M = i$) avec des coefficients polynomiaux en z_1 et z_2.

Par ce procédé laborieux (qui devient quasiment inextricable en trois variables), on a bien obtenu une écriture de la série double (5.3) comme combinaison linéaire polynomiale en certains polylogarithmes multiples. On doit aussi parfois tenir compte d'un autre phénomène qui n'existe pas en une variable : contrairement à $S_n(z_1, z_2)$, la décomposition en éléments simples du sommande de la série V_n produit une partie entière (puisque le degré en ℓ de la fraction est positif) qui complique encore cette étape en faisant apparaître *a priori* des polylogarithmes multiples « exotiques » tels que $\mathrm{Li}_{2,-1}(z_1, z_2)$. Pour franchir cette étape en toute généralité, nous avons été amené à écrire un algorithme, implanté sous Pari, que nous sommes actuellement en train d'expérimenter : il est basé sur le fait que la décomposition fondamentale (5.4) permet essentiellement de passer d'une série de profondeur p à une série de profondeur $p-1$ et permet donc de programmer récursivement.

La troisième étape consiste à identifier les polyzêtas qui apparaissent réellement à l'issue de la deuxième étape, c'est-à-dire ceux affectés d'un coefficient non-nul. Or cette identification n'est absolument pas évidente. Par exemple, la série $S_n(1, 1)$ fait *a priori* apparaître les polyzêtas (dont certains sont divergents)

$$\zeta(1),\ \zeta(1, 1),\ \zeta(2),\ \zeta(2, 1),\ \zeta(1, 2),\ \zeta(3),\ \zeta(2, 2),\ \zeta(4)$$

et il est assez difficile de prouver que seuls $\zeta(2)$ et $\zeta(2, 2)$ n'ont pas un coefficient nul. Nous espérons que les résultats de nos expériences nous permettront de produire des phénomènes d'annulation automatique des coefficients, à la manière du phénomène *très bien équilibré* en une variable.

6 La conjecture de Bateman-Horn

Je termine ce mémoire en évoquant un travail fait en commun avec Hindry [42], qui concerne la conjecture de Bateman-Horn, rappelé au sous-paragraphe 6.1. En dehors de cette phrase, il ne sera nullement fait mention du mot « hypergéométrique » dans tout ce paragraphe.

Golomb [33] a développé une approche très originale de la conjecture des nombres premiers jumeaux, basée sur le comportement au voisinage de $z = 1$ de la série entière $\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(2n-1)\Lambda(2n+1)z^{2n}$, où Λ désigne la fonction de von Mangolt, familière en théorie analytique des nombres. Une seule étape analytique (l'interversion d'une limite et d'une série) empêche Golomb de parvenir à son but. Néanmoins, en admettant cette étape, il esquisse comment obtenir l'estimation asymptotique, lorsque $x \to +\infty$,

$$\#\big\{1 \leq n \leq x \ : n \text{ et } n+2 \text{ premiers}\big\} \sim 2\prod_{p\geq 3}\left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \cdot \frac{x}{\log^2(x)},$$

conjecture bien connue due à Hardy et Littlewood, que l'on peut obtenir par une heuristique probabiliste assez délicate (voir par exemple l'argument exposé dans [39, p. 371]).

Notre travail a consisté à généraliser et justifier autant que possible la méthode de Golomb (le Λ-calcul) à la conjecture de Bateman-Horn, qui concerne le comportement asymptotique de la fonction

$$\pi_{\underline{f}}(x) = \#\big\{1 \leq n \leq x : f_1(n), f_2(n), \ldots, f_k(n) \text{ simultanément premiers}\big\},$$

où les $f_1, f_2, \ldots, f_k$ sont dans $\mathbb{Z}[X]$. Ce faisant, nous avons cheminé par des domaines aussi divers que les identités entre fonctions arithmétiques, la théorie algébrique des nombres et les fonctions zêta de Dedekind, la théorie analytique des nombres, les théorèmes taubériens, etc. Finalement, modulo une seule étape analytique non justifiée, nous avons exactement retrouvé le comportement prédit par la conjecture de Bateman-Horn.

Ce travail ne prétend pas être une approche décisive vers la résolution de cette conjecture. Plus modestement, il montre que l'on dispose avec le Λ–calcul d'une bonne machine à produire des heuristiques analytiques en faveur de conjectures peu évidentes, en particulier lorsque, comme c'est le cas ici, l'Hypothèse de Riemann Généralisée ne permet pas de conclure ([17]). Nous nous sommes également efforcés de mettre en lumière certaines propriétés « désagréables » telles le fait que la congruence $f_1(n)\cdots f_k(n) \equiv 0[d]$ possède souvent des solutions n trop petites dans $\{1, \ldots, d\}$ dès que $\deg(f_1 \cdots f_k) \geq 2$ ou bien encore le fait que la série de Dirichlet $L_{\underline{f}}(s)$ (voir (6.4) ci-dessous) ne se prolonge pas analytiquement au delà de $\mathrm{Re}(s) > 0$ sous la même condition. Surtout, par son apparente simplicité, cette méthode semble une alternative crédible aux heuristiques probabilistes dont on sait qu'elles ont pu suggérer des conjectures fausses ([18]) ainsi qu'aux heuristiques analytiques issues de la méthode du cercle de Hardy-Littlewood-Ramanujan, techniquement plus compliquée.

[17] Il existe d'ailleurs des résultats démontrés en supposant à la fois l'Hypothèse de Riemann *et* la conjecture des nombres premiers jumeaux généralisée : voir par exemple [20].

[18] Ce fut le cas des premières versions quantitatives des conjectures de Goldbach et d'Artin (sur les racines primitives) : voir [37] et [57] respectivement pour des commentaires historiques à ce sujet.

6.1 Valeurs premières des polynômes

Considérons k polynômes $f_1, f_2, \ldots, f_k$ de $\mathbb{Z}[X]$, de degré h_1, h_2, ..., h_k, respectivement. Notons $f = f_1 f_2 \cdots f_k$, $\underline{f} = (f_1, \ldots, f_k)$, $\mathbb{K}_j$ le corps de nombres $\mathbb{Q}[X]/(f_j(X))$ et $h = h_1 + h_2 + \cdots + h_k$. La notation « $a \mid b$ » signifie que a divise b et p désigne un nombre premier ≥ 2, ce qui vaut, en particulier, lorsqu'un produit infini porte sur p sans autre indication.

Dans un premier temps, rappelons les conditions *a priori* nécessaires pour que $\pi_{\underline{f}}(x)$ ne soit pas bornée :

(i) Les polynômes f_j doivent tous être irréductibles sur $\mathbb{Q}$: si l'un ne l'est pas, il ne peut pas prendre une valeur première en n dès que n est assez grand. On suppose aussi qu'il n'existe pas deux entiers distincts i, j tels que $f_i = \pm f_j$.

(ii) Pour tout premier p, il existe un entier $n \geq 1$ tel que p ne divise pas $f(n)$.

(iii) En changeant au besoin un ou plusieurs f_j en $-f_j$ et par une translation de la variable commune aux f_j, on peut supposer que pour tout entier $n \geq 1$, les entiers $f_1(n), f_2(n), \ldots, f_k(n)$ sont tous > 1 : la valeur de $\pi_{\underline{f}}(x)$ n'est changée que d'une fonction bornée de x. Ces conditions sont commodes mais pas nécessaires.

On qualifiera de *convenable* toute famille vérifiant ces conditions. Pour tout entier $d \geq 1$ et tout $g \in \mathbb{Z}[X]$, posons $N_g(d) = \#\{1 \leq n \leq d \ : g(n) \equiv 0\,[d]\}$. On peut alors remplacer la condition (ii) par la suivante, qui lui est équivalente : (ii bis) Pour tout nombre premier p, on a $N_f(p) < p$. On peut remarquer que $N_f(p) \leq \min(h, p)$ et qu'il suffit donc de faire un nombre fini de calculs pour les premiers $p \leq h$ pour vérifier la condition (ii bis). Schinzel [79, p. 188] a conjecturé la réciproque suivante.

Conjecture 4 (Schinzel). *Soit $\underline{f}$ une famille convenable. Alors $\pi_{\underline{f}}(x)$ tend vers l'infini avec x.*

Dans le cas d'un seul polynôme, cette conjecture est due à Bouniakowski [18] ; dans le cas de plusieurs polynômes linéaires, elle est due à Dickson [26]. Bien que très bien étayée numériquement, il n'y a guère de raisons évidentes pour que la conjecture de Bouniakowski soit vraie. D'ailleurs, si l'on remplace l'anneau $\mathbb{Z}[X]$ par un anneau de polynômes sur un corps fini ou par $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_N]$ ($N \geq 2$), alors la conjecture « trivialement » analogue à celle de Bouniakowski est fausse : voir [25] et l'introduction de [41], respectivement. Dans [10], Bateman et Horn ont proposé une heuristique précisant de façon quantitative la conjecture de Schinzel ; pour la formuler, on a besoin du produit

$$C(\underline{f}) = \prod_p \left(\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-k} \left(1 - \frac{N_f(p)}{p}\right) \right),$$

dont Bateman et Horn justifient la convergence (qui n'est pas absolue). Il en découle en particulier que $C(\underline{f})$ est non-nul si $N_f(p) < p$ pour tout p.

Conjecture 5 (Bateman-Horn). *Soit $\underline{f}$ une famille convenable. Lorsque x tend vers l'infini, on a*

$$\pi_{\underline{f}}(x) \sim \frac{C(\underline{f})}{h_1 h_2 \cdots h_k} \cdot \frac{x}{\log^k(x)}.$$

On notera $\mathbf{BH}_\pi(\underline{f})$ la conjecture de Bateman-Horn pour la famille $\underline{f}$. Pour situer son degré de difficulté, indiquons seulement qu'elle implique comme corollaires les prédictions faites par Hardy et Littlewood dans [37] sur la répartition supposée des nombres premiers jumeaux et des premiers de la forme n^2+1. Hormis l'évidence numérique et le cas d'un polynôme de degré 1 (théorème de Dirichlet), on peut mentionner le résultat de Bateman & Stemmler [11] obtenu par le grand crible : $\pi_{\underline{f}}(x) \leq k!\, 2^k\, C(\underline{f})\, x \log^{-k}(x)(1+o(1))$.

6.2 Le Λ-calcul de Golomb

Je reproduis ci-dessous notre argument, sans aucun détail des calculs faits : beaucoup de travail (*i.e.* quelques théorèmes) est nécessaire pour justifier ce qui peut l'être ([19]).

Pour une raison technique, il est dans un premier temps commode de supposer, en plus des conditions de la conjecture de Bateman-Horn, que *pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout couple d'entiers (i,j) tels que $1 \leq i < j \leq k$, les entiers $f_i(n)$ et $f_j(n)$ sont premiers entre eux.* Cette hypothèse supplémentaire, que l'on dénommera hypothèse F, est *a priori* très contraignante puisqu'elle exclut le cas de la famille des polynômes $f_1(X) = X+1$ et $f_2(X) = X+3$, qui apparaissent dans la conjecture des nombres premiers jumeaux. Cependant, elle s'avère sans dommage : nous avons montré que si $\mathbf{BH}_\pi(\underline{f})$ est vraie pour toute famille $\underline{f}$ convenable vérifiant l'hypothèse F, alors $\mathbf{BH}_\pi(\underline{f})$ est vraie pour toute famille $\underline{f}$ convenable.

Pour tout entier $n \geq 2$, on définit la fonction de von Mangolt $\Lambda(n) = \log(p)$ si $n = p^v$, 0 sinon, et la fonction de Möbius $\mu(n) = (-1)^\omega$ si n est sans facteur carré et possède ω facteurs premiers, $\mu(1) = 1$ et 0 sinon.

Donnons-nous des polynômes $f_j(X) \in \mathbb{Z}[X]$ $(j = 1, \ldots, k)$ convenables et vérifiant l'hypothèse F ci-dessus. Considérons la série entière, convergente pour $|z| < 1$,

$$G_{\underline{f}}(z) = (-1)^k k! \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda\big(f_1(n)\big)\Lambda\big(f_2(n)\big)\cdots\Lambda\big(f_k(n)\big) z^n, \tag{6.1}$$

dont nous allons étudier le comportement au voisinage de $z = 1$.

Tout repose sur une formule élémentaire et fondamentale de Golomb qui, dans ce cas précis, assure que pour tout entier $n \geq 1$,

$$\Lambda\big(f_1(n)\big)\Lambda\big(f_2(n)\big)\cdots\Lambda\big(f_k(n)\big) = \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{\substack{d \geq 1 \\ d \,|\, \underline{f}(n)}} \mu(d) \log^k(d). \tag{6.2}$$

(C'est ici que sert l'hypothèse F.) En injectant cette relation dans (6.1) et en intervertissant les deux sommations (ce qui est licite puisque $|z| < 1$ implique la convergence absolue des

[19] Depuis l'écriture de ce mémoire, nous nous sommes aperçus que certains des résultats évoqués ici recoupent des travaux de Conrad et Kurokawa : voir la nouvelle version [42] pour les détails.

séries utilisées), on obtient

$$\begin{aligned}
G_{\underline{f}}(z) &= \sum_{n=1}^{\infty}\Bigg(\sum_{\substack{d\geq 1\\ d\,|\,\overline{f}(n)}} \mu(d)\log^k(d)\Bigg) z^n = \sum_{d=1}^{\infty}\mu(d)\log^k(d) \sum_{\substack{n=1\\ f(n)\equiv 0\,[d]}}^{\infty} z^n \\
&= \sum_{d=1}^{\infty}\mu(d)\log^k(d)\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{\substack{n=1\\ f(n)\equiv 0\,[d]}}^{d} z^{n+\ell d} = \sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)\log^k(d)}{1-z^d}\sum_{\substack{n=1\\ f(n)\equiv 0\,[d]}}^{d} z^n.
\end{aligned}$$

La troisième égalité est conséquence du fait que l'ensemble des solutions positives de la congruence $f(n)\equiv 0\,[d]$ est l'union disjointe des ensembles $m+\mathbb{N}d$, où m est n'importe quelle solution particulière dans $\{1,\ldots,d\}$ de cette congruence.

Remarquons que la valeur en $z=1$ du polynôme $\sum_{\substack{n=1,\ldots,d\\ f(n)\equiv 0\,[d]}} z^n$ est très exactement la quantité $N_f(d)$ introduite au début du paragraphe 6.1, même lorsque la somme est vide en convenant qu'elle vaut alors 0. En procédant à l'échange limite-série, ***qui demeure la seule étape non justifiée de cette approche***, on obtient donc

$$\lim_{z\to 1^-}(1-z)\,G_{\underline{f}}(z) \stackrel{?}{=} \sum_{d=1}^{\infty}\mu(d)\log^k(d)\lim_{z\to 1^-}\left(\frac{\sum_{\substack{n=1,\ldots,d\\ f(n)\equiv 0\,[d]}} z^n}{\sum_{n=0,\ldots,d-1} z^n}\right) = \sum_{d=1}^{\infty}\mu(d)\log^k(d)\frac{N_f(d)}{d}. \quad (6.3)$$

Un point important est évidemment de s'assurer de la convergence et de la non-nullité de la série à droite de (6.3), que l'on note $C'(\underline{f})$. On peut faire mieux que cela en donnant une expression très simple de $C'(\underline{f})$ à l'aide de la constante $C(\underline{f})$ de Bateman-Horn. Pour cela, introduisons la série de Dirichlet

$$L_{\underline{f}}(s) = \sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)N_f(d)}{d^s}, \quad (6.4)$$

dont on montre qu'elle converge absolument au moins pour $\mathrm{Re}(s) > 1$. En vertu du théorème des restes chinois, $N_f(d)$ est une fonction multiplicative, c'est-à-dire que $N_f(d_1d_2) = N_f(d_1)N_f(d_2)$ si $(d_1,d_2)=1$. On en déduit que, pour $\mathrm{Re}(s)>1$),

$$L_{\underline{f}}(s) = \prod_p\left(1-\frac{N_f(p)}{p^s}\right) = \frac{1}{\zeta^k(s)}\prod_p\left(\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-k}\left(1-\frac{N_f(p)}{p^s}\right)\right).$$

Ici, on a utilisé, de façon triviale, la fonction zêta de Riemann définie pour $\mathrm{Re}(s)>1$ par la série ou le produit

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} = \prod_p\left(1-p^{-s}\right)^{-1}.$$

On peut prolonger analytiquement ([20]) $L_{\underline{f}}(s)$ à un ouvert contenant le demi-plan $\mathrm{Re}(s)\geq 1$, ce qui permet de justifier l'étape suivante, entre autres. Comme la fonction $\zeta(s)^{-k}$ s'annule

[20] La série de Dirichlet $L_{\underline{f}}(s)$ peut s'exprimer à l'aide des fonctions zêtas de Dedekind des corps de nombres associés au polynômes f_j, ce qui permet de faire ce prolongement. En l'exprimant à l'aide des fonctions L d'Artin, on peut la prolonger sur le demi-plan $\mathrm{Re}(s)>0$ mais, pas au delà, sauf lorsque $k=1$ et $h_1=1$.

à l'ordre k en $s = 1$ et que $\lim\limits_{s\to 1}(s-1)\zeta(s) = 1$, on a

$$C'(\underline{f}) = (-1)^k L_{\underline{f}}^{(k)}(1) = (-1)^k\, k!\, C(\underline{f}). \tag{6.5}$$

Seule la première égalité nécessite quelques efforts. À l'aide d'un théorème taubérien de Hardy et Littlewood [36], on traduit (6.3) et (6.5) par

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \Lambda\big(f_1(j)\big)\Lambda\big(f_2(j)\big)\cdots\Lambda\big(f_k(j)\big) = C(\underline{f}). \tag{6.6}$$

Enfin, un résultat relativement élémentaire montre que (6.6) équivaut à $\mathbf{BH}_\pi(\underline{f})$.

6.3 La conjecture de Goldbach

Pour obtenir une version quantitative de la conjecture de Goldbach, Hardy et Littlewood [37, p. 38] notent que la fonction

$$g(n) = \sum_{k=1}^{n-1} \Lambda(k)\Lambda(n-k)$$

est celle qui s'impose le plus naturellement. En raison de la dépendance en n du sommande, la méthode fonctionnelle de Golomb ne peut pas être utilisée de la même manière que pour la conjecture de Bateman-Horn. De plus, pour appliquer l'identité de Golomb, il faut restreindre la sommation aux seuls entiers k tels $(k,n) = 1$ et étudier

$$\mathscr{G}(n) = \sum_{\substack{k=1\\(k,n)=1}}^{n-1} \Lambda(k)\Lambda(n-k) = \frac{1}{2}\sum_{d=1}^{\infty}\mu(d)\log^2(d) \sum_{\substack{k=1\\(k,n)=1,\, d\mid k(n-k)}}^{n-1} 1. \tag{6.7}$$

Je donne maintenant un argument analytique permettant d'estimer $\mathscr{G}(n)$ d'une manière certes moins élégante que dans le cas de Bateman-Horn mais que j'espére assez plausible.

Notons $A(n,d)$ la somme finie tout à droite de (6.7) : on a évidemment $A(n,d) = 0$ si $(d,n) > 1$ ou si $d > \max_k k(n-k) = n^2/4$. De plus, si $d = p$ est premier et si $(n,p) = 1$, on a

$$A(n,p) = 2\sum_{r\mid n}\mu(r)\left[\frac{n}{rp}\right] = \frac{2\varphi(n)}{p} + R(n,p) = \frac{N(p)\,\varphi(n)}{p} + R(n,p).$$

avec $R(n,p) = 2\sum_{r\mid n}\mu(r)\big(\big[\frac{n}{rp}\big] - \frac{n}{rp}\big) \ll \tau(n)$ (= le nombre de diviseurs de n) et $N(d) = N_{X(n-X)}(d)$. On peut espérer que pour d quelconque, la fonction $R(n,d)$ définie par

$$A(n,d) = \frac{N(d)\,\varphi(n)}{d} + R(n,d) \tag{6.8}$$

soit petite ([21]) en un certain sens. Notons que l'écriture (6.8) est typique des méthodes de crible, où l'on cherche à approcher une fonction arithmétique compliquée par des fonctions plus simples, multiplicatives par exemple : ici, cela revient à quantifier le fait que les conditions $(k, n) = 1$ et $d \mid k(n-k)$ sont plus ou moins « indépendantes » pour un entier générique k lorsque $(d, n) = 1$.

Si l'on pouvait négliger la contribution due à $R(n, d)$, on obtiendrait alors l'approximation

$$\mathscr{G}(n) \overset{?}{\sim} \frac{\varphi(n)}{2} \sum_{\substack{d \leq n^2/4 \\ (d,n)=1}} \frac{\mu(d) \log^2(d) N(d)}{d} = \frac{\varphi(n)}{2} \sum_{\substack{d=1 \\ (d,n)=1}}^{\infty} \frac{\mu(d) \log^2(d) N(d)}{d} + o(\varphi(n)),$$

puisque la série est convergente. Or on montre que

$$\sum_{\substack{d=1 \\ (d,n)=1}}^{\infty} \frac{\mu(d) \log^2(d) N(d)}{d} = \frac{n}{\varphi(n)} \prod_p \left(\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-2} \left(1 - \frac{N(p)}{p}\right) \right)$$

et $N(p) = 1$ si $p \mid n$ tandis que $N(p) = 2$ si $p \nmid n$. Si n est impair, on a donc $N(2) = 2$ et le produit est nul, ce qui va dans le bon sens. Si n est pair, des manipulations immédiates donnent alors

$$\mathscr{G}(n) \overset{?}{\sim} 2 \prod_{p \geq 3} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \cdot \prod_{\substack{p \mid n \\ p \geq 3}} \frac{p-1}{p-2} \cdot n + o(n), \tag{6.9}$$

en utilisant le fait que $o(\varphi(n)) = o(n)$.

Estimons maintenant $g(n) - \mathscr{G}(n)$ lorsque n est pair. Puisque $(k, n) > 1$, pour que $\Lambda(k)\Lambda(n-k) \neq 0$, le nombre k doit être une puissance d'un diviseur premier de n, donc doit lui-même diviser n. En majorant simplement $\Lambda(k)\Lambda(n-k)$ par $\log^2(n)$, on a donc

$$0 \leq g(n) - \mathscr{G}(n) = \sum_{\substack{k=1 \\ (k,n)>1}}^{n-1} \Lambda(k)\Lambda(n-k) \leq \sum_{k \mid n} \Lambda(k)\Lambda(n-k) \leq \log^2(n)\, \tau(n) \ll n^{\varepsilon} \tag{6.10}$$

pour tout $\varepsilon > 0$ (par la majoration classique $\tau(n) \ll n^{\varepsilon}$). Comme (6.9) suggère que $\mathscr{G}(n) \overset{?}{\gg} n$, on déduit donc de (6.9) et (6.10) que

$$\sum_{k=1}^{n-1} \Lambda(k)\Lambda(n-k) \overset{?}{\sim} 2 \prod_{p \geq 3} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \cdot \prod_{\substack{p \mid n \\ p \geq 3}} \frac{p-1}{p-2} \cdot n,$$

qui est une forme de l'estimation usuelle prédite dans [37].

[21] C'est évidemment le cœur du problème : prouver que l'effet de $R(n, d)$ se dilue finalement dans un terme d'erreur correspond au problème de l'inversion limite-série dans le cas de la conjecture de Bateman-Horn.

Conjecture 6 (Hardy-Littlewood)**.** *Lorsque n pair tend vers l'infini, on a*

$$\#\{(p,q)\ : p+q=n \text{ et } p,q \text{ premiers}\} \sim 2\prod_{p\geq 3}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\cdot\prod_{\substack{p\mid n\\ p\geq 3}}\frac{p-1}{p-2}\cdot\frac{n}{\log^2(n)}.$$

Il serait intéressant, me semble-t'il, d'adapter cette technique au cas d'autres conjectures célèbres prédisant le comportement asymptotique de familles notables de nombres premiers, comme celles de Lang-Trotter et d'Artin sur les racines primitives (même si HRG suffit dans ce cas).

Bibliographie

[1] C. R. Adams, *On the linear ordinary q-difference equations*, Ann. Math. **30** (1929), no. 2, 195–205.

[2] K. Alladi et M. Robinson, *Legendre polynomials and irrationality*, J. Reine Angew. Math. **318** (1980), 137–155.

[3] G. Almkvist et A. Granville, *Borwein and Bradley's Apéry-Like Formulae for* $\zeta(4n+3)$, Exp. Math. **8**.2 (1999), 197–203.
Disponible sur `http://www.expmath.org/expmath/volumes/8/8.html`.

[4] G. E. Andrews, *Problems and prospects for basic hypergeometric functions*, Theory and application of special functions, R. A. Askey, ed., Math. Res. Center, Univ. Wisconsin, Publ. No. 35, Academic Press, New York, pp. 191–224, 1975.

[5] G. E. Andrews, *The well-poised thread : an organized chronicle of some amazing summations and their implications*, Ramanujan J. **1**.1 (1997), 7–23.

[6] G. E. Andrews, R. A. Askey et R. Roy, *Special Functions*, The Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, vol. 71, (G.-C. Rota, ed.), Cambridge University Press, Cambridge (1999).

[7] R. Apéry, *Irrationalité de* $\zeta(2)$ *et* $\zeta(3)$, Astérisque **61** (1979), 11–13.

[8] W. N. Bailey, *Generalized hypergeometric series*, Cambridge University Press, Cambridge, 1935.

[9] K. Ball et T. Rivoal, *Irrationalité d'une infinité de valeurs de la fonction zêta aux entiers impairs*, Invent. Math. **146**.1 (2001), 193–207.

[10] P. T. Bateman et R. A. Horn, *A Heuristic Asymptotic Formula Concerning the Distribution of Prime Numbers*, Math. Comp. **16** (1962), 363–367.

[11] P. T. Bateman et R. M. Stemmler, *Waring's problem for algebraic numbers and primes of the form* $(p^r-1)/(p^d-1)$, Illinois J. Math. **6** (1962), 142–156.

[12] C. Batut et M. Olivier, *Sur l'accélération de la convergence de certaines fractions continues*, Volume **9** du Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux, année 1979-1980, exposé n° 23.

[13] D. Bertrand, *Séries d'Eisenstein et transcendance*, Bull. Soc. Math. France **104**.3 (1976), 309–321.

[14] F. Beukers, *A note on the irrationality of* $\zeta(2)$ *and* $\zeta(3)$, Bull. London Math. Soc. **11** (1979), 268–272.

[15] F. Beukers, *The values of polylogarithms*, Topics in classical number theory, Colloq. Math. Soc. János Bolyai, Budapest (1981), 219–228.

[16] F. Beukers, *Padé-approximations in number theory*, in : Padé approximation and its applications (Amsterdam, 1980), Lecture Notes in Math. 888, Springer (1981), 90–99.

[17] J. Borwein et D. Bradley, *Empirically Determined Apéry-Like Formulae*, Exp. Math. **6**.3 (1997), 181–194.
Disponible sur `http://www.expmath.org/expmath/volumes/6/6.html`.

[18] V. Bouniakowski, *Nouveaux théorèmes relatifs à la distribution des nombres premiers et à la décomposition des entiers en facteurs*, Mém. Acad. Sci. St. Petersbourg **6** (1857), 305–329.

[19] L. Carlitz, *Bernoulli and Euler numbers and orthogonal polynomials*, Duke Math. J. **26** (1959) 1–15.

[20] T. H. Chan, *Pair correlation of the zeros of the Riemann zeta function in longer ranges*, Acta Arith. **115**.2 (2004), 181–204.

[21] G. V. Chudnovsky, *Padé approximations to the generalized hypergeometric functions. I*, J. Math. Pures Appl. **58**.4 (1979), 445–476.

[22] H. Cohen, *Démonstration de l'irrationalité de* $\zeta(3)$ *(d'après Apéry)*, Sém. de Théorie des Nombres de Grenoble, octobre 1978 (9 p.).

[23] H. Cohen, *Accélération de la convergence de certaines récurrences linéaires*, Sémin. Théor. Nombres 1980–1981, Exposé no.16, 2 p. (1981).

[24] H. Cohen, *Généralisation d'une construction de R. Apéry*, Bull. Soc. Math. France **109** (1981), 269–281.
Disponible sur `http://www.numdam.org/accueil.php`.

[25] B. Conrad et K. Conrad, *The Möbius function and the residue theorem*, J. Num. Theory **110** (2005), 22–36.

[26] L. Dickson, *A new extension of Dirichlet's theorem on prime numbers*, Messenger of Math. **33** (1904), 155–161.

[27] S.B. Ekhad, programme disponible sur
`http://www.math.rutgers.edu/~zeilberg/tokhniot/EKHAD8`.

[28] S. Fischler, *Irrationalité de valeurs de zêta (d'après Apéry, Rivoal, ...)*, Séminaire Bourbaki 2002–2003, exposé no. 910 (novembre 2002), Astérisque 294 (2004), 27–62.
Disponible sur `http://front.math.ucdavis.edu/math.NT/0303066`.

[29] S. Fischler et T. Rivoal, *Approximants de Padé et séries hypergéométriques équilibrées*, J. Math. Pures Appl. **82**.10 (2003), 1369–1394.

[30] A. I. Galočkin, *Lower bounds of linear forms of the values of certain G-functions* (en russe), Mat. Zametki **18**.4 (1975), 541–552.

[31] G. Gasper et M. Rahman, *Basic hypergeometric series*, Encyclopedia of Mathematics And Its Applications 35, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[32] I. Gessel, *Applications of the classical umbral calculus*, Algebra Universalis **49**.4 (2003), no. 4, 397–434.

[33] S. Golomb, *The Lambda Method in Prime Number Theory*, J. Num. Theory **2** (1970), 193–198.

[34] G. A. Baker et P. Graves-Morris, *Padé approximants*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications **59**, Second Edition Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[35] L. A. Gutnik, *Irrationality of some quantities that contain* $\zeta(3)$, (en russe) Acta Arith. **42**.3 (1983), 255–264 ; trad. en anglais dans Amer. Math. Soc. Transl. (Ser. 2) **140** (1988), 45–55.

[36] G. H. Hardy et J. E. Littlewood, *Tauberian theorem concerning power series and Dirichlet's series whose coefficients are positive*, Proc. Lond. Math. Soc. **13**.2 (1914), 174–191.

[37] G. H. Hardy et J. E. Littlewood, *Some Problems of 'Partitio Numerorum.' III. On the Expression of a Number as a Sum of Primes*, Acta Math. **44** (1923), 1–70.

[38] G. H. Hardy, *A chapter from Ramanujan's note-book*, Proc. Camb. Phil. Soc. **21** (1923), 492–503.

[39] G. H. Hardy et E. M. Wright, *An introduction to the theory of numbers*, Fifth Edition, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1979.

[40] M. Hata, *Rational approximations to the dilogarithm*, Trans. Amer. Math. Soc. **336**.1 (1993), 363–387.

[41] D. R. Heath-Brown, *Primes represented by* $x^3 + 2y^3$, Acta Math. **186**.1 (2001), 1–84.

[42] M. Hindry et T. Rivoal, *Le Lambda-calcul de Golomb et la conjecture de Bateman-Horn*, soumis pour publication (2005).

[43] M. Kaneko, N. Kurokawa et M. Wakayama, *A variation of Euler's approach to values of the Riemann zeta function*, Kyushu J. Math. **57**.1 (2003), 175–192.
Disponible sur `http://front.math.ucdavis.edu/math.QA/0206171`.

[44] M. Koecher, *Letter to the editor*, Math. Intelligencer **2** (1980), 62–64.

[45] T. G. Hessami-Pilerhood *On the linear independence of vectors with polylogarithmic coordinates* (en russe), Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. 1999, , no. 6, 54–56 ; trad. en anglais dans in Moscow Univ. Math. Bull. 54 (1999), no. 6, 40–42 (2000).

[46] C. Krattenthaler, *HYP et HYPQ — Mathematica packages for the manipulation of binomial sums and hypergeometric series respectively q-binomial sums and basic hypergeometric series*, J. Symbol. Comput. **20** (1995), 737–744. Les programmes sont disponibles sur `http://igd.univ-lyon1.fr/~kratt`.

[47] C. Krattenthaler et T. Rivoal, *Hypergéométrie et fonction zêta de Riemann* (2004), à paraître aux Memoirs of the AMS.
Disponible sur `http://front.math.ucdavis.edu/math.NT/0311114`.

[48] C. Krattenthaler et T. Rivoal, *An identity of Andrews, multiple integrals, and very-well-poised hypergeometric series* (2003), à paraître au Ramanujan J.
Disponible sur `http://front.math.ucdavis.edu/math.CA/0312148`.

[49] C. Krattenthaler et T. Rivoal, *Approximants de Padé des q-polylogarithmes*, soumis pour publication (2004).
Disponible sur `http://front.math.ucdavis.edu/math.NT/0407191`.

[50] C. Krattenthaler et T. Rivoal, *How can we escape Thomae's relations ?* (2005), à paraître au J. Math. Soc. Japan.

[51] C. Krattenthaler, T. Rivoal et W. Zudilin, *Séries hypergéométriques basiques, q-analogues des valeurs de la fonction zêta et séries d'Eisenstein*, (2003) à paraître au J. Inst. Math. Jussieu.
Disponible sur `http://front.math.ucdavis.edu/math.NT/0311033`.

[52] D. H. Leshchiner, *Some new identities for* $\zeta(k)$, J. Number Theory **13** (1981), no. 3, 355–362.

[53] L. Lewin, *Polylogarithms and Associated Functions*, North-Holland, New York (1981).

[54] W. Maier, *Potenzreihen irrationalen Grenzwertes*, J. für. M. **156** (1927), 93–148.

[55] K. Mahler, *Applications of some formulae by Hermite to the approximation of exponentials and logarithms*, Math. Ann. **168** (1967), 200–227.

[56] J. Milnor, *On polylogarithms, Hurwitz zeta functions, and the Kubert identities*, Enseign. Math. (2) **29** (1983), no. 3-4, 281–322.

[57] P. Moree, *Artin's primitive root conjecture -a survey* - (2005), 30 pages.
Disponible sur `http ://front.math.ucdavis.edu/math.NT/0412262`.

[58] Yu. V. Nesterenko, *On the linear independence of numbers*, Vest. Mosk. Univ., Ser. I (1985), no. 1, 46–54 ; trad. en anglais dans Mosc. Univ. Math. Bull. **40**.1 (1985), 69–74.

[59] Yu. V. Nesterenko, *A few remarks on* $\zeta(3)$, (en russe) Mat. Zametki **59**.6 (1996), 865–880 ; trad. en anglais dans Math. Notes **59**.6 (1996), 625–636.

[60] E. M. Nikišin, *Irrationality of values of functions* $F(x, s)$, Mat. Sb. (N.S.) 109(151) (1979), no. 3, 410–417, 479.

[61] M. Prévost, *A new proof of the irrationality of* $\zeta(2)$ *and* $\zeta(3)$ *using Padé approximants*, J. Comput. Appl. Math. **67** (1996), no. 2, 219–235.

[62] M. Prévost et T. Rivoal, *Remainder Padé approximants for the exponential function*, soumis pour publication (2005).

[63] E. Reyssat, *Mesures de transcendance pour les logarithmes de nombres rationnels*, "Approximations diophantiennes et nombres transcendants" (Luminy, 1982), Progress in Mathematics, Birkhäuser (1983), 235–245.

[64] G. Rhin et C. Viola, *On a permutation group related to* $\zeta(2)$, Acta Arith. **77**.1 (1996), 23–56.

[65] G. Rhin et C. Viola, *The group structure for* $\zeta(3)$, Acta Arith. **97**.3 (2001), 269–293.

[66] G. Rhin et C. Viola, *The permutation group method for the dilogarithm*, prépublication (2004).

[67] T. Rivoal, *La fonction zêta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I Math. **331**.4 (2000), 267–270.
Disponible `http://front.math.ucdavis.edu/math.NT/0008051`.

[68] T. Rivoal, *Irrationalité d'au moins un des neuf nombres* $\zeta(5), \zeta(7), \ldots, \zeta(21)$, Acta Arith. **103**.2 (2002), 157–167.
Disponible `http://front.math.ucdavis.edu/math.NT/0104221`.

[69] T. Rivoal, *Propriétés diophantiennes des valeurs de la fonction zêta de Riemann aux entiers impairs*, thèse de doctorat, Université de Caen (2001).
Disponible sur `http://theses-EN-ligne.in2p3.fr`.

[70] T. Rivoal, *Séries hypergéométriques et irrationalité des valeurs de la fonction zêta de Riemann*, J. Théorie des Nombres de Bordeaux **15**.1 (2003), 351–365. Survol pour les Actes des Journées Arithmétiques de Lille (juillet 2001).

[71] T. Rivoal, *Indépendance linéaire de valeurs des polylogarithmes*, J. Théorie des Nombres Bordeaux **15**.2 (2003), 551–559. Actes des Rencontres Arithmétiques de Caen (juin 2001).

[72] T. Rivoal, *Selberg's integral and linear forms in zeta values*, J. Comp. et Appl. Math. **160** (2003), issues 1-2, 265–270. Proceedings of the International Conference on Special Functions 2002, Chennai (octobre 2002).

[73] T. Rivoal, *Nombres d'Euler, approximants de Padé et constante de Catalan* (2003), à paraître au Ramanujan J.

[74] T. Rivoal, *Simultaneous generation of Koecher and Almkvist-Granville Apéry-like formulae*, Experiment. Math. **13**.4 (2004), 503–508.

[75] T. Rivoal, *Very-well-poised hypergeometric series and the Denominators Conjecture*, survol pour les Proceedings of the Symposium in Analytic Number Theory and Surrounding Areas, RIMS, Kyoto (octobre 2004).

[76] T. Rivoal et W. Zudilin, *Diophantine properties of numbers related to Catalan's constant*, Math. Ann. **326** (2003), 705–721.

[77] S. Sato, *On a generalisation of Beukers' integrals* (en japonais), Master Thesis, Université de Tokyo, 2002.

[78] J. Sauloy, *Systèmes aux q-différences singuliers réguliers : classification, matrice de connexion et monodromie*, Ann. Inst. Fourier Grenoble **50** (2000), no. 4, 1021–1071.

[79] A. Schinzel et W. Sierpinski, *Sur certaines hypothèses concernant les nombres premiers*, Acta Arith. **4** (1958), 185–208.

[80] A. Selberg, *Remarks on a multiple integral* (en norvégien), Norsk Mat. Tidsskr. **26** (1944), 71–78.

[81] L. J. Slater, *Generalized hypergeometric functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1966.

[82] V. N. Sorokin, *Apéry's theorem* (en russe), Vestnik. Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. no. 3 (1998), 48–52 ; trad. en anglais dans Moscow Univ. Math. Bull. no. 3 (1998), 48–52

[83] T. Terasoma, *Mixed Tate motives and multiple zeta values*, Invent. Math. **149**.2 (2002), 339–369.

[84] J. Thomae, *Ueber die Functionen, welche durch Reihen von der Form dargestellt werden :* $1+\frac{p}{1}\,\frac{p'}{q'}\,\frac{p''}{q''}+\frac{p}{1}\,\frac{p+1}{2}\,\frac{p'}{q'}\,\frac{p'+1}{q'+1}\,\frac{p''}{q''}\,\frac{p''+1}{q''+1}+\cdots$, Borchardts J. für Math. (J. reine angew. Math.) **87** (1879), 26–73.

[85] A. van der Poorten, *A proof that Euler missed... Apéry's proof of the irrationality of $\zeta(3)$. An informal report*, Math. Intelligencer **1** (1978/79), no. 4, 195–203.

[86] A. van der Poorten, *Some wonderful formulas... An introduction to polylogarithms*, Queen's Papers in Pure et Applied Mathematics **54**, Proc. 1979 Queen's Number Theory Conference, 1980, 269–286.

[87] J. Van der Jeugt et K. Srinivasa Rao, *Invariance groups of transformations of basic hypergeometric series*, J. Math. Phys. **40**.12 (1999), 6692–6700.

[88] D. V. Vasilyev, *Some formulas for the Riemann zeta function at integer points*, Vestnik Moskov. Univ. Ser I Mat. Mekh. **51**.1 (1996), pp. 81–84, trad. en anglais dans Moscow Univ. Math. Bull. **51**.1 (1996), pp. 41–43.

[89] D. V. Vasilyev, *On small linear forms for the values of the Riemann zeta-function at odd points*, prépublication no.1 (558), Nat. Acad. Sci. Belarus, Institute Math., Minsk (2001).

[90] M. Waldschmidt, *Valeurs zêtas multiples. Une introduction*, J. Théor. Nombres Bordeaux **12** (2000), 581–595.

[91] J. A. Wilson, *Some hypergeometric orthogonal polynomials*, SIAM J. Math. Anal. **11** (1980), no. 4, 690–701.

[92] D. Zeilberger, *The method of creative telescoping*, J. Symbolic Comput. **11** (1991), 195–204.

[93] W. Zudilin, *Well-poised hypergeometric service for diophantine problems of zeta values*, J. Théor. Nombres Bordeaux **15**.2 (2003), 593–626. Actes des 12èmes rencontres arithmétiques de Caen (juin 2001).

[94] W. Zudilin, *Arithmetic of linear forms involving odd zeta values*, J. Théor. Nombres Bordeaux **16** (2004), 251–291.
Disponible à `http://front.math.ucdavis.edu/math.NT/0206176`.

[95] W. Zudilin, *Irrationality of values of Riemann's zeta function* (en russe), Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. **66**.3, 49–102 (2002) ; trad. en anglais dans Russian Acad. Sci. Izv. Math. **66**.3 (2002), 489–542.

[96] W. Zudilin, *A few remarks on linear forms involving Catalan's constant*, `http://front.math.ucdavis.edu/math.NT/0210423` ; version russe dans Chebyshev Sbornik (Tula State Pedagogical University) **3 :2**(4) (2002), 10 pages.

[97] W. Zudilin, *Diophantine problems for q-zeta values* (en russe), Mat. Zametki **72**.6 (2002), 936–940.

[98] W. Zudilin, *On the functional transcendence of q-zeta values* (en russe) Mat. Zametki **73**.4 (2003), 629–630 ; trad. en anglais dans Math. Notes **73** (2003), no. 3-4, 588–589