NOMBRES D'EULER, APPROXIMANTS DE PADÉ ET CONSTANTE DE CATALAN

TANGUY RIVOAL

Résumé. Au moyen d'une méthode d'approximation de Padé introduite par Prévost dans [13], nous construisons des familles d'approximations rationnelles rapidement convergentes vers la constante de Catalan G. Bien que cela ne suffise pas à prouver l'irrationalité de G, nous montrons le lien inattendu avec la méthode hypergéométrique récemment mise en avant dans l'étude diophantienne des fonctions zêta de Riemann et beta de Dirichlet, ce qui nous permet de prouver la « conjecture des dénominateurs » de [17].

1. Introduction

1.1. Une méthode d'approximation diophantienne. La démonstration d'Apéry de l'irrationalité de $\zeta(3)$ revient à prouver l'existence d'une suite de rationnels b_n tels que

$$0 < \left| \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2 \binom{n+j}{j}^2 \zeta(3) - b_n \right| < \zeta(3)(\sqrt{2}-1)^{4n}, \tag{1}$$

et $d_n^3 b_n \in \mathbb{Z}$ avec $d_n = \mathrm{ppcm}\{1, 2, \ldots, n\}$. Il existe de nombreuses démonstrations de ce résultat (voir [10] pour un exposé exhaustif), dont une due à Prévost [13] : sa méthode consiste à déterminer pour $n \geq 0$ les approximants de Padé diagonaux[1] $[2n/2n](z)$ de la fonction zêta d'Hurwitz $R(z) = \zeta(3, 1/z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^3}{(jz+1)^3}$, de sorte que

$$\zeta(3) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^3} + R(1/n) \approx \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^3} + [2n/2n](1/n).$$

Prévost conclut en montrant que l'on retrouve (1) et applique aussi sa méthode pour prouver l'irrationalité de $\zeta(2)$ et de $\log(1-z)$, pour certains rationnels z. Récemment, diverses suites d'approximations rationnelles de la constante de Catalan $G = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$ ont été construites dans [17] au moyen de séries hypergéométriques. Dans le cas le plus simple, l'équivalent du dénominateur d_n^3 pour $\zeta(3)$ est $2^{4n} d_{2n}^3$ et *conjecturalement* $2^{4n} d_{2n}^2$ (*cf.* [17], p. 16). Cette conjecture est presque prouvée par Zudilin dans [23] : il montre en effet que l'on peut prendre $2^{4n+o(n)} d_{2n}^2$, ce qui suffit pour les applications mais reste malheureusement trop gros pour en déduire l'irrationalité de G.

[1] La notation $[\cdot/\cdot]$ est à distinguer de $\lfloor \cdot \rfloor$, qui désigne la partie entière.

1.2. **Les résultats.** En nous basant sur certaines formules explicites données par Carlitz [7] et Wilson [21], nous appliquons dans cet article la méthode de Prévost en produisant *simultanément* des familles d'approximations rationnelles de π^2 et G :

Théorème 1. *Soit $r > 0$ un rationnel et $n \geq 1$ un entier tels que rn soit entier. On pose $\rho = \max(1, r)$.*

i) Il existe deux suites de rationnels $(u_n(r))_{n\geq 0}$ et $(v_n(r))_{n\geq 0}$ telles que $2^{4n}u_n(r)$ et $2^{4n}d_{2\rho n}^2 v_n(r)$ soient entiers et

$$|u_n(r)G - v_n(r)| \leq \frac{1}{(2rn)^2\, u_n(r)}. \tag{2}$$

ii) Il existe deux suites de rationnels $(U_n(r))_{n\geq 0}$ et $(V_n(r))_{n\geq 0}$ telles que $U_n(r)$ et $d_{\rho n}^2 V_n(r)$ soient entiers et

$$\left| U_n(r)\frac{\pi^2}{12} - V_n(r) \right| \leq \frac{1}{(2rn+1)^2\, U_n(r)}.$$

iii) On a

$$\lim_{n\to+\infty} |u_n(r)|^{1/n} = \lim_{n\to+\infty} |U_n(r)|^{1/n} = \frac{(r+\sigma(r))^r}{(1-\sigma(r))(r-\sigma(r))^r} > 1.$$

où $\sigma(r) = \frac{1}{2}\sqrt{r^4+4r^2} - \frac{1}{2}r^2$. Ces limites sont des fonctions croissantes de $r \geq 1$.

Ce théorème sera démontré au §4, où l'on explicitera les diverses suites impliquées ; par exemple pour tout rationnel r tel que rn soit entier, on a

$$u_n(r) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\binom{rn-\frac{1}{2}}{j}\binom{rn+j-\frac{1}{2}}{j}.$$

On construit ainsi des suites d'approximations de G et π^2 qui convergent géométriquement aussi rapidement que voulu, mais au prix d'un accroissement des dénominateurs. Malheureusement, aucune valeur de r ne semble prouver l'irrationalité de G. En revanche, le choix $r = 1$ fournit l'approximation diophantienne de π^2 donnée par Apéry, puisque dans ce cas,

$$U_n(1) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2 \binom{n+j}{n}.$$

Des calculs numériques suggèrent que la meilleure mesure d'irrationalité de π^2 que l'on puisse obtenir en faisant varier le paramètre rationnel r dans $]0, +\infty[$ est celle, bien connue, atteinte en $r = 1$ (voir [20]).

Pour démontrer le Théorème 1, nous construirons dans un premier temps des approximants de Padé d'une certaine fonction Φ et dont le développement de Taylor à l'origine ne converge qu'en 0. Cette construction constitue la **Proposition 2** au §3. Elle fait appel à certains endroits au *calcul symbolique* (voir [18]).

Nous reviendrons au §5 sur le cas $r = 1$ du Théorème 1 en faisant le lien avec la *méthode hypergéométrique*, développée dans [4, 12, 15, 17], entre autres. Dans le cas de G, ce lien nous permet de prouver complètement la conjecture des dénominateurs de [17], rappelée au §1.1, en éliminant le $o(n)$ en trop dans le résultat de Zudilin (**Théorème 2** au §5.1).

1.3. **Notations.** Les fonctions hypergéométriques sont définies par le développement en série :

$$ {}_pF_q\left[\begin{matrix}\alpha_1 & ,\alpha_2, & \ldots, & \alpha_p \\ \beta_1 & ,\beta_2, & \ldots, & \beta_q\end{matrix}\ ;\ z\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_k(\alpha_2)_k\cdots(\alpha_p)_k}{(1)_k(\beta_1)_k\cdots(\beta_q)_k} z^k\ . $$

Ici, p et q sont des entiers positifs, z, α_j et β_j sont des nombres complexes tels que $|z|\leq 1$, $\beta_j\notin\mathbb{Z}_{\leq 0}$, et $(x)_n = x(x+1)\cdots(x+n-1)$ est le symbole de Pochhammer. Pour plus de détails, on se reportera à [3] ou [19]. Nous ferons un usage important de l'algorithme Ekhad développé par Zeilberger : cet algorithme calcule les récurrences vérifiées par des suites de type hypergéométrique et est programmé sous de nombreux systèmes de calcul formel (voir le lien vers ces programmes dans [9])

Pour construire des approximations de π^2 et G, nous utilisons les deux fonctions suivantes avec $s=2$:

$$ (2^{1-s}-1)\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^s} \quad \text{et} \quad \beta(s) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^s}. $$

L'équivalent de la fonction R citée en introduction sera ici

$$ \Psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^2}{((2k+1)z+1)^2}. \tag{3} $$

Cette série définit une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}\setminus\{0,-1,-1/3,-1/5,\ldots\}$ et pour tout entier $n\geq 0$, on a

$$ -\frac{\pi^2}{12} = -\frac{1}{2}\zeta(2) = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k^2} + (-1)^n 4\Psi\left(\frac{1}{2n+1}\right) $$

et

$$ G = \beta(2) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} + (-1)^n\Psi\left(\frac{1}{2n}\right). \tag{4} $$

Selon la parité de l'entier m, $\Psi(1/m)$ est donc le reste de la série produisant $-\pi^2/12$ ou G. Nous allons déterminer certains approximants de Padé d'une fonction Φ, définie en (6) et liée à Ψ (Proposition 1 ci-dessous), et en déduire des approximations rationnelles de ces deux nombres.

Nous aurons besoin de la suite $(E_n)_{n\geq 0}$ des nombre d'Euler, définis par la série génératrice paire (donc $E_{2k+1}=0$) :

$$ \sum_{k=0}^{\infty} E_k\,\frac{z^k}{k!} = \frac{2e^z}{e^{2z}+1}. $$

Ces nombres se représentent[2] pour tout entier $k \geq 0$ par :

$$E_k = i^k 2^k \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u^k}{\cosh(\pi u)}\,\mathrm{d}u = -i \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{(2u)^k}{\cos(\pi u)}\,\mathrm{d}u.$$

En intégrant par parties, on en déduit que pour tout entier $k \geq 0$,

$$(5) \qquad (k+1)E_k = i \int_{-i\infty}^{+i\infty} (2u)^k \,\frac{u\pi\ \sin(\pi u)}{\cos^2(\pi u)}\,\mathrm{d}u.$$

Définissons maintenant, pour tout $z \notin i\mathbb{R}$, la fonction

$$(6) \qquad \Phi(z) = i\frac{z^2}{2} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{1}{1-2zu} \cdot \pi u \,\frac{\sin(\pi u)}{\cos^2(\pi u)}\,\mathrm{d}u.$$

La droite $i\mathbb{R}$ est une coupure pour la fonction Φ qui est donc holomorphe sur deux demi-plans ouverts disjoints. La proposition suivante établit le lien annoncé entre Φ et Ψ.

Proposition 1. *Pour tout z complexe tel que* $\mathrm{Re}(z) > 0$, *on a* $\Phi(z) = \Psi(z)$.

Remarque. L'expression (6) montre que $\Phi(-z) = \Phi(z)$ pour tout $z \notin i\mathbb{R}$. Compte-tenu des singularités de Ψ, on n'a donc pas $\Phi(z) = \Psi(z)$ dans le demi-plan $\mathrm{Re}(z) < 0$.

Démonstration. Soit $\mathcal{R}_T$ le contour rectangulaire, orienté dans le sens direct, de sommets $\pm iT$, $-T \pm iT$, $T > 0$ entier. Fixons z tel que $\mathrm{Re}(z) > 0$, de sorte que les seules singularités en u de la fonction $F(z,u) = \frac{1}{1-2zu} \cdot \pi u \frac{\sin(\pi u)}{\cos^2(\pi u)}$ à l'intérieur de $\mathcal{R}_T$ sont des pôles doubles en $-1/2, -3/2, \ldots, -T+1/2$. Le théorème des résidus (et leur calcul) montre que

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{R}_T} F(z,u)\,\mathrm{d}u = \sum_{k=0}^{T-1} \mathrm{Res}_{u=-k-\frac{1}{2}}(F(z,u)) = -\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{T-1} \frac{(-1)^k}{((2k+1)z+1)^2}.$$

En suivant la démarche de [16], p.8, on montre que

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{R}_T} F(z,u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2i\pi}\int_{-i\infty}^{+i\infty} F(z,u)\,\mathrm{d}u,$$

et la proposition en découle.

[2]Cette identité est incorrectement écrite sans le facteur 2^k dans [7], p. 12, (7.6).

1.4. **Rappels sur l'approximation de Padé.** Nous reprenons ici essentiellement l'exposition de [13], dans un cas particulier. Soit $F(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j$ une série formelle de $\mathbb{C}[[z]]$. L'approximant de Padé $[m/n]_F = [m/n]$ de $F(z)$ est une fraction rationnelle $\tilde{B}_m(z)/\tilde{A}_n(z)$ où $\tilde{A}_n$ et $\tilde{B}_m$ sont des polynômes de degré n, resp. m tels que $\tilde{A}_n(z)F(z) - \tilde{B}_m(z) = \mathrm{O}(z^{m+n+1})$. Il n'y a pas forcément unicité des polynômes $\tilde{A}_n$ et $\tilde{B}_m$ mais la fraction $\tilde{B}_m/\tilde{A}_n$ est unique. Nous décrivons maintenant une façon de construire des approximants de Padé $[n-1/n]$, via les polynômes orthogonaux formels associés à c. On se référera à [8] à ce sujet. À la suite des coefficients $(c_j)_{j\geq 0}$, on associe la fonctionnelle linéaire $c : \mathbb{C}[[t]] \to \mathbb{C}$ telle que $c(t^j) = c_j$. Pour $P \in \mathbb{C}[[t]]$, on notera souvent $P(c)$ pour $\langle c, P\rangle$, quand il n'y aura pas de confusion possible.

En posant $A_n(z) = z^n \tilde{A}_n(1/z)$, le dénominateur $\tilde{A}_n$ vérifie la relation d'orthogonalité

$$\langle c, t^j A_n(t)\rangle = 0 \quad \text{pour tout} \quad j = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{7}$$

En remarquant que $F(1/z) = z\, c\left(\dfrac{1}{t-z}\right)$, on vérifie que le numérateur est donné par

$$B_{n-1}(z) = c\left(\frac{A_n(z) - A_n(t)}{z-t}\right),$$

où $B_{n-1}(z) = z^{n-1}\tilde{B}_{n-1}(1/z)$. Cette formule est fréquemment utilisée dans les applications diophantiennes des approximants de Padé (voir par exemple [2]). On montre que l'on a l'estimation suivante du terme d'erreur :

$$F(z) - [n-1/n](z) = \frac{1}{A_n^2(1/z)}\, c\left(\frac{A_n^2(t)}{1-zt}\right).$$

On peut avoir des expressions moins formelles dans le cas où les c_j sont les moments d'une mesure, c'est-à-dire admettent une représentation intégrale de la forme $c_j = \int_L t^j\, v(t)\mathrm{d}t$ avec v intégrable, de signe constant sur une droite L de $\mathbb{C}$, par exemple. La relation d'orthogonalité (7) prend la forme plus habituelle $\int_L t^j A_n(t)\, v(t)\mathrm{d}t = 0$ pour tout $j = 0, 1, \ldots, n-1$, et toutes les racines des polynômes A_n sont situées sur L. Le reste de l'approximant devient pour sa part

$$F(z) - [n-1/n](z) = \frac{1}{A_n^2(1/z)} \int_L \frac{A_n^2(t)}{1-zt}\, v(t)\mathrm{d}t.$$

Enfin, remarquons que si $c_0 = c_1 = 0$, alors $[m/n]_F = z^2[m-2/n]_{F/z^2}$.

2. Approximants de Padé de Φ

L'intégrale (6) est en fait bien définie en $z = 0$, et on peut même dériver indéfiniment sous le signe $\int$ en considérant Φ comme fonction de la variable réelle z. Compte-tenu de (5), on peut ainsi calculer le développement de Taylor de Φ :

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)E_k z^{k+2},$$

qui ne converge que pour $z=0$. En utilisant une suite de polynômes orthogonaux introduits par Wilson [21], nous allons maintenant déterminer l'approximant de Padé $[2n+1/2n](z)$ de $\Phi(z)$. Soit E la fonctionnelle définie pour tout entier $k \geq 0$ par $\langle E, t^k\rangle = (k+1)E_k$. Comme

$$\pi u \frac{\sin(\pi u)}{\cos^2(\pi u)} = 2\frac{|\Gamma(u+\frac{1}{2})|^6}{|\Gamma(2u)|^2},$$

on peut réécrire (6) sous la forme

$$\Phi(z) = iz^2 \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{1}{1-2zu} \cdot \frac{|\Gamma(u+\frac{1}{2})|^6}{|\Gamma(2u)|^2}\,\mathrm{d}u = \frac{z^2}{2}\left\langle E, \frac{1}{1-zu}\right\rangle .$$

Pour tout polynôme P, on a également

$$P(E) = 2i \int_{-i\infty}^{+i\infty} P(2u) \cdot \frac{|\Gamma(u+\frac{1}{2})|^6}{|\Gamma(2u)|^2}\,\mathrm{d}u = i \int_{-i\infty}^{+i\infty} P(u) \cdot \frac{|\Gamma(\frac{u}{2}+\frac{1}{2})|^6}{|\Gamma(u)|^2}\,\mathrm{d}u.$$

Introduisons la suite des polynômes de degré $2n$:

$$P_{2n}(z) = {}_3F_2\left[\begin{matrix} -n, & \frac{-z+1}{2}, & \frac{z+1}{2} \\ & 1, & 1 \end{matrix} ;1\right] = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\binom{\frac{z-1}{2}}{j}\binom{j+\frac{z-1}{2}}{j}.$$

Clairement, P_{2n} est un polynôme pair et le coefficient de z^{2n} est $p_{2n,2n} = \dfrac{1}{n!^2 4^n}$. Définissons également la suite des polynômes de degré $2n-1$:

$$Q_{2n}(z) = \frac{z}{4}\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}\sum_{k=1}^{j}\binom{\frac{z-1}{2}+j}{j-k}\binom{\frac{z-1}{2}-k}{j-k}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2\binom{j}{k}^2}.$$

Posons $\tilde{Q}_{2n}(z) = z^{2n-1}Q_{2n}(1/z)$ et $\tilde{P}_{2n}(z) = z^{2n}P_{2n}(1/z)$.

Proposition 2. *La fraction rationnelle* $\dfrac{z^2\tilde{Q}_{2n}(z)}{2\tilde{P}_{2n}(z)}$ *est l'approximant de Padé* $[2n+1/2n]$ *de* $\Phi(z)$. *De plus pour tout* $z \notin i\mathbb{R}$,

(8) $$\left|\Phi(z) - \frac{z^2\tilde{Q}_{2n}(z)}{2\tilde{P}_{2n}(z)}\right| \leq \frac{|z|^2}{2\mu(z)|P_{2n}(1/z)|^2},$$

où $\mu(z) = \min\{|1-2zu|, u \in i\mathbb{R}\} > 0$.

Remarque. La majoration (8) reste vraie en $z=0$ en prolongeant par continuité, puisque $\Phi(0)=0$.

La démonstration nécessite deux lemmes.

Lemme 1. *i) Les polynômes* $\pi_n(z) = P_{2n}(z)$ *vérifient la récurrence*

(9) $$4(n+1)^2\pi_{n+1}(z) = (z^2+8n^2+8n+3)\pi_n(z) - 4n^2\pi_{n-1}(z).$$

ii) Pour tous entiers k, n tels que $0 \leq k < 2n$, on a les relations d'orthogonalité

$$\text{(10)} \qquad i \int_{-i\infty}^{+i\infty} u^k P_{2n}(u) \cdot \frac{|\Gamma(\frac{u}{2}+\frac{1}{2})|^6}{|\Gamma(u)|^2} \,\mathrm{d}u = E^k P_{2n}(E) = 0.$$

iii) Pout tout entier $n \geq 0$, $P_{2n}^2(E) = 1$.

iv) Pour tout entier $n \geq 0$, les racines du polynôme P_{2n} sont sur $i\mathbb{R}$.

Démonstration. i) Il suffit d'appliquer l'algorithme de Zeilberger.

ii) La relation d'orthogonalité (10) est un cas particulier d'une construction très générale due à Wilson [21], auquel nous renvoyons pour plus de détails.

iii) En multipliant la relation de récurrence (9) par z^{2n-2}, on déduit de la relation d'orthogonalité (10) que

$$E^{2n} P_{2n}(E) = 4n^2 E^{2n-2} P_{2n-2}(E) = \cdots = 4^n n!^2 P_0(E) = 4^n n!^2.$$

Comme $P_{2n}^2(E) = p_{2n,2n} E^{2n} P_{2n}(E)$ avec $p_{2n,2n} = \frac{1}{n!^2 4^n}$, l'assertion en découle.

iv) C'est une conséquence de la théorie générale des polynômes orthogonaux, comme rappelée au §2.3.

Définissons maintenant des polynômes de degré $2n-1$ par

$$q_{2n}(z) = \left\langle E, \frac{P_{2n}(z) - P_{2n}(t)}{z-t} \right\rangle.$$

La fraction $\tilde{q}_{2n}(z)/\tilde{P}_{2n}(z)$ est donc l'approximant de Padé $[2n-1/2n]$ de $2\Phi(z)/z^2$, avec $\tilde{q}_{2n}(z) = z^{2n-1} q_{2n}(1/z)$ et $\tilde{P}_{2n}(z) = z^{2n} P_{2n}(1/z)$.

Lemme 2. *Pour tout entier $n \geq 0$, on a $q_{2n}(z) = Q_{2n}(z)$.*

Démonstration. Posons

$$N_{2k}(z) = \binom{\frac{z-1}{2}}{k}\binom{\frac{z-1}{2}+k}{k}, \quad N_{2k+1}(z) = \binom{\frac{z-1}{2}}{k+1}\binom{\frac{z-1}{2}+k}{k}.$$

On a

$$q_{2n}(z) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left\langle E, \frac{N_{2j}(z) - N_{2j}(t)}{z-t} \right\rangle,$$

et la formule (55) de [13] donne ici

$$\frac{N_{2j}(z) - N_{2j}(t)}{z-t} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2j} \frac{N_{2j}(z)}{N_k(z)} \cdot \frac{N_{k-1}(t)}{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}.$$

Pour aller plus avant, on a besoin des deux identités suivantes, que nous démontrerons un peu plus loin : pour tout entier $k \geq 0$,

$$N_{2k-2}(E) = (-1)^{k-1} \quad \text{et} \quad N_{2k-1}(E) = (-1)^k \frac{k-\frac{1}{2}}{k}. \tag{11}$$

Après quelques manipulations simples, on en déduit que

$$q_{2n}(z) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} \sum_{k=1}^{j} \frac{(-1)^{k-1}}{k} N_{2j}(z) \left(\frac{1}{N_{2k-1}(z)} - \frac{k-\frac{1}{2}}{k\, N_{2k}(z)} \right).$$

Comme $N_{2k-1}(z) = \frac{k}{\frac{z-1}{2}+k} N_{2k}(z)$, on a donc

$$\begin{aligned} q_{2n}(z) &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} \sum_{k=1}^{j} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \frac{N_{2j}(z)}{N_{2k}(z)} \left(\frac{\frac{z-1}{2}+k}{k} - \frac{k-\frac{1}{2}}{k} \right) \\ &= \frac{z}{4} \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} \sum_{k=1}^{j} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} \frac{N_{2j}(z)}{N_{2k}(z)} \\ &= \frac{z}{4} \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} \sum_{k=1}^{j} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2 \binom{j}{k}^2} \binom{\frac{z-1}{2}+j}{j-k} \binom{\frac{z-1}{2}-k}{j-k} = Q_{2n}(z). \end{aligned}$$

Démonstration de (11). Partons de l'identité combinatoire générale ([14], p. 44, (1b)) liant deux suites $A = (a_n)_{n \geq 0}$ et $B = (b_n)_{n \geq 0}$:

$$\forall n \geq 0\,,\ a_n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} b_j \quad \Longleftrightarrow \quad \forall n \geq 0\,,\ b_n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} a_j. \tag{12}$$

On peut démontrer (12) formellement en remarquant qu'en terme de séries génératrices, on a

$$\frac{1}{1-Az} = \frac{1}{1-(1+B)z} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{1-Bu} = \frac{1}{1+(1-A)u},$$

via le changement de variable $u = z/(1-z)$. (Prévost m'a fait remarquer que cela revient aussi formellement à noter que $A = I + B \Longleftrightarrow B = A - I$ avec I défini par $\langle I, t^n \rangle = 1$.)

Comme pour tout entier $k \geq 0$, on a $P_{2k}(z) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} N_{2j}(z)$, on déduit de (12) que pour tout entier $k \geq 0$,

$$N_{2k}(z) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} P_{2j}(z).$$

Par linéarité de E et orthogonalité de P_{2n}, on a donc

$$N_{2k}(E) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} P_{2j}(E) = (-1)^k P_0(E) = (-1)^k.$$

De plus, $N_{2k+1}(z) = \frac{\frac{z-1}{2}-k}{k+1} N_{2k}(z)$, d'où, toujours par linéarité et orthogonalité,

$$N_{2k+1}(E) = \frac{(-1)^k}{2(k+1)} EP_0(E) + (-1)^{k+1} \frac{k+\frac{1}{2}}{k+1} P_0(E) = (-1)^{k+1} \frac{k+\frac{1}{2}}{k+1},$$

en notant que $EP_0(E) = \langle E, z \rangle = 2E_1 = 0$.

Démonstration de la Proposition 2. L'assertion sur $\dfrac{z^2 \tilde{Q}_{2n}(z)}{2\tilde{P}_{2n}(z)}$ est déjà démontrée puisque $q_{2n}(z) = Q_{2n}(z)$. Pour démontrer (8), on utilise le fait que, étant orthogonaux sur $i\mathbb{R}$, les polynômes P_{2n} ont tous leurs zéros sur $i\mathbb{R}$. Donc $P_{2n}^2(u)$ est de signe constant sur $i\mathbb{R}$, et pour tout $z \notin i\mathbb{R}$, on a

$$\left| 2i \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{P_{2n}^2(2u)}{1-2zu} \cdot \frac{|\Gamma(u+\frac{1}{2})|^6}{|\Gamma(2u)|^2} \,\mathrm{d}u \right| \le \frac{1}{\mu(z)} \left| 2i \int_{-i\infty}^{+i\infty} P_{2n}^2(2u) \cdot \frac{|\Gamma(u+\frac{1}{2})|^6}{|\Gamma(2u)|^2} \,\mathrm{d}u \right| = \frac{|P_{2n}^2(E)|}{\mu(z)} = \frac{1}{\mu(z)}.$$

Donc

$$\left| \Phi(z) - \frac{z^2 \tilde{Q}_{2n}(z)}{2\tilde{P}_{2n}(z)} \right| = \left| \frac{iz^2}{P_{2n}^2(1/z)} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{P_{2n}^2(2u)}{1-2zu} \cdot \frac{|\Gamma(u+\frac{1}{2})|^6}{|\Gamma(2u)|^2} \,\mathrm{d}u \right| \le \frac{|z|^2}{2\mu(z)|P_{2n}(1/z)|^2}.$$

3. Approximations rationnelles de G et π^2 : preuve du Théorème 1

On peut maintenant déduire de la Proposition 2 les approximations envisagées. La démonstration du Théorème 1 utilise le lemme suivant.

Lemme 3. *i) Pour tout réel $r > 0$,*

$$\lim_{n\to+\infty} |P_{2n}(2rn+\nu)|^{1/n} = \frac{(r+\sigma(r))^r}{(1-\sigma(r))(r-\sigma(r))^r}$$

avec $\nu = 0$ ou 1.

ii) Si on suppose de plus que r est un rationnel tel que rn soit entier, alors les nombres $P_{2n}(2rn+1)$, $2^{4n} P_{2n}(2rn)$, $\dfrac{2^{4n} d_{2n}^2}{2rn} Q_{2n}(2rn)$ et $\dfrac{d_n^2}{2rn+1} Q_{2n}(2rn+1)$ sont entiers.

Démonstration du Lemme 3. i) En appliquant la formule de Stirling à

$$P_n(2rn+\nu) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \binom{rn+\frac{\nu-1}{2}}{j} \binom{j+rn+\frac{\nu-1}{2}}{j},$$

on montre que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}|P_{2n}(2rn+\nu)|^{1/n} &= \max_{t\in[0,1]}\frac{(r+t)^{r+t}}{t^{3t}(1-t)^{1-t}(r-t)^{r-t}}\\ &= \frac{(r+\sigma(r))^r}{(1-\sigma(r))(r-\sigma(r))^r}.\end{aligned}$$

où $\sigma(r)=\frac{1}{2}\sqrt{r^4+4r^2}-\frac{1}{2}r^2$ est racine de l'équation $t^3-(r^2-t^2)(1-t)=0$.

ii) Pour tous entiers $1\le i\le n$, il est facile de voir que $i\binom{n}{i}$ divise d_n (*cf.* [13]) et $2^{2j}\binom{k+\frac{1}{2}}{j}$ est entier pour tous entiers j,k. Les assertions en découlent, compte-tenu des expressions explicites de $P_{2n}(z)$ et $Q_{2n}(z)$.

Démonstration du Théorème 1. i) L'équation (4) et la Proposition 1 en $z=1/(2rn)>0$ nous donnent

$$\begin{aligned}G &= \sum_{k=1}^{rn-1}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}+(-1)^{rn}\Psi\left(\frac{1}{2rn}\right)=\sum_{k=1}^{rn-1}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}+(-1)^{rn}\Phi\left(\frac{1}{2rn}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{rn-1}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}+(-1)^{rn}\frac{1}{4rn}\frac{Q_{2n}(2rn)}{P_{2n}(2rn)}+(-1)^{rn}E_n(2rn),\end{aligned}$$

en notant $E_n(2rn)$ le membre de gauche de (8) évalué en $z=1/(2rn)$. Donc

$$(-1)^{rn}P_{2n}(2rn)E_n(2rn)=P_{2n}(2rn)G-P_{2n}(2rn)\sum_{k=1}^{rn-1}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}-(-1)^{rn}\frac{1}{4rn}Q_{2n}(2rn).$$

On pose alors $u_n(r)=P_{2n}(2rn)$ et $v_n(r)=P_{2n}(2rn)\sum_{k=1}^{rn-1}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}+\frac{(-1)^{rn}}{4rn}Q_{2n}(2rn)$, qui ont le bon dénominateur par le Lemme 3, *ii)*. On applique ensuite la majoration (8) et Lemme 3, *i)* avec $\nu=0$ pour obtenir (2).

ii) On omet les détails puisque c'est la même démarche avec $z=1/(2rn+1)$: on a $U_n(r)=P_{2n}(2rn+1)$, etc.

Remarque. Rien n'oblige à choisir z de la forme $an+b$ avec a et b constants dans la Proposition 2 : on peut aussi choisir une autre fonction $z=g(n)\in 2\,\mathbb{N}$ pour obtenir une convergence encore plus rapide vers G. Les dénominateurs des approximations ont évidemment un comportement différent et, de nouveau, aucun choix ne semble contrer leur influence.

4. Lien avec la « méthode hypergéométrique »

4.1. **Preuve de la conjecture de dénominateurs de** [17]**.** On peut obtenir les approximations de π^2 pour $r = 1$ de très nombreuses façons, en particulier au moyen de séries de type hypergéométrique :

$$(-1)^n n! \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-n)_n}{(k)_{n+1}^2} = U_n(1)\zeta(2) - 2V_n(1). \tag{13}$$

De telles séries ont été à la base des récents progrès concernant l'irrationalité des valeurs des fonctions zêta et beta. En particulier, des approximations rationnelles[3] de G ont été construites dans [17], au moyen de la série hypergéométrique

$$\mathbf{S}_n = n! \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(k + \frac{n-1}{2}\right) \frac{(k-n)_n (k+n)_n}{\left(k-\frac{1}{2}\right)_{n+1}^3} = \mathbf{a}_n G - \mathbf{b}_n, \tag{14}$$

avec $\mathbf{a}_n$ et $\mathbf{b}_n$ des rationnels vérifiant $2^{4n} d_{2n} \mathbf{a}_n \in \mathbb{Z}$ et $2^{4n} d_{2n}^3 \mathbf{b}_n \in \mathbb{Z}$. Les suites $(\mathbf{a}_n)_{n\geq 0}$, $(\mathbf{b}_n)_{n\geq 0}$ et $(\mathbf{S}_n)_{n\geq 0}$ vérifient toutes les trois la récurrence

$$\begin{aligned} &4(2n+1)^2(n+1)^2(20n^2-8n+1)y_{n+1} \\ &\quad = (3520n^6+5632n^5+2064n^4-384n^3-156n^2+16n+7)y_n \\ &\qquad\qquad + 4(2n-1)^2n^2(20n^2+32n+13)y_{n-1}, \end{aligned} \tag{15}$$

avec $\mathbf{a}_0 = 4$, $\mathbf{a}_1 = 7$, $\mathbf{b}_0 = 0$ et $\mathbf{b}_1 = 13/2$ (voir [22] pour plus de détails). Le calcul d'un grand nombre de valeurs de $\mathbf{a}_n$ et $\mathbf{b}_n$ à l'aide de (15) a suggéré l'amélioration suivante : $2^{4n}\mathbf{a}_n \in \mathbb{Z}$ et $2^{4n} d_{2n}^2 \mathbf{b}_n \in \mathbb{Z}$. Cette conjecture a été presque prouvée (avec $2^{4n+o(n)}$ à la place de 2^{4n}) dans [23] et nous la prouvons complètement ici. Nous aurons besoin de l'identité suivante, démontrée dans [17] :

$$\mathbf{S}_n = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \frac{u^{n-1/2}(1-u)^n v^n (1-v)^{n-1/2}}{(1-uv)^{n+1}} \mathrm{d}u\mathrm{d}v. \tag{16}$$

Par commodité, notons

$$R_n(z) = 4P_{2n}(z)\Phi(1/z) - \frac{2}{z} Q_{2n}(z)$$

le reste de l'approximant de Padé de $\Phi(z)$ obtenu à la Proposition 2 : R_n est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}$. En prenant $z = 2n$ entier positif, le Théorème 1 (avec $r = 1$) fournit deux suites de rationnels $\mathbf{u}_n = 4P_{2n}(2n)$ et $\mathbf{v}_n$, pour $n \geq 0$, telles que $R_n(2n) = \mathbf{u}_n G - \mathbf{v}_n$. On a $2^{4n}\mathbf{u}_n \in \mathbb{Z}$ et comme[4]

$$\mathbf{v}_n = 4P_{2n}(2n) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} + (-1)^n \frac{1}{n} Q_{2n}(2n),$$

---

[3] conduisant à des fractions continues de G comme celles d'Apéry pour $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$

[4] L'expression de $\mathbf{v}_n$ est aussi valable pour $n = 0$ puisque le polynôme $Q_{2n}(z)$ s'annule en $z = 0$.

le dénominateur de $\mathbf{v}_n$ est, comme on l'a vu, $2^{4n}d_{2n}^2$. La conjecture des dénominateurs de [17] résulte donc du théorème suivant, dont la démonstration est assez indirecte et nécessite l'utilisation de deux identités hypergéométriques.

Théorème 2. *Pour tout entier $n \geq 0$, on a $\mathbf{a}_n = \mathbf{u}_n$ et $\mathbf{b}_n = \mathbf{v}_n$.*

Démonstration. Rappelons que

$$\mathbf{u}_n = 4P_{2n}(2n) = 4\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\binom{n-\frac{1}{2}}{j}\binom{n+j-\frac{1}{2}}{j}, \tag{17}$$

expression dont on déduit que $\mathbf{u}_0 = 4 = \mathbf{a}_0$, $\mathbf{u}_1 = 7 = \mathbf{a}_1$ et que la suite $(\mathbf{u}_n)_{n\geq 0}$ vérifie la récurrence (15) d'ordre 2 (de nouveau par application de l'algorithme de Zeilberger). Pour tout $n \geq 0$, on a donc bien $\mathbf{u}_n = \mathbf{a}_n$. Nous montrons l'identité $\mathbf{b}_n = \mathbf{v}_n$ de façon indirecte : la proposition suivante et l'identité (16) prouvent que $\mathbf{S}_n = R_n(2n)$ pour tout entier $n \geq 0$, ce qui suffit.

Proposition 3. *Pour tout z tel que* $\mathrm{Re}(z) > 0$ *et tout entier $n \geq 0$, on a*

$$R_n(z) = \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 \frac{u^{\frac{z-1}{2}}(1-u)^n v^n (1-v)^{\frac{z-1}{2}}}{(1-uv)^{n+1}}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v. \tag{18}$$

Démonstration. Montrons tout d'abord que $R_n(z)$ satisfait la même récurrence linéaire (9) que les polynômes $\pi_n(z) = P_{2n}(z)$:

$$4(n+1)^2R_{n+1}(z) = (z^2+8n^2+8n+3)R_n(z) - 4n^2R_{n-1}(z).$$

En effet, on a

$$R_n(z) = \frac{i}{z}\int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{P_{2n}(u)}{u-z}\cdot\frac{|\Gamma(\frac{u}{2}+\frac{1}{2})|^6}{|\Gamma(u)|^2}\,\mathrm{d}u,$$

d'où pour tout entier $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
4(n+1)^2&R_{n+1}(z) - (z^2+8n^2+8n+3)R_n(z) + 4n^2R_{n-1}(z)\\
&= 4(n+1)^2\pi_{n+1}(z) - (z^2+8n^2+8n+3)\pi_n(z) + 4n^2\pi_{n-1}(z)\\
&\qquad\qquad + \frac{i}{z}\int_{-i\infty}^{+i\infty}(u+z)P_{2n}(u)\cdot\frac{|\Gamma(\frac{u}{2}+\frac{1}{2})|^6}{|\Gamma(u)|^2}\,\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

On conclut en remarquant que l'intégrale est nulle par orthogonalité (car $n \geq 1$). Définissons maintenant la fonction hypergéométrique, convergente pour $\mathrm{Re}(z) > -1$ (*cf.* [19], p. 45 pour le critère de convergence d'une telle série) :

$$A_n(z) = \frac{n!^2}{\left(\frac{z+1}{2}\right)_{n+1}^2}\,{}_3F_2\left[\begin{matrix} n+1, & n+1, & \frac{z+1}{2} \\ & \frac{z+1}{2}+n+1, & \frac{z+1}{2}+n+1\end{matrix};1\right].$$

Pour tout z tel que $\mathrm{Re}(z) > -1$, on a également

$$A_n(z) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{u^{\frac{z-1}{2}}(1-u)^n v^n (1-v)^{\frac{z-1}{2}}}{(1-uv)^{n+1}} \, \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

On doit donc montrer que $R_n(z) = \frac{1}{2}A_n(z)$, pour tout entier $n \geq 0$ et tout complexe z tel que $\mathrm{Re}(z) > 0$. Une nouvelle utilisation de l'algorithme de Zeilberger prouve que $A_n(z)$ satisfait elle aussi la récurrence

$$4(n+1)^2 A_{n+1}(z) = (z^2 + 8n^2 + 8n + 3)A_n(z) - 4n^2 A_{n-1}(z).$$

Les trois suites $(P_{2n}(z))_{n\geq 0}$, $(R_n(z))_{n\geq 0}$ et $(A_n(z))_{n\geq 0}$ vérifiant toutes les trois la même récurrence linéaire, il existe des fonctions $c_1(z)$ et $c_2(z)$ indépendantes de n tels que $R_n(z) = c_1(z)A_n(z) + c_2(z)P_{2n}(z)$ lorsque $\mathrm{Re}(z) > 0$. Quand n tend vers l'infini, $P_{2n}(z)$ tend vers $+\infty$ alors que $R_n(z)$ et $A_n(z)$ tendent vers 0 : on a donc $c_2(z) = 0$. Il nous reste à prouver que $c_1(z) = 1/2$. En faisant $n = 0$, on a $R_0(z) = 4\Phi(1/z) = 4\Psi(1/z)$ (puisque $\mathrm{Re}(z) > 0$) et il suffit donc de prouver que $4\Psi(1/z) = \frac{1}{2}A_0(z)$ pour[5] $\mathrm{Re}(z) > 0$. Pour cela, remarquons que

$$4\Psi(1/z) = \frac{4}{(z+1)^2}\, {}_3F_2\left[\begin{matrix} 1, & \frac{z+1}{2}, & \frac{z+1}{2} \\ & \frac{z+1}{2}+1, & \frac{z+1}{2}+1 \end{matrix}; -1\right]$$

et que

$$A_0(z) = \frac{4}{(z+1)^2}\, {}_3F_2\left[\begin{matrix} 1, & 1, & \frac{z+1}{2} \\ & \frac{z+1}{2}+1, & \frac{z+1}{2}+1 \end{matrix}; 1\right].$$

On conclut donc en appliquant l'identité suivante avec $\alpha = (z+1)/2$.

Proposition 4. *Pour tout nombre complexe α pour lequel les deux membres ont un sens, c'est-à-dire tel que* $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$, *on a*

$$(19) \qquad {}_3F_2\left[\begin{matrix} 1, & \alpha, & \alpha \\ & \alpha+1, & \alpha+1 \end{matrix}; -1\right] = \frac{1}{2}\, {}_3F_2\left[\begin{matrix} 1, & 1, & \alpha \\ & \alpha+1, & \alpha+1 \end{matrix}; 1\right].$$

Démonstration. On utilise deux identités, respectivement dues à Whipple et Thomae, que l'on trouve dans [3], page 33, (3) et page 14, (1). On applique tout d'abord

$$\begin{aligned} {}_3F_2&\left[\begin{matrix} a, & b, & c \\ & \kappa-b, & \kappa-c \end{matrix}; -1\right] \\ &= \frac{\Gamma(\kappa-b)\Gamma(\kappa-c)}{\Gamma(\kappa)\Gamma(\kappa-b-c)}\, {}_4F_3\left[\begin{matrix} b, & c, & \frac{1}{2}(\kappa-a), & \frac{1}{2}(1+\kappa-a) \\ & \kappa-a, & \frac{1}{2}\kappa, & \frac{1}{2}(1+\kappa) \end{matrix}; 1\right]. \end{aligned}$$

avec $a = 1$, $b = c = \alpha$ et $\kappa = 2\alpha + 1$. La ${}_4F_3$ devient alors une ${}_3F_2$ à laquelle on applique ensuite

$${}_3F_2\left[\begin{matrix} a, & b, & c \\ & e, & f \end{matrix}; 1\right] = \frac{\Gamma(e)\Gamma(f)\Gamma(s)}{\Gamma(a)\Gamma(s+b)\Gamma(s+c)}\, {}_3F_2\left[\begin{matrix} e-a, & f-a, & s \\ & s+b, & s+c \end{matrix}; 1\right]$$

$$\text{où } s = e + f - a - b - c,$$

avec $a = b = c = \alpha$, $e = \alpha + 1$, $f = 2\alpha$. L'identité ${}_3F_2[-1] = \frac{1}{2}\, {}_3F_2[1]$ qui en résulte est exactement (19).

[5]Cette égalité est en fait valable pour z tel que $\mathrm{Re}(z) > -1$, comme le montre la Proposition 4.

4.2. **Quelques remarques pour conclure.** • L'expression intégrale (18) de $R_n(z)$ peut se développer en série :

$$R_n(z) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)_n (n+k)!}{\left(k+\frac{z+1}{2}\right)_{n+1}\left(\frac{z+1}{2}\right)_{k+n+1}}.$$

Lorsque $z = 2n+1$, on vérifie par de simples transformations qu'il s'agit au facteur $1/2$ près de la série (13). L'intégrale pour $R_n(2n+1)$ correspond alors à l'intégrale utilisée par Beukers [5] pour prouver l'irrationalité de $\zeta(2)$.

• Il existe beaucoup d'autres séries hypergéométriques donnant des formes linéaires en 1 et G, par exemple

$$\frac{(2n)!}{n!^2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\left(\frac{(k-n)_n^2}{\left(k-\frac{1}{2}\right)_{2n+1}}\right) = \alpha_n G - \beta_n$$

avec $\alpha_n = 4\sum_{j=0}^{2n}\binom{2n}{j}\binom{n+j-\frac{1}{2}}{n}^2 \in 2^{-4n}\mathbb{Z}$ et $\beta_n \in 2^{-4n}d_{2n}^{-2}\mathbb{Z}$. Ces suites vérifient une récurrence linéaire d'ordre 3 et ne semblent pas liées aux approximations précédemment construites.

• La série (14) donne une expression totalement différente des $\mathbf{a}_n$ qui, jointe à l'expression (17) des $\mathbf{u}_n$, prouve l'identité combinatoire

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\binom{n-\frac{1}{2}}{j}\binom{n+j-\frac{1}{2}}{j} = (-1)^{n+1}\sum_{j=0}^{n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}j}\left(\binom{n}{j}^3\binom{n+j-\frac{1}{2}}{n}\binom{2n-j-\frac{1}{2}}{n}\left(\frac{n}{2}-j\right)\right).$$

• La forme linéaire $\mathbf{S}_n = R_n(2n) = \mathbf{u}_n G - \mathbf{v}_n$ peut être obtenue par un autre type d'approximation de Padé, plus générale que l'approximation usuelle considérée au §2. Introduisons les fonctions $\Lambda_s(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^k/\left(k-\frac{1}{2}\right)^s$; on désire déterminer des polynômes A_n, B_n, C_n, D_n et E_n de degré au plus n tels que $A_n(-1) = 0$ et

$$\begin{cases} A_n(z)\Lambda_3(1/z) + B_n(z)\Lambda_2(1/z) + C_n(z)\Lambda_1(1/z) + D_n(z) = \mathrm{O}(z^{-n-1}) \\ A_n(z)\Lambda_3(z) - B_n(z)\Lambda_2(z) + C_n(z)\Lambda_1(z) + E_n(z) = \mathrm{O}(z^{2n+1}) \\ A_n(z)\frac{1}{2}\log^2(z) - B_n(z)\log(z) + C_n(z) = \mathrm{O}\big((1-z)^{n+1}\big). \end{cases}$$

En reprenant les méthodes de [11], on montre que la solution de ce problème est unique à une constante muliplicative près et qu'alors $B_n(-1) = \mathbf{a}_n$ et $D_n(-1) = \mathbf{b}_n$.

• Enfin, les suites $(\mathbf{u}_n)_{n\geq 0}$ et $(\mathbf{v}_n)_{n\geq 0}$ semblent être pour G les analogues des suites d'Apéry pour $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$, puisqu'elles apparaissent naturellement de deux façons très différentes. Il serait donc intéressant de les faire aussi apparaître par l'intermédiaire de formes modulaires, comme l'a fait Beukers [6] pour les suites d'Apéry.

Je remercie chaleureusement Marc Prévost et Christian Krattenthaler pour l'intérêt qu'ils ont manifesté pour ce travail, que leurs commentaires ont permis d'améliorer.

Références

[1] R. Apéry, *Irrationalité de* $\zeta(2)$ *et* $\zeta(3)$, Astérisque **61** (1979), 11–13.

[2] K. Alladi, M. Robinson, *Legendre polynomials and irrationality*, J. Reine Angew. Math. **318** (1980), 137–155.

[3] W. N. Bailey, *Generalized Hypergeometric Series*, Cambridge Tracts no. 32, 1964.

[4] K. Ball, T. Rivoal, *Irrationalité d'une infinité de valeurs de la fonction zêta aux entiers impairs*, Invent. Math. **146** (2001), no. 1, 193–207.

[5] F. Beukers, *A note on the irrationality of* $\zeta(2)$ *and* $\zeta(3)$, Bull. London Math. Soc. **11** (1979), no. 3, 268–272.

[6] F. Beukers, *Irrationality proofs using modular forms*, Journées Arithmétiques de Besançon (Besançon, 1985), Astérisque no. 147-148, (1987), 271–283.

[7] L. Carlitz, *Bernoulli and Euler numbers and orthogonal polynomials* Duke Math. J. **26** (1959) 1–15.

[8] A. Draux, *Polynômes orthogonaux formels*, Lecture Notes in Mathematics no. 974. Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[9] S. B. Ekhad, `http://www.math.rutgers.edu/~zeilberg/`.

[10] S. Fischler, *Irrationalité de valeurs de zêta (d'après Apéry, Rivoal...)*, Séminaire Bourbaki no. 910, 55ème année, 2002-2003, à paraître dans Astérisque. `http://front.math.ucdavis.edu/math.NT/0303066`.

[11] S. Fischler, T. Rivoal, *Approximants de Padé et séries hypergéométriques équilibrées*, à paraître au J. Math. Pures Appl. (2003).

[12] Yu. V. Nesterenko, *Some remarks on* $\zeta(3)$, (en russe) Mat. Zametki **59** (1996), no. 6, 865–880, 960 ; traduction anglaise dans Math. Notes **59** (1996), no. 5-6, 625–636.

[13] M. Prévost, *A new proof of the irrationality of* $\zeta(2)$ *and* $\zeta(3)$ *using Padé approximants*, J. Comput. Appl. Math. **67** (1996), no. 2, 219–235.

[14] J. Riordan, *Combinatorial identities*, John Wiley & Sons, 1968.

[15] T. Rivoal, *La fonction zêta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs*, C. R. Acad. Sci. Paris Série I Math. **331** (2000), no. 4, 267–270. `http://front.math.ucdavis.edu/math.NT/0008051`.

[16] T. Rivoal, *Irrationalité d'au moins un des neuf nombres* $\zeta(5), \zeta(7), \ldots, \zeta(21)$, Acta Arith. **103** (2002), no.2, 157–167. `http://front.math.ucdavis.edu/math.NT/0104221`.

[17] T. Rivoal, W. Zudilin, *Diophantine properties of numbers related to Catalan's constant*, à paraître dans Math. Ann. (2003).

[18] S. Roman, *The umbral calculus*, Pure and Applied Mathematics **111**, Academic Press, New York, 1984.

[19] L. J. Slater, *Generalized Hypergeometric Functions*, Cambridge University Press, 1966.

[20] A. van der Poorten, *A proof that Euler missed... Apéry's proof of the irrationality of* $\zeta(3)$*. An informal report*, Math. Intelligencer **1** (1978/79), no. 4, 195–203.

[21] J. A. Wilson, *Some hypergeometric orthogonal polynomials*, SIAM J. Math. Anal. **11** (1980), no. 4, 690–701.

[22] W. Zudilin, *An Apéry-like difference equation for Catalan's constant*, soumis pour publication, 10 pages. `http://front.math.ucdavis.edu/math.NT/0201024`.

[23] W. Zudilin, *A few remarks on linear forms involving Catalan's constant*, Chebyshev Sbornik (Tula State Pedagogical University) 3 : 2(4) (2002), 10 pages. `http://front.math.ucdavis.edu/math.NT/0210423`.

Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme, CNRS UMR 6139, Université de Caen BP 5186, 14032 Caen cedex, France. `email : rivoal@math.unicaen.fr`