APPROXIMATIONS RATIONNELLES DES VALEURS DE LA FONCTION GAMMA AUX RATIONNELS

TANGUY RIVOAL

1. Introduction

Le but de cet article est de présenter des suites récurrentes linéaires à coefficients polynomiaux dont certaines solutions produisent des approximations polynomiales en α et x qui convergent rapidement vers $\Gamma(1+\alpha)/x^\alpha$, ceci pour n'importe quel nombre complexe α tel que $\mathrm{Re}(\alpha) > -1$ et n'importe quel réel $x > 0$. En spécialisant en $x = 1$ et $\alpha = a/b$ rationnel, on obtient des suites d'approximations rationnelles du nombre $\Gamma(a/b)$ qui semblent nouvelles. À la fin de l'introduction, on explique plus en détail la place de ces résultats dans la littérature.

Pour tout réel $x > 0$ et tout nombre complexe α, considérons les suites $(\mathbf{U}_n)_{n\geq 0}$ qui satisfont à la récurrence linéaire d'ordre 3

$$C_3(n,\alpha,x)\mathbf{U}_{n+3} + C_2(n,\alpha,x)\mathbf{U}_{n+2} + C_1(n,\alpha,x)\mathbf{U}_{n+1} + C_0(n,\alpha,x)\mathbf{U}_n = 0, \tag{1}$$

où les coefficients $C_j(n,\alpha,x)$, $j = 0,1,2,3$, sont des polynômes en n,α,x, de degré 16 en n et dont les expressions explicites sont les suivantes :

$$\begin{aligned}C_3(n,\alpha,x) = -(n+3)^5(n+4)^2(8n^2+4\alpha n-3xn+38n-6x-\alpha x+10\alpha+44)\\ (n+2)(8n^2+22n+4\alpha n-3xn+6\alpha-3x-\alpha x+14)^2\\ (8n^2+38n+4\alpha n-3xn+10\alpha-6x-\alpha x+44),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&C_2(n,\alpha,x) =\\ &(24n^5+7xn^4+28\alpha n^4+330n^4-6x^2n^3+91xn^3+1794n^3+310\alpha n^3+7\alpha xn^3+70x\alpha n^2+13x\alpha^2n^2\\ &-5x^2\alpha n^2-4\alpha^3n^2+4824n^2-6\alpha^2n^2-45x^2n^2+418xn^2+1272\alpha n^2+576x-25x^2\alpha n+218\alpha xn\\ &+79x\alpha^2n-26\alpha^3n+5\alpha^3xn-4x^2\alpha^2n+816xn+2296\alpha n+6420n-111x^2n-30\alpha^2n+3384\\ &+1540\alpha+576x+216\alpha x-\alpha^3x^2+16\alpha^3x-10x^2\alpha^2-31x^2\alpha+116x\alpha^2-40\alpha^3-90x^2-36\alpha^2)\\ &(n+3)^4(n+2)(-8n^2\alpha x-4\alpha n-38n+3xn6x-44-10\alpha)\\ &(-8n^2-22n-4\alpha n+3xn-14-6\alpha+3x+\alpha x)^2,\end{aligned}$$

Date: 17 février 2010.

$$
\begin{aligned}
&C_1(n,\alpha,x)=\\
&-(24n^4-57xn^3+20\alpha n^3+186n^3-38x\alpha n^2+518n^2+4\alpha^2n^2+26x^2n^2-315xn^2+120\alpha n^2\\
&\qquad+13x^2\alpha n-148\alpha xn-5x\alpha^2n-543xn+232\alpha n+610n+85x^2n+14\alpha^2n-3x^3n\\
&\qquad+254+144\alpha-285x-138\alpha x-x^3\alpha+x^2\alpha^2+24x^2\alpha-9x\alpha^2+59x^2+10\alpha^2-3x^3)\\
&\qquad\qquad(n+3)^2(8n^2+22n+4\alpha n-3xn+14+6\alpha-3x-\alpha x)\\
&\qquad(8n^2+4\alpha n+54n-3xn-\alpha x+14\alpha-9x+90)(n-\alpha+2)(n+2+\alpha)^2\\
&\qquad\qquad\qquad(8n^2-3xn+38\alpha xn+4\alpha n+10\alpha-6x+44)(n+2)
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
C_0(n,\alpha,x)&=(n-\alpha+1)(n+1+\alpha)^2(8n^2-3xn+4\alpha n+38n\alpha x+10\alpha-6x+44)^2\\
&(n+3)^2(8n^2+22n+4n\alpha-3xn+14+6\alpha-3x-\alpha x)(n-\alpha+2)(n+2+\alpha)^2\\
&\qquad(8n^2-3xn+54n+4\alpha n+14\alpha-\alpha x+90-9x).
\end{aligned}
$$

On s'intéressera plus particulièrement aux deux solutions $(P_n(x,\alpha))_{n\geq 0}$ et $(Q_n(x,\alpha))_{n\geq 0}$ dont les valeurs initiales sont

$$P_0(\alpha,x)=x-\alpha-2,\quad P_1(\alpha,x)=\frac{1}{4}\Big((1-\alpha)x^2+(2\alpha^2+6\alpha-4)x-\alpha^3-6\alpha^2-9\alpha-4\Big)$$

$$
\begin{aligned}
P_2(\alpha,x)=\frac{1}{36}\Big(&(\alpha^2-3\alpha+2)x^3-(3\alpha^3+9\alpha^2-30)x^2\\
&+(3\alpha^4+24\alpha^3+33\alpha^2-60\alpha-108)x-\alpha^5-12\alpha^4-49\alpha^3-90\alpha^2-76\alpha-24\Big)
\end{aligned}
$$

$$Q_0(\alpha,x)=x-2,\quad Q_1(\alpha,x)=\frac{1}{4}\Big((\alpha+1)^2x^2-(6\alpha^2+10\alpha+4)x+4\alpha^2-4\Big)$$

$$
\begin{aligned}
Q_2(\alpha,x)=\frac{1}{72}\Big(&(\alpha^4+6\alpha^3+13\alpha^2+12\alpha+4)x^3-(12\alpha^4+60\alpha^3+96\alpha^2+48\alpha)x^2\\
&+(30\alpha^4+84\alpha^3-66\alpha^2-336\alpha-216)x-12\alpha^4+60\alpha^2-48\Big)
\end{aligned}
$$

Le résultat principal de l'article est le suivant.

Théorème 1. *(i) $P_n(\alpha,x)$ et $Q_n(\alpha,x)$ sont des polynômes de $\mathbb{Q}[\alpha,x]$. Lorsque $\alpha=u/v\in\mathbb{Q}$ et $x=a/b\in\mathbb{Q}$, on a*

$$n!^2(n+1)!^2v^{2n+1}b^{4n-1}P_n(x,\alpha)\in\mathbb{Z},\quad n!^2(n+1)!^2v^{3n+2}b^{4n-1}Q_n(x,\alpha)\in\mathbb{Z}.$$

(ii) Pour tout réel $x>0$ et tout complexe α tel que $\mathrm{Re}(\alpha)>-1$, il existe deux constantes $s(\alpha,x)\neq 0$ et $q(\alpha,x)\neq 0$ telles que l'on ait

$$\big|Q_n(\alpha,x)\Gamma(\alpha+1)-P_n(\alpha,x)x^\alpha\big|\leq\frac{s(\alpha,x)}{n^{2-2\mathrm{Re}(\alpha)/3}}\exp\big(-3/2\cdot x^{1/3}n^{2/3}+1/2\cdot x^{2/3}n^{1/3}\big)$$

et

$$Q_n(\alpha,x)\sim\frac{q(\alpha,x)}{n^{2-2\alpha/3}}\exp\big(3x^{1/3}n^{2/3}-x^{2/3}n^{1/3}\big).$$

Remarques. Si $\alpha = 0$, on a $P_n(\alpha, x) = Q_n(\alpha, x)$ et le point (ii) est sans intérêt.

Les estimations des dénominateurs données en (i) ne sont probablement pas les meilleures possibles mais il semble que le dénominateur commun doit croître au moins comme une puissance de $n!$. En conséquence, on ne peut probablement pas démontrer l'irrationalité de $\Gamma(a/b)$ (quand $a/b \notin \mathbb{Z}$) à l'aide de ces approximations. (Pour cela, il faudrait aussi montrer que les formes linéaires ne sont pas nulles.) Il est toutefois notable que celles-ci convergent assez vite (ici $x = 1$) :

$$\left|\Gamma\Big(\frac{a}{b}\Big) - \frac{p_n}{q_n}\right| \ll \frac{1}{q_n^{3/2}}, \quad q_n = e^{3n^{2/3}(1+o(1))}.$$

Dans le corollaire suivant, on explicite les cas $x = 1$, $\alpha = 1/2$ et $x = 1$, $\alpha = 1/3$.

Corollaire 1. (i) *Définissons les suites de rationnels $(p_n)_{n\geq 0}$ et $(q_n)_{n\geq 0}$ comme les solutions de la récurrence*

$$\begin{aligned}64(8n+17)(n+4)^2(8n+9)(n+3)^3(n+2)\mathbf{U}_{n+3}\\ - 16(8n+9)(n+2)(24n^2+123n+155)(2n+7)^2(n+3)^2\mathbf{U}_{n+2}\\ + 4(2n+7)(n+2)(8n+25)(48n^3+158n^2+147n+32)(2n+5)^2\mathbf{U}_{n+1}\\ - (8n+25)(8n+17)(2n+1)(2n+7)(2n+5)^2(2n+3)^2\mathbf{U}_n = 0\end{aligned}$$

avec $p_0 = \frac{3}{2}$, $p_1 = \frac{81}{32}$, $p_2 = \frac{2185}{384}$, $q_0 = 1$, $q_1 = \frac{45}{16}$, $q_2 = \frac{825}{128}$. *Alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{p_n}{q_n} = \Gamma\Big(\frac{3}{2}\Big) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

(ii) *Définissons les suites de rationnels $(p_n)_{n\geq 0}$ et $(q_n)_{n\geq 0}$ comme les solutions de la récurrence*

$$\begin{aligned}729(n+2)(n+3)^3(24n^2+61n+38)(n+4)^2(24n^2+109n+123)\mathbf{U}_{n+3}\\ -81(3n+10)(n+2)(24n^2+61n+38)(216n^4+2397n^3+9872n^2+17883n+12020)(n+3)^2\mathbf{U}_{n+2}\\ +9(3n+5)(n+2)(24n^2+157n+256)(216n^4+1221n^3+2311n^2+1641n+314)(3n+7)^2\mathbf{U}_{n+1}\\ - (3n+2)(3n+4)^2(24n^2+109n+123)(3n+5)(3n+7)^2(24n^2+157n+256)\mathbf{U}_n = 0\end{aligned}$$

avec $p_0 = \frac{4}{3}$, $p_1 = \frac{119}{54}$, $p_2 = \frac{21227}{4374}$, $q_0 = 1$, $q_1 = \frac{22}{9}$, $q_2 = \frac{3976}{729}$. *Alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{p_n}{q_n} = \Gamma\Big(\frac{4}{3}\Big).$$

Il existe de nombreux algorithmes pour calculer des approximations rationnelles des nombres $\Gamma(\alpha)$ mais ils ne sont pas forcément adaptés à l'approximation diophantienne ([1]).

1. Les seuls résultats connus sont la transcendance de $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(1/3)$ et $\Gamma(1/4)$. Les deux derniers sont dus à Chudnovski et sont maintenant contenu dans le théorème de Nesterenko affirmant que les nombres $\pi, e^\pi, \Gamma(1/3)$, respectivement $\pi, e^{\pi\sqrt{3}}, \Gamma(1/4)$, sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Les méthodes n'utilisent ces nombres que de manière indirecte.

Depuis la preuve d'Apéry de l'irrationalité de $\zeta(3)$, il est apparu que les approximations rationnelles d'un nombre donné issues d'une récurrence linéaire d'ordre fini à coefficients polynomiaux sont souvent de bons candidats pour prouver l'irrationalité de ce nombre, même si l'on ne sait pas le faire pour $\zeta(5)$, la constante de Catalan G ou la constante d'Euler γ, par exemple.

Récemment, l'auteur a présenté dans [10] une méthode permettant de construire des approximations rationnelles "récurrentes" u_n/v_n de n'importe lequel des nombres $\Gamma(a/b)^b$ ayant le même type de propriétés asymptotiques et arithmétiques (i.e., comportement géométrique) que les approximations d'Apéry pour $\zeta(3)$, même si elles sont insuffisantes pour prouver l'irrationalité de $\Gamma(a/b)^b$. Ces approximations semblent d'une nature différente de celles présentées ici pour $\Gamma(a/b)$: les séries génératices $\sum_n u_n z^n$ et $\sum_n v_n z^n$ sont des G-fonctions, ce qui n'est probablement ([2]) pas le cas des séries $\sum_n Q_n(\alpha, x) z^n$ et $\sum_n P_n(\alpha, x) z^n$. L'exposant b est important : les nombres $\Gamma(a/b)^b$ sont des périodes au sens géométrique du terme tandis que les nombres $\Gamma(a/b)$ n'en sont conjecturalement pas lorsque a/b n'est pas entier (voir [1, 6]). De ce point de vue, les résultats de ce papier sont naturellement liés à ceux d'Aptekarev [3] concernant γ et de [9] concernant $\gamma + \log(x)$ ($x > 0$ rationnel), ces nombres n'étant conjecturalement pas des périodes non plus. On renvoie le lecteur à l'introduction de [10] pour une discussion plus détaillée, ainsi que pour une bibliographie étendue. La question de l'existence d'approximations "récurrentes" de $\Gamma(a/b)$ telles que $P_n(a/b, 1)/Q_n(a/b, 1)$ était d'ailleurs posée dans [10].

Obtenir un bon contrôle du dénominateur de formes linéaires d'approximation d'un nombre donné est un problème important. Il peut arriver que des combinaisons linéaires spécifiques de telles approximations aient un dénominateur beaucoup plus petit que celui des approximations prises séparément, au point d'obtenir de nouveaux résultats diophantiens. C'est par exemple le cas dans [4] où Aptekarev a déduit des formes d'approximations de γ construites dans [3] de nouvelles formes d'approximations simultanées pour γ et $\delta := \int_0^1 e^{-t} \frac{\mathrm{d}t}{1+t}$ à coefficients entiers et suffisamment bonnes pour impliquer l'irrationalité de l'un de ces deux nombres. Ce résultat est cependant aussi conséquence d'un théorème antérieur plus général de Mahler [7] (voir les cinq dernières lignes de cet article page 173) qui implique que le degré de transcendance sur $\mathbb{Q}$ du corps engendré par e, γ et δ est ≥ 2. Il serait intéressant de savoir si les méthodes d'Aptekarev et de Mahler, qui semblent *a priori* différentes, peuvent s'appliquer d'une façon ou d'une autre aux approximations de $\Gamma(a/b)$ construites ici.

2. Si l'on considère α et x comme des variables, le dénominateur commun des coefficients des polynômes $Q_n(\alpha, x)$ et $P_n(\alpha, x)$ croît comme une puissance de $n!$ mais on ne peut pas exclure *a priori* qu'il soit plus petit pour des choix spécifiques de α et x.

2. Polynômes orthogonaux de type Laguerre

Dans toute la suite de cet article, on utilisera le symbole de Pochhammer $(x)_m := x(x+1)\cdots(x+m-1)$. Pour tout entier $n \geq 0$ et tout complexe α, définissons le polynôme

$$A_{n,\alpha}(x) = \frac{1}{n!^2}\, e^x \big(x^{n-\alpha}(e^{-x}x^{n+\alpha})^{(n)}\big)^{(n)} \tag{2}$$

$$= \frac{1}{n!^2} \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{j+k} \binom{n}{j}\binom{n}{k} (j+\alpha+1)_{n-j}(j+k+1)_{n-k}\, x^{j+k}, \tag{3}$$

qui a été étudié en détail dans [2]. Le développement (3) s'obtient immédiatement en utilisant deux fois la formule de Leibniz. Si $\alpha = 0$, il s'agit de la suite de polynômes (notés $A_{2,n}(x)$) étudiés dans [9]. Beaucoup des résultats obtenus dans le présent article s'obtiennent en adaptant légèrement ceux de [9] et de ce fait on renvoie souvent aux preuves correspondantes dans ce papier.

On se servira des propriétés suivantes. La première n'est pas essentielle mais permet de mieux comprendre le principe de la construction. Si $\alpha = 0$, le point (i) est incomplet car il montre seulement que $A_{n,0}(t)$ est orthogonal sur $[0, +\infty[$ pour le poids e^{-t}, alors qu'il l'est aussi pour le poids $\log(t)e^{-t}$

Lemme 1. (i) *(Multi-orthogonalité) Fixons des nombres complexes α et β tel que* $\mathrm{Re}(\beta) > -1$. *Pour tout $n \geq 0$ et tout $k \geq 0$, on a*

$$\int_0^\infty t^{k+\beta} A_{n,\alpha}(t) e^{-t} \mathrm{d}t = \frac{1}{n!^2}\,(k+1+\beta-n)_n(k+1-\alpha+\beta-n)_n \Gamma(k+\beta+1).$$

En particulier, lorsque $\beta \in \{0, \alpha\}$, l'intégrale vaut 0 pour $0 \leq k \leq n-1$.

(ii) *(Dénominateur) On a $n!^2 A_{n,\alpha}(x) \in \mathbb{Z}[\alpha, x]$, et les degrés de $A_{n,\alpha}(x)$ sont $2n$ en x et n en α.*

(iii) *(Récurrence) La suite $(A_{n,\alpha}(x))_{n\geq 0}$ vérifie la récurrence linéaire d'ordre 3 suivante :*

$$\begin{aligned}
&(n-\alpha+1)(n+1+\alpha)^2(8n^2-3xn+4\alpha n+38n+10\alpha-\alpha x-6x+44)\mathbf{U}_n\\
&\quad -\big(24n^5+28\alpha n^4+210n^4+7xn^4+7x\alpha n^3+198\alpha n^3-6x^2n^3+714n^3+63xn^3\\
&-4\alpha^3n^2+510\alpha n^2+187xn^2+13x\alpha^2n^2-5x^2\alpha n^2+49x\alpha n^2-27x^2n^2+1182n^2-6\alpha^2n^2\\
&5x\alpha^3n+954n-15x^2\alpha n+53x\alpha^2n-18\alpha^2n-39x^2n-18\alpha^3n+99\alpha xn+225xn-4x^2\alpha^2n+570\alpha n\\
&94x+234\alpha-\alpha^3x^2+50x\alpha^2-18x^2-11x^2\alpha-6x^2\alpha^2+11\alpha^3x-12\alpha^2+61\alpha x-18\alpha^3+300\big)\mathbf{U}_{n+1}\\
&(n+2)\big(24n^4+20\alpha n^3+186n^3-57xn^3+4\alpha^2n^2+120\alpha n^2-315xn^2-38x\alpha n^2+26x^2n^2+518n^2\\
&\quad +13x^2\alpha n-3x^3n+610n-5x\alpha^2n+14\alpha^2n+85x^2n-148\alpha xn-543xn+232\alpha n\\
&+59x^2-138\alpha x-9x\alpha^2+24x^2\alpha+x^2\alpha^2+10\alpha^2-285x+144\alpha-3x^3-x^3\alpha+254\big)\mathbf{U}_{n+2}\\
&\qquad -(n+2)(n+3)^2(8n^2+22n+4\alpha n-3xn+6\alpha-3x-\alpha x+14)\mathbf{U}_{n+3} = 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Démonstration. (i) Cela se démontre en intégrant $2n$ fois par parties.

(*ii*) C'est évident avec l'expression (2).

(*iii*) Fixons la détermination de la fonction $z \mapsto z^\alpha$ telle que $-x$ appartienne à la coupure issue de l'origine. On traduit l'expression différentielle de $A_{n,\alpha}(x)$ au moyen de la formule de Cauchy pour obtenir l'identité

$$A_{n,\alpha}(x) = \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{\mathscr{C}_0 \times \widetilde{\mathscr{C}_0}} \frac{(z+w+x)^{n+\alpha}(w+x)^{n-\alpha}}{z^{n+1}w^{n+1}} \, e^{-(z+w)} \, \mathrm{d}z\mathrm{d}w.$$

Ici, $\mathscr{C}_0$ et $\widetilde{\mathscr{C}_0}$ sont des cercles centrés en 0, de rayon $< |x/2|$ afin que les fonctions $(z+w+x)^{n+\alpha}$ et $(w+x)^{n-\alpha}$ soient holomorphes à l'intérieur du tore et continues sur son bord. À cette intégrale double, on peut appliquer l'algorithme Ekhad de Zeilberger, sous la forme Multint programmée dans [11] : on obtient la récurrence voulue en quelques secondes. La suite de la preuve est très similaire à celle de la Proposition 10 de [9] dans le cas $\alpha = 0$ et on y renvoie pour plus de détails. □

3. Approximants de Padé simultanés de deux fonctions eulériennes

Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$ et tout $\beta > -1$, posons

$$\mathscr{F}_\beta(z) = \int_0^\infty \frac{t^\beta e^{-t}}{z-t} \, \mathrm{d}t,$$

ce qui définit une fonction analytique de z dans $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$. En particulier, $\mathscr{F}_0$ coïncide avec la fonction $\mathscr{E}_1$ utilisée dans [9]. Ces fonctions admettent un développement asymptotique pour $z \to \infty$ dans tout secteur angulaire ouvert ne contenant pas $[0, +\infty[$:

$$\mathscr{F}_\beta(z) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\beta+k)}{z^k}.$$

Ce développement asymptotique joue le rôle de développement de Taylor formel à l'infini lorsqu'on interprète en terme d'approximants de Padé le lemme suivant (qui n'est pas fondamental mais éclaire la suite de la construction).

Lemme 2. *Pour $\beta \in \{0, \alpha\}$ et tout $z \in \mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$, on a*

$$\begin{aligned} R_{n,\alpha,\beta}(z) &:= \int_0^\infty \frac{A_{n,\alpha}(t)}{z-t} \, t^\beta e^{-t} \, \mathrm{d}t = A_{n,\alpha}(z)\mathscr{F}_\beta(z) - B_{n,\alpha,\beta}(z) \\ &\sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-\beta-n)_n(k-\alpha+\beta-n)_n}{n!^2} \cdot \frac{\Gamma(\beta+k)}{z^k} = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{z^{n+1}}\Big), \end{aligned}$$

où

$$B_{n,\alpha,\beta}(x) := \int_0^\infty \frac{A_{n,\alpha}(x) - A_{n,\alpha}(t)}{x-t} \, t^\beta e^{-t} \, \mathrm{d}t \in \Gamma(1+\beta)\mathbb{Q}[\alpha, x].$$

est de degré au plus $2n-1$ en x. Le développement asymptotique a lieu dans tout secteur angulaire ouvert ne contenant pas $[0, +\infty[$.

Le polynôme $A_{n,\alpha}$ est donc le dénominateur de l'approximant de Padé simultané $[n-1, n-1; n]$ à l'infini des deux fonctions $\mathscr{F}_0$ et $\mathscr{F}_\alpha$.

Démonstration. La preuve de

$$\int_0^\infty \frac{A_{n,\alpha}(t)}{z-t}\, t^\beta e^{-t}\,\mathrm{d}t = A_{n,\alpha}(z)\mathscr{F}_\beta(z) - B_{n,\alpha,\beta}(z)$$

découle de la réécriture

$$\int_0^\infty \frac{A_{n,\alpha}(t)}{z-t}\, t^\beta e^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{A_{n,\alpha}(z)}{z-t}\, t^\beta e^{-t}\,\mathrm{d}t - \int_0^\infty \frac{A_{n,\alpha}(z)-A_{n,\alpha}(t)}{z-t}\, t^\beta e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

et de la définition de $B_{n,\alpha,\beta}(z)$ (dont le degré est au plus égal à celui de $A_{n,\alpha}$, moins 1).

L'expression du développement asymptotique est conséquence de l'identité intégrale (1). Voir la preuve de la Proposition 4 de [9] pour plus de détails. □

On s'intéresse maintenant au comportement asymptotique des composants de cette approximation.

Lemme 3. *Les suites $(A_{n,\alpha}(x))_n$, $(B_{n,\alpha,0}(x))_n$, $(B_{n,\alpha,\alpha}(x))_n$, $(R_{n,\alpha,0}(x))_n$ et $(R_{n,\alpha,\alpha}(x))_n$ vérifient la récurrence* (4). *N'importe quelle solution $(u_n)_n$ de cette récurrence vérifie*

$$|u_n| \leq \frac{u(x,\alpha)}{n^{1-\mathrm{Re}(\alpha)/3}} \exp(3/2 \cdot x^{1/3}n^{2/3} - 1/2 \cdot x^{2/3}n^{1/3}),$$

où la constante $u(x,\alpha) > 0$ dépend de la suite choisie.

Démonstration. On sait déjà que $(A_{n,\alpha})_n$ vérifie la récurrence (4). On est dans les conditions d'application de la Proposition 7 de [9], qui implique que les suites $(R_{n,\alpha,0})_n$ et $(R_{n,\alpha,\alpha})_n$ en sont également solutions. Par linéarité, c'est donc aussi le cas de $(B_{n,\alpha,0})_n$ et $(B_{n,\alpha,\alpha})_n$.

Pour obtenir le comportement asymptotique de ces suites, on invoque la théorie de Birkhoff-Trjitzinsky [5] dont on trouve un vade mecum dans [9, Section 5.3]. Il découle de cette théorie que la récurrence (4) possède trois solutions linéairement indépendantes $f_j(n,x,\alpha)$, $j = 1,2,3$, dont les développements asymptotiques respectifs lorsque $n \to +\infty$ sont donnés par

$$\begin{aligned}
f_1(n,x,\alpha) &= \exp(-3x^{1/3}n^{2/3} + x^{2/3}n^{1/3})\Big(\frac{1}{n^{1-\alpha/3}} + \mathcal{O}\big(\frac{1}{n^{4/3-\alpha/3}}\big)\Big)\\
f_2(n,x,\alpha) &= \exp(3e^{i\pi/3}x^{1/3}n^{2/3} + e^{2i\pi/3}x^{2/3}n^{1/3})\Big(\frac{1}{n^{1-\alpha/3}} + \mathcal{O}\big(\frac{1}{n^{4/3-\alpha/3}}\big)\Big)\\
f_3(n,x,\alpha) &= \exp(3e^{-i\pi/3}x^{1/3}n^{2/3} + e^{-2i\pi/3}x^{2/3}n^{1/3})\Big(\frac{1}{n^{1-\alpha/3}} + \mathcal{O}\big(\frac{1}{n^{4/3-\alpha/3}}\big)\Big).
\end{aligned}$$

Il en découle qu'une solution quelconque $(u_n)_n$ de (4) vérifie

$$\begin{aligned}
|u_n| &\leq v(x,\alpha)\max\big(|f_1(n,x,\alpha)|, |f_2(n,x,\alpha)|, |f_3(n,x,\alpha)|\big)\\
&\leq \frac{u(x,\alpha)}{n^{1-\mathrm{Re}(\alpha)/3}} \exp(3/2 \cdot x^{1/3}n^{2/3} - 1/2 \cdot x^{2/3}n^{1/3}),
\end{aligned}$$

où $u(x,\alpha) \neq 0$. □

4. Construction d'approximations de $\Gamma(1+\alpha)$ et z^α et preuve du théorème 1

On décompose la preuve du théorème 1 en plusieurs étapes. Dans toute la suite, on suppose que α est tel que $\mathrm{Re}(\alpha) > -1$.

Pour tout $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, on définit la fonction $z \mapsto z^\beta$ par sa détermination principale avec $-\pi \leq \arg(z) < \pi$. Pour tout α tel que $\mathrm{Re}(\alpha) > -1$, les fonctions

$$\mathscr{F}(z) := z^\alpha \mathscr{F}_0(z) - \mathscr{F}_\alpha(z) = \int_0^\infty \frac{z^\alpha - t^\alpha}{z-t}\, e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

et

$$R_{n,\alpha}(z) := z^\alpha R_{n,\alpha,0}(z) - R_{n,\alpha,\alpha}(z) = \int_0^\infty \frac{z^\alpha - t^\alpha}{z-t}\, A_{n,\alpha}(t) e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

sont alors définies et analytiques sur $\mathbb{C}\setminus]-\infty, 0]$. Remarquons qu'elles sont toutes les deux identiquement nulles si $\alpha = 0$, cas sans intérêt mais néanmoins couvert par les considérations suivantes.

Lemme 4. *(i) On a $n!^2 B_{n,\alpha,0}(z) \in \mathbb{Z}[\alpha, z]$ et $B_{n,\alpha,\alpha}(z) = \Gamma(1+\alpha) C_{n,\alpha}(z)$ avec $n!^2 C_{n,\alpha}(z) \in \mathbb{Z}[\alpha, z]$.*

(ii) Pour tout $z \in \mathbb{C}\setminus]-\infty, 0]$, on a

$$R_{n,\alpha}(z) = A_{n,\alpha}(z)\mathscr{F}(z) + \Gamma(1+\alpha) C_{n,\alpha}(z) - z^\alpha B_{n,\alpha,0}(z). \tag{5}$$

(iii) Pour tout réel $x > 0$,

$$R_{n,\alpha}(x) = \frac{(1-\alpha)_n (1+\alpha)_n}{n!^2}\, \alpha x^\alpha \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{u^n t^n}{(1+u)^{n+1-\alpha}(x+ut)^{n+1+\alpha}}\, t^\alpha e^{-t}\,\mathrm{d}t\mathrm{d}u.$$

(iv) Pour tout réel $x > 0$, il existe une constante $r(x,\alpha) \neq 0$ telle que

$$R_{n,\alpha}(x) \sim \frac{r(x,\alpha)}{n^{1-\alpha/3}} \exp(-3x^{1/3}n^{2/3} + x^{2/3}n^{1/3}).$$

Le point (iii) est intéressant en lui-même mais ne sert qu'à prouver le point (iv).

Démonstration. (i) Notons

$$A_{n,\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{2n} a_k z^k$$

avec $n!^2 a_k \in \mathbb{Z}$. On a alors

$$B_{n,\alpha,0}(z) = \sum_{k=0}^{2n} a_k \int_0^\infty \frac{z^k - t^k}{z-t}\, e^{-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{2n} a_k \sum_{j=0}^{k-1} x^{k-j-1} j! \in \frac{1}{n!^2}\,\mathbb{Z}[\alpha, z].$$

De même,

$$B_{n,\alpha,\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{2n} a_k \int_0^\infty \frac{z^k - t^k}{z-t}\, t^\alpha e^{-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{2n} a_k \sum_{j=0}^{k-1} x^{k-j-1}\Gamma(\alpha+j+1) = \Gamma(1+\alpha) C_{n,\alpha}(z),$$

où

$$C_{n,\alpha}(z)=\sum_{k=0}^{2n}a_k\sum_{j=0}^{k-1}x^{k-j-1}(\alpha+1)_j\in\frac{1}{n!^2}\,\mathbb{Z}[\alpha,z].$$

(*ii*) C'est immédiat.

(*iii*) On part de l'identité

$$\frac{x^\alpha-t^\alpha}{x-t}=\alpha\int_0^\infty\frac{1}{(x+vt)^{1-\alpha}(1+v)^{1+\alpha}}\,\mathrm{d}v,$$

qui vaut pour tout $\alpha\in\mathbb{C}$ et tout $x>0$ (au moins). Donc

$$R_{n,\alpha}(x)=\alpha\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{e^{-t}A_{n,\alpha}(t)}{(x+vt)^{1-\alpha}(1+v)^{1+\alpha}}\mathrm{d}v\mathrm{d}t.$$

En intégrant n fois par parties en t, il vient

$$R_{n,\alpha}(x)=(-1)^n\frac{(1-\alpha)_n}{n!}\,\alpha\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{v^nt^{n-\alpha}\frac{1}{n!}(e^{-t}t^{n+\alpha})^{(n)}}{(x+vt)^{n+1-\alpha}(1+v)^{1+\alpha}}\,\mathrm{d}v\mathrm{d}t.$$

On fait maintenant le changement de variable $u=x/(vt)$, suivi de nouveau de n intégrations par parties en t, de telle sorte que l'on ait

$$\begin{aligned}R_{n,\alpha}(x)&=(-1)^n\frac{(1-\alpha)_n}{n!}\,\alpha x^\alpha\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\frac{1}{n!}(e^{-t}t^{n+\alpha})^{(n)}}{(1+u)^{n+1-\alpha}(x+ut)^{1+\alpha}}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}t\\&=\frac{(1-\alpha)_n(1+\alpha)_n}{n!^2}\,\alpha x^\alpha\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{u^nt^n}{(1+u)^{n+1-\alpha}(x+ut)^{n+1+\alpha}}\,t^\alpha e^{-t}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

ce qui est l'identité annoncée.

(*iv*) Observons tout d'abord qu'il découle de (*iii*) que $0\le\frac{u^nt^n}{(x+ut)^{n+1}}\le\frac{1}{x}$ pour tous $u,t\ge0$ et $x>0$, si bien que

$$\begin{aligned}|R_{n,\alpha}(x)|\le{}&\frac{|(1-\alpha)_n(1+\alpha)_n|}{n!^2}\\&\times|\alpha|x^{\mathrm{Re}(\alpha)-1}\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{t^{\mathrm{Re}(\alpha)}e^{-t}}{(1+u)^{n+1-\mathrm{Re}(\alpha)}(x+ut)^{\mathrm{Re}(\alpha)}}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}t=\mathcal{O}\Big(\frac{1}{n}\Big).\end{aligned}$$

De plus, la suite $(R_{n,\alpha}(x))_n$ est solution de la récurrence linéaire (4) donc son comportement asymptotique est gouverné par les $f_j(n,x,\alpha)$, $j=1,2,3$, apparu au cours de la preuve du lemme 3. Comme $x>0$, $f_2(n,x,\alpha)$ et $f_3(n,x,\alpha)$ tendent vers $+\infty$ quand $n\to+\infty$ et comme $R_{n,\alpha}(x)\to0$, on s'attend à ce que le comportement de $R_{n,\alpha}(x)$ soit dicté seulement par $f_1(n,x,\alpha)$, qui tend vers 0. C'est effectivement le cas bien que la preuve en soit un peu compliquée. On ne donne pas de détail et on renvoie le lecteur à la preuve de la Proposition 13 de [9] dans le cas $\alpha=0$; il n'y a essentiellement rien à changer car la dépendance en α intervient peu. $\square$

La stratégie pour obtenir des approximations simultanées de $\Gamma(1+\alpha)$ et z^α et finir la démonstration du théorème 1 est maintenant claire : on va "éliminer" le terme $A_{n,\alpha}(z)\mathscr{F}(z)$ dans (5), tout en espérant que la bonne qualité formelle de l'approximation de Padé soit numériquement bien conservée. Définissons maintenant les trois déterminants

$$P_n(\alpha,z)=\begin{vmatrix} A_{n,\alpha}(z) & B_{n,\alpha,0}(z) \\ A_{n+1,\alpha}(z) & B_{n+1,\alpha,0}(z) \end{vmatrix}\in\mathbb{Q}[\alpha,z]$$

$$Q_n(\alpha,z)=\begin{vmatrix} A_{n,\alpha}(z) & C_{n,\alpha}(z) \\ A_{n+1,\alpha}(z) & C_{n+1,\alpha}(z) \end{vmatrix}\in\mathbb{Q}[\alpha,z],$$

et

$$S_n(\alpha,z)=\begin{vmatrix} A_{n,\alpha}(z) & R_{n,\alpha}(z) \\ A_{n+1,\alpha}(z) & R_{n+1,\alpha}(z) \end{vmatrix}.$$

Le lemme suivant permet de prouver une bonne partie du théorème 1 (récurrence et (i)).

Lemme 5. (i) *Pour tout* $z\in\mathbb{C}\setminus]-\infty,0]$, *on a*

$$S_n(\alpha,z)=Q_n(\alpha,z)\Gamma(1+\alpha)-z^\alpha P_n(\alpha,z) \tag{6}$$

avec $n!^2(n+1)!^2P_n(\alpha,z)\in\mathbb{Z}[\alpha,z]$ *et* $n!^2(n+1)!^2Q_n(\alpha,z)\in\mathbb{Z}[\alpha,z]$.

(ii) *Les degrés de* Q_n *et* P_n *en* z *sont au plus* $4n-1$, *et ceux en* α *sont au plus* $3n+2$ *et* $2n+1$ *respectivement.*

(iii) *Les suites* $(P_n(\alpha,z))_n$, $(Q_n(\alpha,z))_n$ *et* $(S_n(\alpha,z))_n$ *sont toutes les trois solutions de la récurrence linéaire* (1).

Démonstration. (i) Pour obtenir (6), il suffit d'utiliser l'expression de $R_{n,\alpha}(z)$ donnée au lemme 4(ii) et de développer le déterminant

$$S_n(\alpha,z)=\begin{vmatrix} A_{n,\alpha}(z) & A_{n,\alpha}(z)\mathscr{F}(z)+\Gamma(1+\alpha)C_{n,\alpha}(z)-z^\alpha B_{n,\alpha,0}(z) \\ A_{n+1,\alpha}(z) & A_{n+1,\alpha}(z)\mathscr{F}(z)+\Gamma(1+\alpha)C_{n+1,\alpha}(z)-z^\alpha B_{n+1,\alpha,0}(z) \end{vmatrix}.$$

L'assertion sur le dénominateur de $(P_n(\alpha,z))_n$, $(Q_n(\alpha,z))_n$ découle des lemmes 1(ii) et 4(i).

(ii) C'est immédiat.

(iii) On va utiliser le fait suivant (cas particulier de la Proposition 5 de [9]) : étant données deux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ solutions d'une même récurrence linéaire

$$U_{n+3}=p_nU_{n+2}+q_nU_{n+1}+r_nU_n,$$

la suite de déterminants $(a_nb_{n+1}-a_{n+1}b_n)_n$ est solution de la récurrence linéaire

$$U_{n+3}=-q_{n+1}U_{n+2}-p_nr_{n+1}U_{n+1}+r_nr_{n+1}U_n.$$

Comme les suites $(A_{n,\alpha}(z))$, $C_{n,\alpha}(x)$ et $R_{n,\alpha}$ vérifient la récurrence (4), les trois suites de déterminants $(P_n(\alpha,z))_n$, $(Q_n(\alpha,z))_n$ et $(S_n(\alpha,z))_n$ sont solutions de la récurrence (1) (ce que l'on voit après un calcul purement mécanique.) □

Il nous reste donc à prouver le point (ii) du théorème 1, que le lemme suivant paraphrase.

Lemme 6. *Pour tout réel $x > 0$ et α tel que* $\mathrm{Re}(\alpha) > -1$*, il existe deux constantes $s(\alpha, x) \neq 0$ et $q(\alpha, x) \neq 0$ telles que*

$$|S_n(\alpha, x)| \leq \frac{s(\alpha, x)}{n^{2-2\mathrm{Re}(\alpha)/3}} \exp(-3/2 \cdot x^{1/3} n^{2/3} + 1/2 \cdot x^{2/3} n^{1/3})$$

et

$$Q_n(\alpha, x) \sim \frac{q(\alpha, x)}{n^{2-2\alpha/3}} \exp(3x^{1/3} n^{2/3} - x^{2/3} n^{1/3}).$$

Démonstration. De nouveau, la preuve est une adaptation d'une preuve de [9], plus précisément celle de la Proposition 16. On ne donne donc pas tous les détails.

Tout d'abord, on voit que, pour tout $x \in \mathbb{C}$ et tout $\alpha \in \mathbb{C}$, la théorie de Birkhoff-Trjitzinsky nous apprend que la récurrence (1) possède trois solutions linéairement indépendantes dont les développements asymptotiques respectifs lorsque $n \to +\infty$ sont donnés par

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}_1(n, x, \alpha) &= \exp(3x^{1/3} n^{2/3} - x^{2/3} n^{1/3}) \Big(\frac{1}{n^{2-2\alpha/3}} + \mathcal{O}\big(\frac{1}{n^{7/3-2\alpha/3}}\big) \Big) \\
\widetilde{f}_2(n, x, \alpha) &= \exp(3e^{2i\pi/3} x^{1/3} n^{2/3} - e^{-2i\pi/3} x^{2/3} n^{1/3}) \Big(\frac{1}{n^{2-2\alpha/3}} + \mathcal{O}\big(\frac{1}{n^{7/3-2\alpha/3}}\big) \Big) \\
\widetilde{f}_3(n, x, \alpha) &= \exp(3e^{-2i\pi/3} x^{1/3} n^{2/3} - e^{-2i\pi/3} x^{2/3} n^{1/3}) \Big(\frac{1}{n^{2-2\alpha/3}} + \mathcal{O}\big(\frac{1}{n^{7/3-2\alpha/3}}\big) \Big).
\end{aligned}$$

En posant $M_n(\alpha, x) := \begin{vmatrix} B_{n,\alpha,0}(x) & C_{n,\alpha}(x) \\ B_{n+1,\alpha,0}(x) & C_{n+1,\alpha}(x) \end{vmatrix}$ et en imitant la preuve de [9], on montre que les suites $(P_n(\alpha, x))_n$, $(Q_n(\alpha, x))_n$ et $(M_n(\alpha, x))_n$ sont $\mathbb{C}$-linéairement indépendantes et qu'elles forment une base de la récurrence (1). On a aussi besoin de la suite de déterminants

$$T_n(\alpha, x) := \begin{vmatrix} R_{n,\alpha}(x) & C_{n,\alpha}(x) \\ R_{n+1,\alpha}(x) & C_{n+1,\alpha}(x) \end{vmatrix},$$

qui satisfont à $T_n(x) = Q_n(\alpha, x)\mathscr{F}(x) - x^\alpha M_n(\alpha, x)$.

Il s'agit maintenant de montrer que le comportement de $Q_n(\alpha, x)$ est dicté par $\widetilde{f}_1(n, x, \alpha)$. Comme la seule solution de (1) qui tend vers l'infini avec n est $\widetilde{f}_1(n, x, \alpha)$, au moins l'une des trois suites $(P_n(\alpha, x))_n$, $(Q_n(\alpha, x))_n$ et $(M_n(\alpha, x))_n$ doit être équivalente à $c(\alpha, x)\widetilde{f}_1(n, x, \alpha)$. Observons ici que $S_n(\alpha, x)$ et $T_n(\alpha, x)$ tendent vers 0. En effet, en développant ces déterminants, on voit grâce aux lemmes 3 et 4(iv) que les modules de ces deux suites sont trivialement bornés pour $n \gg 1$ par

$$\frac{u(\alpha, x)}{n^{1-\mathrm{Re}(\alpha)/3}} e^{3/2 \cdot x^{1/3} n^{2/3} - 1/2 \cdot x^{2/3} n^{1/3}} \times \frac{v(\alpha, x)}{n^{1-\mathrm{Re}(\alpha)/3}} e^{-3x^{1/3} n^{2/3} + x^{2/3} n^{1/3}} \ll e^{-c(x) n^{2/3}},$$

où $u(\alpha, x), v(\alpha, x)$ et $c(x)$ sont des constantes > 0. Il en découle que si $Q_n(\alpha, x) \to 0$, alors $P_n(\alpha, x)$ et $M_n(\alpha, x)$ également, ce qui contredit le fait que ces trois suites forment une base de l'espace des solutions de (1).

Donc $Q_n(\alpha, x) \sim q(\alpha, x)\widetilde{f}_1(n, x, \alpha)$. De plus, comme dit ci-dessus, $S_n(\alpha, x)$ tend vers 0 donc il existe des constantes $s_0(\alpha, x) > 0$ et $s(\alpha, x) > 0$ telle que

$$\begin{aligned}|S_n(\alpha, x)| &\leq s_0(\alpha, x)\big|\widetilde{f}_2(n, x, \alpha) + \widetilde{f}_3(n, x, \alpha)\big| \\ &\leq \frac{s(\alpha, x)}{n^{2-2\mathrm{Re}(\alpha)/3}} \exp\big(- 3/2 \cdot x^{1/3}n^{2/3} + 1/2 \cdot x^{2/3}n^{1/3}\big).\end{aligned}$$

□

Bibliographie

[1] Y. André, *Une introduction aux motifs (motifs purs, motifs mixtes, périodes)*, Panoramas et Synthèses **17**, Société Mathématique de France, Paris, 2004. xii+261 pp.

[2] A. I. Aptekarev, A. Branquinho and W. van Assche, *Multiple orthogonal polynomials for classical weights*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), 3887–3914.

[3] A. I. Aptekarev (éditeur), *Rational approximants for Euler constant and recurrence relations*, Sovremennye Problemy Matematiki ("Current Problems in Mathematics"), vol. **9**, MIAN (Steklov Institute), Moscow, 2007.

[4] A. I. Aptekarev, *On linear forms containing the Euler constant*, prépublication (2009), disponible ici : `http://arxiv.org/abs/0902.1768`

[5] G. D. Birkhoff and W. J. Trjitzinsky, *Analytic theory of singular difference equations*, Acta Math. **60** (1932), 1–89.

[6] M. Kontsevich et D. Zagier, *Periods*, in Mathematics Unlimited – 2001 and Beyond, Springer, Berlin, 2001, 771–808.

[7] K. Mahler, *Applications of a theorem by A. B. Shidlovski*, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A **305** (1968), 149–173.

[8] Yu. V. Nesterenko, *Modular functions and transcendence questions*, (en russe) Mat. Sb. **187** (1996), no. 9, 65–96 ; traduction en anglais dans Sb. Math. **187** (1996), no. 9, 1319–1348.

[9] T. Rivoal, *Rational approximations for values of derivatives of the Gamma function*, Trans. Amer. Math. Soc. **361** (2009), 6115–6149.

[10] T. Rivoal, *Approximations rationnelles des valeurs de la fonction Gamma aux rationnels : le cas des puissances*, prépublication 2009, 18 pages.

[11] A. Tefara, *MultInt, a Maple Package for Multiple Integration by the WZ Method*, J. Symb. Comp. **34**.5 (2002), 329–353. Le programme maple est disponible ici : `http://faculty.gvsu.edu/teferaa/html/MultInt.mpl`.

T. Rivoal, Institut Fourier, CNRS UMR 5582, Université Grenoble 1, 100 rue des Maths, BP 74, 38402 Saint-Martin d'Hères cedex, France.

email : tanguy.rivoal@ujf-grenoble.fr