APPROXIMATIONS RATIONNELLES DES VALEURS DE LA FONCTION GAMMA AUX RATIONNELS : LE CAS DES PUISSANCES

TANGUY RIVOAL

Résumé. Étant donné un rationnel a/b tel que $0 < a/b < 1$, on construit deux suites de nombres rationnels $(p_n)_{n\geq 0}$ et $(q_n)_{n\geq 0}$ telles que p_n/q_n tend à vitesse géométrique vers $\Gamma(a/b)^b$ et telles que les deux séries entières $\sum_{n\geq 0} p_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} q_n z^n$ soient des G-fonctions solutions d'une même équation différentielle linéaire. En particulier, ces deux suites sont solutions d'une même récurrence linéaire d'ordre fini à coefficients polynomiaux ; dans un cas particulier de la construction où l'ordre vaut 2, on obtient une représentation de $\Gamma(1/3)^3$ comme fraction continue irrégulière.

1. Introduction

Le but de cet article est de présenter des suites de nombres rationnels qui convergent rapidement vers le nombre $\Gamma(a/b)^b$, pour n'importe quel rationnel $a/b \notin \mathbb{Z}$ donné, $b \geq 1$, et dont les séries génératrices sont des G-fonctions. Dans la suite, on supposera que $0 < a/b < 1$ (ce qui ne fait rien perdre en généralité) mais pas que $(a,b) = 1$ (hypothèse inutile qui ferait d'ailleurs perdre en généralité).

Posons

$$I_n := \frac{(sn)!^2(tn)!^\beta}{(rn)!} \cdot \frac{\Gamma\big(\frac{a}{b}\big)^b}{2i\pi} \int_{\mathscr{C}} \frac{(x)_{rn}}{\big(\frac{x-a}{b} - sn\big)_{sn+1}\big(\frac{x-b}{b} - sn\big)_{sn+1}\big(\frac{x}{b}\big)_{tn}^\beta} \cdot \frac{\Gamma(x)}{b^x\Gamma\big(\frac{x}{b}\big)^b}\,\mathrm{d}x, \qquad (1)$$

où les paramètres n, r, s, t, β sont des entiers positifs, avec $s \geq 1$ et avec $0 \leq \beta \leq b$. Par définition, $(\alpha)_m := \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+m-1)$. Le lacet $\mathscr{C}$ entoure dans le sens direct les zéros du polynôme (en x)

$$\Big(\frac{x-a}{b} - sn\Big)_{sn+1}\Big(\frac{x}{b} - sn\Big)_{sn+1},$$

c'est-à-dire les entiers $a + kb$ et $b + kb$, $k = 0, \ldots, sn$, et il n'entoure aucun autre pôle de l'intégrande, i.e, aucun de ceux provenant de $\Gamma(x)/(\Gamma\big(\frac{x}{b}\big)^b\big(\frac{x}{b}\big)_t^\beta)$. Comme $\beta \leq b$, les seuls autres pôles possibles de l'intégrande sont parmi les pôles de $\Gamma(x)$ aux entiers négatifs.

La forme de l'intégrale I_n est motivée par certaines intégrales apparaissant dans l'interpolation rationnelle des fonctions méromorphes, telles que la fonction zêta d'Hurwitz $\sum_{n=1}^\infty (n+x)^{-s}$ (voir [13]). Dans le cas présent, on utilise la fonction $\Gamma(x)(b^x\Gamma(x/b)^b)$ mais l'aspect "interpolation" ne sera pas développé ici. Le point essentiel est que I_n est une

Date: 10 décembre 2009.

forme linéaire en 1 et $\Gamma(a/b)^b$ à coefficients rationnels. Pour définir ceux-ci, posons

$$p_n := \sum_{k=0}^{sn} \frac{(-1)^{sn-k+1}}{b^{bk+a}} \cdot \binom{sn}{k} \cdot \frac{(kb+rn+a-1)!}{(rn)!k!^b} \cdot \frac{(sn)!}{\left(k-sn+\frac{a}{b}-1\right)_{sn+1}} \cdot \frac{k!^b}{\left(\frac{a}{b}\right)_k^b} \cdot \frac{(tn)!^\beta}{\left(k+\frac{a}{b}\right)_{tn}^\beta}$$

et

$$q_n := \sum_{k=0}^{sn} \frac{(-1)^{sn-k}}{b^{bk+b}} \cdot \binom{sn}{k} \cdot \frac{(bk+rn+b-1)}{(rn)!k!^b} \cdot \frac{(sn)!}{\left(k-sn+1-\frac{a}{b}\right)_{sn+1}} \cdot \frac{(tn)!^\beta}{(k+1)_{tn}^\beta}.$$

Le résultat principal de cet article est le suivant.

Théorème 1. *On se place* a priori *dans les conditions ci-dessus.*

(*i*) *On a*

$$I_n = q_n \Gamma\left(\frac{a}{b}\right)^b - p_n \in \mathbb{Q}\Gamma\left(\frac{a}{b}\right)^b + \mathbb{Q}.$$

(*ii*) *Supposons que $2s+\beta t > r$. Si $bt < r$ ou si $[bt = r \neq 0$ et $\beta \neq b]$, alors*

$$\limsup_{n\to+\infty} |I_n|^{1/n} \leq \frac{t^{\beta t} s^{2s} (bx_0 - r)^r}{r^r (x_0 - t)^{\beta t} (x_0 + s)^{2s}},$$

où x_0 est l'unique solution réelle $> r/b$ de l'équation algébrique

$$(x+s)^2 \left(x - \frac{r}{b}\right)^b - x^{b-\beta+2}(x-t)^\beta = 0.$$

(*iii*) *Supposons que $2s+\beta t > r$ et que $bt \leq r$. Alors*

$$\lim_{n\to+\infty} |p_n|^{1/n} = \lim_{n\to+\infty} |q_n|^{1/n} = \frac{t^{\beta t} s^{2s} (r+bx_1)^r}{r^r (s-x_1)^{2s} (t+x_1)^{\beta t}} > 1,$$

où x_1 est l'unique solution réelle dans $]0, s[$ de l'équation algébrique

$$(s-x)^2 \left(x + \frac{r}{b}\right)^b - x^{b-\beta+2}(x+t)^\beta = 0.$$

(*iv*) *Pour tout entier $n \geq 0$, un dénominateur commun de p_n et q_n est*

$$D_n := b^{b+bn} d_{bsn+b-a} d_{bsn+a}^b d_{b(s+t)n+a-1}^\beta,$$

où $d_n := \mathrm{ppcm}(1, 2, \dots, n)$.

(*v*) *les suites $(p_n)_{n\geq 0}$, $(q_n)_{n\geq 0}$ et $(I_n)_{n\geq 0}$ vérifient une même récurrence linéaire d'ordre fini à coefficients dans $\mathbb{Z}[n]$ (qui dépend du choix des paramètres).*

Remarques. a) Les points (*iii*), (*iv*) et (*v*) impliquent que les séries $\sum_{n\geq 0} p_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} q_n z^n$ sont des G-fonctions, solutions d'une même équation différentielle. Voir la fin de cette introduction pour plus de détails à ce sujet, ainsi que la note 2. Pour cela, on utilise (*iv*) sous la forme $\lim_n D_n^{1/n} = b^b e^{b(b+1)s+\beta b(s+t)}$.

b) Il ne semble pas facile de déterminer si $\limsup_n |I_n|^{1/n} < 1$ sous les conditions de (*ii*) bien que cela soit le cas sur de nombreux exemples.

On présente maintenant une application du théorème précédent, qui correspond à un cas où x_0 et x_1 sont facilement explicitables.

Corollaire 1. *Si $r = b$, $s = 2$, $t = 1$ et $\beta = b - 2$, alors*

$$q_n = \mathcal{Q}^{n(1+o(1))} \quad \text{et} \quad \left|\Gamma\Big(\frac{a}{b}\Big)^b - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \frac{1}{16^{n(1+o(1))} q_n} = \frac{1}{q_n^{\mu+o(1)}}$$

avec

$$\mathcal{Q} := \frac{4^4(5+\sqrt{17})^2}{(7-\sqrt{17})^4} \approx 311,04964 \quad \text{et} \quad \mu := 1 + \frac{\log(16)}{\log(\mathcal{Q})} \approx 1,48303.$$

Remarque. On ne peut pas déduire l'irrationalité de $\Gamma(\frac{a}{b})^b$ du corollaire 1 car p_n et q_n ne sont pas des entiers. Le choix le plus simple possible $r = t = 0$, $s = 1$ n'est pas couvert par le théorème 1 (*ii*). Dans ce cas particulier, on montrera dans la partie 5 la majoration $I_n = \mathcal{O}(n^{b/2+2})$, dont découle déjà un résultat non trivial :

$$q_n = 4^{n(1+o(1))} \quad \text{et} \quad \left|\Gamma\Big(\frac{a}{b}\Big)^b - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \frac{1}{q_n^{1+o(1)}}. \tag{2}$$

Il est possible de donner explicitement les récurrences vérifiées par $(p_n)_{n\geq 0}$ et $(q_n)_{n\geq 0}$ pour tout choix de a, b, r, s, t, β de tailles raisonnables. On en présente quelques-unes dans la partie 6, dont la suivante prouvée dans la sous-partie 6.2.

Théorème 2. *Posons $r = t = 0$, $s = 1$ et $a/b = 1/3$. Alors les suites $(p_n)_{n\geq 0}$ et $(q_n)_{n\geq 0}$ vérifient toutes les deux la récurrence d'ordre 2*

$$\begin{aligned} &3(n+2)(27n^2+36n+13)(3n+4)^3 u_{n+2} = \\ &\quad (10935n^6 + 80190n^5 + 238545n^4 + 368550n^3 + 312552n^2 + 138648n + 25408) u_{n+1} \\ &\qquad\qquad - 162n(2n+1)(27n^2+90n+76)(n+1)^2 u_n, \end{aligned}$$

avec pour valeurs initiales $p_0 = \frac{1}{2}$, $p_1 = \frac{93}{10}$ et $q_0 = \frac{1}{9}$, $q_1 = \frac{13}{27}$.

Cette récurrence se traduit par la fraction continue irrégulière

$$\Gamma\Big(\frac{1}{3}\Big)^3 = \frac{9/2|}{|C(0)} - \frac{A(0)B(1)|}{|C(1)} - \cdots - \frac{A(n)B(n+1)|}{|C(n+1)} - \cdots,$$

avec

$$\begin{aligned} A(n) &= 3(n+2)(27n^2+36n+13)(3n+4)^3, \\ B(n) &= 162n(2n+1)(27n^2+90n+76)(n+1)^2, \\ C(n) &= (10935n^6 + 80190n^5 + 238545n^4 + 368550n^3 + 312552n^2 + 138648n + 25408), \end{aligned}$$

dont les réduites p_n/q_n convergent vers $\Gamma(1/3)^3$ en $4^{-n(1+o(1))}$.

Il est naturel de se demander si ces résultats peuvent servir à prouver l'irrationalité des nombres $\Gamma(a/b)^b$, dont on ne sait pas grand chose à l'heure actuelle en dehors de la transcendance de $\Gamma(1/2)^2 = \pi$, $\Gamma(1/3)^3$ et $\Gamma(1/4)^4$. ([1]) Comme les rationnels p_n et q_n ne sont pas des entiers, il faudrait montrer que $D_n I_n \to 0$. Malheureusement l'expression obtenue pour D_n semble interdire cette possibilité mais il reste toujours la possibilité que I_n soit plus petit que la borne obtenue dans le théorème 1 (*ii*) et que D_n soit surestimé.

La construction présentée ici présente un intérêt théorique dans le contexte des *suites de G-approximations rationnelles* d'un réel. Par cela, on peut entendre deux choses :

– ou bien des suites de rationnels $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ telles que $a_n/b_n \to \alpha$ pour un certain réel α et $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ sont des G-fonctions. ([2])
– ou bien des suites de rationnels $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ telles que $|b_n| \to +\infty$ et $b_n\alpha - a_n \to 0$ pour un certain réel α et $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ sont des G-fonctions.

L'ensemble des nombres α qui vérifient la seconde possibilité est *a priori* plus restreint que celui des nombres qui vérifient la première. En plus des nombres $\log(2)$, $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$ pour lesquels la seconde possibilité est vérifiée depuis Apéry, elle est vraie pour $\zeta(4)$ (Cohen et Rhin [7]) et pour la constante de Catalan G (Zudilin [18]). Fischler et l'auteur l'ont également vérifiée pour une très large classe de nombres algébriques réels (voir [9, Partie 6]). Grâce au corollaire 1, elle est donc également vraie pour $\Gamma(a/b)^b$. Or tous ces nombres sont des périodes au sens géométrique du terme (voir [3, Partie III]). Devant tous ces exemples (parmi beaucoup d'autres, voir [1, 17]), on peut se poser la question suivante : *Est-ce que toute période admet des G-approximations rationnelles ? Réciproquement, les réels admettant des G-approximations rationnelles peuvent-ils être décrits à l'aide des périodes ?* Cette question a naturellement sa place dans la “philosophie des périodes” développée par Kontsevich et Zagier [10].

Il est fortement suspecté que les nombres $\Gamma(a/b)$, $a/b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ ne sont pas des périodes (voir [3, p. 212]) mais les remarques précédentes ne signifient pas qu'on ne trouvera pas d'approximations de $\Gamma(a/b)$ issues d'une récurrence linéaire d'ordre fini à coefficients polynomiaux. ([3]) Par exemple, Aptekarev et ses collaborateurs [4] ont récemment obtenu une telle récurrence d'ordre 3 pour la constante d'Euler γ. Cependant, le dénominateur des solutions rationnelles $(u_n)_{n\geq 0}$ de cette récurrence croît comme une puissance de $n!$ et $\sum_{n\geq 0} u_n z^n$ n'est donc pas une G-fonction. L'auteur [14] a obtenu un résultat similaire pour $\gamma + \log(x)$ pour tout rationnel $x > 0$. Les auteurs de [10] estiment que γ n'est probablement pas une période et on peut raisonnablement penser que c'est aussi le cas du nombre $\gamma + \log(x)$ pour n'importe quel rationnel $x > 0$.

1. On sait en fait que $\pi, e^{\pi}, \Gamma(1/4)$, respectivement $\pi, e^{\pi\sqrt{3}}, \Gamma(1/3)$, sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$. C'est une conséquence du théorème de Nesterenko [11]. On sait aussi que $\Gamma(1/3)$ et $\Gamma(1/4)$ ne sont pas des nombres de Liouville [6].

2. Rappelons qu'une série $F(z) = \sum_{n\geq 0} u_n z^n \in \mathbb{Q}[[z]]$ est une G-fonction si $(u_n)_{n\geq 0}$ a une croissance au plus géométrique et est solution d'une récurrence linéaire d'ordre fini à coefficients dans $\mathbb{Z}[n]$, et si la suite d'entiers $(\mathcal{D}_n)_{n\geq 0}$ vérifiant $\mathcal{D}_n u_j \in \mathbb{Z}$ pour $j = 0, \dots, n$, a une croissance au plus géométrique. Les deux premières conditions signifient que le rayon de convergence de F est non nul et fini, et que F est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients polynomiaux. Voir [2, Chapitre 1].

3. L'auteur a d'ailleurs construit de telles approximations dans [15]. La méthode est totalement différente de celle présentée ici et est beaucoup plus dans l'esprit de [4, 14].

Enfin, terminons avec la remarque suivante. On montrera que sous la condition $2s+t > r$ et pourvu que n soit assez grand, on a

$$I_n = (-1)^{rn+1}\Gamma\Big(\frac{a}{b}\Big)^b \sum_{k=rn}^{\infty} \frac{(-b)^k (tn)!^\beta}{k!\Gamma\big(-\frac{k}{b}\big)^b\big(-\frac{k}{b}\big)_{tn}^\beta} \cdot \frac{(k-rn+1)_{rn}}{(rn)!} \cdot \frac{(sn)!^2}{\big(\frac{k+a}{b}\big)_{sn+1}\big(\frac{k+b}{b}\big)_{sn+1}}.$$

Cette série présente une grande ressemblance formelle avec celle utilisée dans [5, 12] (sauf les facteurs de symétrie very-well-poised) afin de montrer l'irrationalité d'une infinité de valeurs de la fonction zêta aux entiers impairs. On peut donc espérer qu'une généralisation adéquate de I_n permettra d'obtenir de nouveaux résultats concernant la nature arithmétique des nombres $\Gamma(a/b)^b$.

2. Une construction générale

On remplace provisoirement rn, sn, tn par des entiers quelconques $r, t \geq 0$ et $s \geq 1$. Posons

$$I = I(r,s,t,\beta;a,b) := \frac{\Gamma\big(\frac{a}{b}\big)^b}{2i\pi} \int_{\mathscr{C}} \frac{(x)_r}{\big(\frac{x-a}{b}-s\big)_{s+1}\big(\frac{x-b}{b}-s\big)_{s+1}\big(\frac{x}{b}\big)_t^\beta} \cdot \frac{\Gamma(x)}{b^x\Gamma\big(\frac{x}{b}\big)^b}\,\mathrm{d}x,$$

où les paramètres r, s, t, β sont des entiers ≥ 0, avec $0 \leq \beta \leq b$. Le lacet $\mathscr{C}$ est défini comme dans l'introduction.

On se servira de diverses propriétés classiques de la fonction Gamma, telles que :

$$\Gamma(x+r) = (x)_r\Gamma(x),$$
$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

(La seconde identité est connue comme la *formule des compléments.*)

Lemme 1. *Dans les conditions décrites ci-dessus, on a*

$$I \in \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\,\Gamma\Big(\frac{a}{b}\Big)^b.$$

Démonstration. Par le théorème des résidus, on vérifie sans difficulté que

$$I = \sum_{k=0}^{s}(-1)^{s-k}\frac{(kb+b)_r\Gamma(kb+b)}{k!(s-k)!(k-s-\frac{a}{b}+1)_{s+1}(k+1)_t^\beta b^{b+bk}}\frac{\Gamma\big(\frac{a}{b}\big)^b}{\Gamma\big(k+1\big)^b}$$
$$- \sum_{k=0}^{s}(-1)^{s-k+1}\frac{(kb+a)_r\Gamma(kb+a)}{k!(s-k)!(k-s+\frac{a}{b}-1)_{s+1}(k+\frac{a}{b})_t^\beta b^{a+bk}}\frac{\Gamma\big(\frac{a}{b}\big)^b}{\Gamma\big(k+\frac{a}{b}\big)^b}.$$

La première somme est dans $\mathbb{Q}\Gamma\big(\frac{a}{b}\big)^b$ et on peut l'écrire sous la forme simplifiée $Q\Gamma\big(\frac{a}{b}\big)^b$ avec

$$Q := Q(r,s,t,\beta;a,b) = \frac{1}{s!}\sum_{k=0}^{s}(-1)^{s-k}b^{-b-bk}\binom{s}{k}\frac{(kb+b+r-1)!}{\big(k-s-\frac{a}{b}+1\big)_{s+1}k!^{b-\beta}(k+t)!^\beta}. \tag{3}$$

On peut écrire la seconde somme comme

$$P := P(r,s,t,\beta;a,b) := \frac{1}{s!}\sum_{k=0}^{s}(-1)^{s-k+1}b^{-a-bk}\binom{s}{k}\frac{(kb+a+r-1)!}{\left(k-s+\frac{a}{b}-1\right)_{s+1}\left(\frac{a}{b}\right)_k^{b-\beta}\left(\frac{a}{b}\right)_{k+t}^{\beta}}, \quad (4)$$

qui est dans $\mathbb{Q}$.

On a donc bien obtenu que

$$I = Q\,\Gamma\Big(\frac{a}{b}\Big)^b - P \in \mathbb{Q}\,\Gamma\Big(\frac{a}{b}\Big)^b + \mathbb{Q}$$

comme annoncé. □

On prouve maintenant une expression de l'intégrale I sous forme de série, qui sera plus maniable pour les majorations futures.

Lemme 2. *Supposons que $2s+\beta t - r - \frac{b-1}{2} > 1$. Alors,*

$$I = (-1)^{r+1}\Gamma\Big(\frac{a}{b}\Big)^b\sum_{k=r}^{\infty}\frac{(-b)^k}{k!\Gamma\big(-\frac{k}{b}\big)^b\big(-\frac{k}{b}\big)_t^{\beta}}\cdot\frac{(k-r+1)_r}{\big(\frac{k+a}{b}\big)_{s+1}\big(\frac{k+b}{b}\big)_{s+1}}. \quad (5)$$

Démonstration. Notons $T = bN + \frac{1}{2}$ pour tout entier $N \geq 0$. On considère l'intégrale

$$J(T) = \frac{\Gamma\big(\frac{a}{b}\big)^b}{2i\pi}\int_{\mathscr{R}}\frac{(x)_r}{\big(\frac{x-a}{b}-s\big)_{s+1}\big(\frac{x-b}{b}-s\big)_{s+1}\big(\frac{x}{b}\big)_t^{\beta}}\cdot\frac{\Gamma(x)}{b^x\Gamma\big(\frac{x}{b}\big)^b}\,\mathrm{d}x,$$

où $\mathscr{R}$ est le contour rectangulaire de sommets $\pm T \pm iT$, $T > 0$. Pour simplifier, on note f l'intégrande de $J(T)$:

$$f(x) = \Gamma\Big(\frac{a}{b}\Big)^b\cdot\frac{(x)_r}{\big(\frac{x-a}{b}-s\big)_{s+1}\big(\frac{x-b}{b}-s\big)_{s+1}\big(\frac{x}{b}\big)_t^{\beta}}\cdot\frac{\Gamma(x)}{b^x\Gamma\big(\frac{x}{b}\big)^b}.$$

Comme les pôles de f aux entiers négatifs sont ceux de $\Gamma(x)$ (qui sont simples, avec résidu $(-1)^k/k!$ au point $-k$), on a

$$J(T) = I + \sum_{k=r}^{[T]}\mathrm{Res}_{x=-k}(f(x)),$$

pourvu que T soit assez grand (ce que l'on supposera) pour que les autres pôles de f aux entiers $a+kb$ et $b+bk$, $k = 0,\ldots,n$, aient une contribution égale à I.

On vérifie immédiatement que

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_{x=-k}(f(x)) &= \frac{(-1)^k\Gamma\big(\frac{a}{b}\big)^b}{k!b^{-k}\Gamma\big(-\frac{k}{b}\big)^b\big(-\frac{k}{b}\big)_t^{\beta}}\cdot\frac{(-k)_r}{\big(-\frac{k+a}{b}-s\big)_{s+1}\big(-\frac{k+b}{b}-s\big)_{s+1}}\\ &= \frac{(-1)^{k+r}b^k\Gamma\big(\frac{a}{b}\big)^b}{k!\Gamma\big(-\frac{k}{b}\big)^b\big(-\frac{k}{b}\big)_t^{\beta}}\cdot\frac{(k-r+1)_r}{\big(\frac{k+a}{b}\big)_{s+1}\big(\frac{k+b}{b}\big)_{s+1}}.\end{aligned}$$

Donc le lemme revient à montrer que $J(T)$ tend vers 0 quand T tend vers $+\infty$ puisqu'alors on obtient l'identité attendue (5) :

$$I = -\sum_{k=r}^{\infty} \mathrm{Res}_{x=-k}(f(x)).$$

Pour cela, on décompose $J(T)$ en la somme des quatre intégrales sur les quatre côtés de $\mathscr{R}$. Les intégrales sur les trois côtés $[-T-iT, T-iT]$, $[T-iT, T+iT]$ et $[T+iT, -T+iT]$ se traitent simultanément. On utilise la formule de Stirling sous la forme

$$\Gamma(z) = z^z e^{-z}\sqrt{2\pi/z}\big(1+\mathcal{O}(1/|z|)\big),$$

avec $|\arg(z)| < \pi$ et la branche principale du logarithme, afin d'obtenir que

$$\left|\frac{\Gamma(x)}{b^x\Gamma(x/b)^b}\right| \ll |x|^{(b-1)/2},$$

où la constante implicite ne dépend pas de T. L'intégrande $f(x)$ vérifie donc

$$|f(x)| \ll \frac{1}{T^{2s+\beta t-r-\frac{b-1}{2}}}$$

sur les trois côtés en question. Les trois intégrales correspondantes tendent donc vers 0 pourvu que $2s+\beta t - r - \frac{b-1}{2} > 1$, ce qui est la condition de l'énoncé.

Sur le côté $C = [-T+iT, -T-iT]$, on ne peut pas utiliser la formule de Stirling car on sort du secteur angulaire $|\arg(x)| < \pi$. Pour contourner ce problème, on remarque tout d'abord que

$$\frac{\Gamma(x)}{b^x\Gamma\left(\frac{x}{b}\right)^b} = \frac{\sin\left(\pi\frac{x}{b}\right)^b}{\pi^{b-1}\sin(\pi x)}\cdot\frac{b^{-x}\Gamma\left(1-\frac{x}{b}\right)^b}{\Gamma(1-x)},$$

ce qui découle d'une double application de la formule des compléments. Lorsque la partie réelle de x est négative, ce qui est le cas sur le côté C, la formule de Stirling montre que

$$\left|\frac{b^{-x}\Gamma\left(1-\frac{x}{b}\right)^b}{\Gamma(1-x)}\right| \ll \frac{1}{|x|^{\frac{b-1}{2}}} \ll \frac{1}{T^{\frac{b-1}{2}}}.$$

On vérifie de plus que pour tout $x = -T+iy \in C$, on a

$$\sin(\pi x) = (-1)^{bN+1} i\cosh(\pi y)$$
$$\sin\left(\pi\frac{x}{b}\right) = (-1)^N\left(e^{-i\pi/2b}e^{-\pi y/b} - e^{i\pi/2b}e^{\pi y/b}\right).$$

Il vient donc $|\sin(\pi x)| \geq e^{\pi|y|}$ et $\left|\sin\left(\pi\frac{x}{b}\right)\right| \ll e^{\pi|y|/b}$. D'où

$$\left|\frac{\sin\left(\pi\frac{x}{b}\right)^b}{\sin(\pi x)}\right| = \mathcal{O}(1)$$

sur C, indépendamment de T. Finalement, on a

$$|f(x)| \ll \frac{1}{T^{2s+\beta t-r+\frac{b-1}{2}}}$$

et l'intégrale sur C tend vers 0 quand $T \to +\infty$ pourvu que $2s + \beta t - r + \frac{b-1}{2} > 1$, ce qui est plus faible que la condition de l'énoncé.

Ceci termine la démonstration de la Proposition 2. $\square$

3. Démonstration du théorème 1

On se replace maintenant dans le contexte du théorème 1 et l'on remplace r par rn, s par sn et t par tn, où n, r, s, t sont des paramètres entiers. (En fait, on pourrait même se contenter de demander que r, s, t soient des rationnels et n un entier tels que rn, sn, tn soient des entiers.)

3.1. **Preuve de** (i)**.** L'intégrale I_n définie en (1) s'écrit alors

$$I_n := \frac{(sn)!^2 (tn)!^\beta}{(rn)!} I(rn, sn, tn, \beta; a, b),$$

si bien que

$$I_n = q_n \Gamma\Big(\frac{a}{b}\Big)^b - p_n,$$

avec

$$p_n = \frac{(sn)!^2 (tn)!^\beta}{(rn)!} P(rn, sn, tn, \beta; a, b) \quad \text{et} \quad q_n = \frac{(sn)!^2 (tn)!^\beta}{(rn)!} Q(rn, sn, tn, \beta; a, b),$$

où les rationnels P et Q sont définis en (4) et (3) au cours de la preuve du lemme 1. Ceci prouve le point (i) du théorème 1.

3.2. **Preuve de** (ii)**.** Puisque $2s + \beta t - r > 0$, l'inégalité $2sn + \beta tn - rn - \frac{b-1}{2} \geq 2$ est vérifiée pour n assez grand (ce que l'on peut supposer ici) et donc grâce à la Proposition 2, on déduit que

$$I_n = (-1)^{rn+1} \Gamma\Big(\frac{a}{b}\Big)^b \sum_{k=rn}^{\infty} \frac{(-b)^k (tn)!^\beta}{k! \Gamma\big(-\frac{k}{b}\big)^b \big(-\frac{k}{b}\big)_{tn}^\beta} \cdot \frac{(k - rn + 1)_{rn}}{(rn)!} \cdot \frac{(sn)!^2}{\big(\frac{k+a}{b}\big)_{sn+1} \big(\frac{k+b}{b}\big)_{sn+1}}.$$

On remarque tout d'abord que

$$\begin{aligned}
\frac{(-b)^k (tn)!^\beta}{k! \Gamma\big(-\frac{k}{b}\big)^b \big(-\frac{k}{b}\big)_{tn}^\beta} &= \frac{(-b)^k (tn)!^\beta}{k! \Gamma\big(-\frac{k}{b}\big)^{b-\beta} \Gamma\big(-\frac{k}{b} + tn\big)^\beta} \\
&= (tn)!^\beta (-b)^k \left(\frac{\sin \pi (tn - k/b)}{\pi}\right)^\beta \left(\frac{\sin(-\pi k/b)}{\pi}\right)^{b-\beta} \\
&\quad \cdot \frac{\Gamma\big(1 + \frac{k}{b}\big)^{b-\beta} \Gamma\big(1 + \frac{k}{b} - tn\big)^\beta}{k!}.
\end{aligned}$$

(De nouveau, on se sert de la formule des compléments.) Donc

$$|I_n| \leq \Gamma\Big(\frac{a}{b}\Big)^b \sum_{k=rn}^{\infty} \frac{b^k (tn)!^\beta \Gamma\big(1+\frac{k}{b}\big)^{b-\beta} \Gamma\big(1+\frac{k}{b}-tn\big)^\beta}{k!} \cdot \frac{\Gamma(k+1)}{(rn)!\Gamma(k-rn+1)} \cdot \frac{(sn)!^2 \Gamma\big(\frac{k+a}{b}\big)\Gamma\big(\frac{k+b}{b}\big)}{\Gamma\big(\frac{k+a}{b}+sn+1\big)\Gamma\big(\frac{k+b}{b}+sn+1\big)}.$$

La série à droite, que l'on note J_n, étant à termes positifs et grâce à la formule de Stirling (qui s'applique à $\Gamma\big(1+\frac{k}{b}-tn\big)$ car on suppose que $k \geq rn \geq btn$), on peut appliquer la méthode de Laplace discrète [4] pour obtenir que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} J_n^{1/n} &= \max_{x>r} \left(\frac{b^x t^{\beta t} (x/b-t)^{\beta(x/b-t)} (x/b)^{x(b-\beta+2)/b} s^{2s}}{r^r (x-r)^{x-r} (x/b+s)^{2(x/b+s)}} \right) \\ &= \max_{x>r/b} \left(\frac{b^{bx} t^{\beta t} (x-t)^{\beta(x-t)} x^{x(b-\beta+2)} s^{2s}}{r^r (bx-r)^{bx-r} (x+s)^{2(x+s)}} \right). \end{aligned} \tag{6}$$

(Voir par exemple la seconde preuve du lemme 3 de [5] dans un contexte très similaire.) On note g la fonction de x dans (6). Pour déterminer les points critiques de g dans $]r/b,+\infty[$, il est plus facile de déterminer ceux de $\log(g)$ puisque

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = (\log(g))'(x) = \log\left(\frac{b^b (x-t)^\beta x^{b-\beta+2}}{(bx-r)^b (x+s)^2} \right).$$

Ceci conduit à résoudre l'équation algébrique

$$(x+s)^2 \left(x - \frac{r}{b}\right)^b - (x-t)^\beta x^{b-\beta+2} = 0$$

dont les solutions sont exactement les points critiques de g. On va montrer un peu plus loin que cette équation a exactement une seule solution réelle $x_0 > r/b$. Un rapide calcul montre alors que

$$g(x_0) = \frac{t^{\beta t} s^{2s} (bx_0 - r)^r}{r^r (x_0-t)^{\beta t} (x_0+s)^{2s}},$$

et donc que

$$\limsup_{n\to+\infty} |I_n|^{1/n} \leq \lim_{n\to+\infty} J_n^{1/n} = g(x_0).$$

Il nous reste à montrer que le polynôme $(x+s)^2\left(x-\frac{r}{b}\right)^b - (x-t)^\beta x^{b-\beta+2}$ s'annule une seule fois dans l'intervalle $]r/b,+\infty[$. Pour simplifier, on pose $u = r/b$. Puisque $x > r/b \geq t \geq 0$, il est équivalent de montrer que la fonction rationnelle

$$R(x) := \frac{(x+s)^2 (x-u)^b}{(x-t)^\beta x^{b-\beta+2}}$$

4. Cette méthode demande que le ou les extrema soient atteints en des points de l'intervalle ouvert $]r/b,+\infty[$. C'est bien le cas sous les hypothèses du théorème 1 (ii).

prend une seule fois la valeur 1 sur $]r/b, +\infty[$ dans les conditions de la proposition. (Au passage, on note que c'est manifestement faux lorsque $u = t$ et $\beta = b$ car alors $R(x) = (x+s)^2/x^2$.) On vérifie que

$$R(x) = 1 + \frac{2s + \beta t - r}{x} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{x^2}\Big)$$

lorsque $x \to +\infty$, et donc que $f(x) > 1$ pour tout x assez grand puisque l'on a supposé que $2s + \beta t - r > 0$.

On suppose dans un premier temps que $u > t$. On a

$$\frac{R'(x)}{R(x)} = \frac{2}{x+s} + \frac{b}{x-u} - \frac{\beta}{x-t} - \frac{b-\beta+2}{x} = \frac{\rho(x)}{(x+s)(x-u)(x-t)x},$$

où $\rho(x) = -(2s+\beta t - r)x^2 + \cdots$ est un polynôme de degré 2. Comme $\rho(u) = bu(u+s)(u-t) > 0$ (par l'hypothèse $u > t$) et $\lim_{+\infty} \rho(x) = -\infty$, ρ s'annule une et une seule fois sur l'intervalle $]u, +\infty[$. Puisque $R(u) = 0$ et $R(x) > 0$ pour $x > u$, on déduit de tout ce qui précède que R est croissante sur un certain intervalle $[u, \alpha]$, puis décroissante sur $[\alpha, +\infty[$. Comme elle est > 1 à partir d'un certain rang, il suit que R prend une seule fois la valeur 1 sur l'intervalle $]u, +\infty[$.

Supposons maintenant que $u = t \neq 0$ et $\beta < b$. On a

$$\frac{R'(x)}{R(x)} = \frac{2}{x+s} + \frac{b-\beta}{x-t} - \frac{b-\beta+2}{x} = \frac{\rho(x)}{(x+s)(x-t)x},$$

où $\rho(x) = -(2s+\beta t - bt)x + (b - \beta s + 2)ts$ s'annule en $X := \frac{(b-\beta+2)ts}{2s+\beta t-bt} > u$. (L'inéquation $X > u$ équivaut à $(b-\beta)s > -(b-\beta)t$, qui est manifestement vraie sous la condition $b \neq \beta$.) On conclut alors comme dans le cas précédent.

3.3. **Preuve de** (iii)**.** On donne la preuve pour $(q_n)_{n\geq 0}$ et on laisse le soin au lecteur de l'adapter dans le cas de $(p_n)_{n\geq 0}$. Rappelons que

$$q_n = \sum_{k=0}^{sn} \frac{(-1)^{sn-k}}{b^{bk+b}} \cdot \binom{sn}{k} \cdot \frac{(bk+rn+b-1)}{k!^b (rn)!} \cdot \frac{(sn)!\Gamma\big(k - sn + 1 - \frac{a}{b}\big)}{\Gamma\big(k + 2 - \frac{a}{b}\big)} \cdot \frac{(tn)!^\beta \Gamma(k+1)^\beta}{\Gamma(k+tn+1)^\beta}.$$

Par la formule des compléments,

$$\Gamma\Big(k - sn + 1 - \frac{a}{b}\Big) = \frac{\pi}{\Gamma\big(sn - k + \frac{a}{b}\big)\sin\pi\big(sn - k + \frac{a}{b}\big)} = \frac{(-1)^{sn-k}\pi}{\Gamma\big(sn - k + \frac{a}{b}\big)\sin\big(\pi\frac{a}{b}\big)}$$

et donc

$$q_n = \frac{\pi}{\sin\big(\pi\frac{a}{b}\big)} \sum_{k=0}^{sn} \binom{sn}{k} \cdot \frac{(bk+rn+b-1)}{k!^b (rn)! b^{bk+b}} \cdot \frac{(sn)!}{\Gamma\big(k+2-\frac{a}{b}\big)\Gamma\big(sn-k+\frac{a}{b}\big)} \cdot \frac{(tn)!^\beta \Gamma(k+1)^\beta}{\Gamma(k+tn+1)^\beta}.$$

On observe maintenant que q_n est en fait une somme de termes positifs (au facteur constant $\frac{\pi}{\sin(\pi a/b)}$ près), en utilisant l'hypothèse que $0 < a/b < 1$ pour le terme $\Gamma\big(k+2-\frac{a}{b}\big)\Gamma\big(sn -$

$k+\frac{a}{b})$. Grâce à la formule de Stirling, on peut de nouveau appliquer la méthode de Laplace discrète (modulo la remarque faite à la note de bas de page 4), qui nous donne

$$\lim_{n\to+\infty} |q_n|^{1/n} = \max_{0<x<s} \left(\frac{1}{b^{bx}} \cdot \frac{s^{2s}}{x^{2x}(s-x)^{2(s-x)}} \cdot \frac{(r+bx)^{r+bx}}{x^{bx}r^r} \cdot \frac{t^{t\beta}x^{\beta x}}{(x+t)^{\beta(x+t)}} \right).$$

Notons $h(x)$ la fonction dont on cherche le maximum. Pour déterminer les points critiques de h dans $[0,s]$, il suffit de déterminer ceux de $\log(h)$ puisque

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = (\log(h))'(x) = \log\left(\frac{(s-x)^2(r+bx)^b}{b^b x^{b-\beta+2}(x+t)^\beta}\right).$$

Ceci conduit à résoudre l'équation algébrique $(s-x)^2(x+r/b)^b = x^{b-\beta+2}(x+t)^\beta$ pour $x \in]0,s[$. On procéde alors comme pour l'étude de la fonction R au cours de la preuve du point (ii) du théorème 1 en étudiant les variations de la fonction rationnelle $S(x) := (s-x)^2(x+r/b)^b/x^{b-\beta+2}(x+t)^\beta$ afin de montrer qu'elle prend une seule fois la valeur 1 dans l'intervalle $]0,s[$. Clairement $S(x)\geq 0$ sur l'intervalle $]0,s]$ avec $\lim_0 S(x) = +\infty$ et $S(s)=0$. De plus,

$$\frac{S'(x)}{S(x)} = -\frac{2s}{s-x} + \frac{b}{x+r/b} - \frac{b-\beta+2}{x} - \frac{\beta}{x+t} = \frac{\sigma(x)}{x(s-x)(x+t)(x+r/b)},$$

où $\sigma(x) = -(2s+\beta t-r)x^2+\cdots$ est un polynôme de degré 2 tel que

$$\begin{gathered}\sigma(-t) = \beta t(t+s)(r-bt) \geq 0\\ \sigma(0) = -rst(b-\beta+2) < 0\\ \sigma(s) = -s(s+t)(bs+r) < 0.\\ \lim_{x\to\pm\infty} \sigma(x) = -\infty\end{gathered}$$

L'ensemble de ces propriétés de σ implique que σ ne s'annule pas dans $[0,s]$, donc est <0. La fonction S est donc décroissante et elle prend une seule fois la valeur 1 en un point que l'on note x_1. Un rapide calcul montre alors que

$$h(x_1) = \frac{t^{\beta t}s^{2s}(r+bx_1)^r}{r^r(s-x_1)^{2s}(t+x_1)^{\beta t}}.$$

Il faut maintenant montrer que l'on a $h(x_1)>1$. Pour tout $x\in[0,s[$, définissons la fonction

$$H(x) = \frac{t^{\beta t}s^{2s}b^r(x+r/b)^r}{r^r(x+t)^{\beta t}(s-x)^{2s}},$$

de sorte que $H(x_1) = h(x_1)$. Comme $H(0)=1$ et $\lim_s H(x) = +\infty$, il nous suffit de montrer que H est strictement croissante sur $[0,s[$. On constate que

$$\frac{H'(x)}{H(x)} = \frac{r}{x+r/b} - \frac{\beta t}{x+t} + \frac{2s}{s-x} = \frac{-\sigma(x)}{(x-r/b)(x+t)(s-x)},$$

donc $H'(x)>0$ sur $[0,s[$, ce qui termine la preuve du point (iii).

3.4. **Preuve de** (iv)**.** On va obtenir une estimation distincte des dénominateurs de p_n et q_n. L'expression proposée d'un dénominateur $\mathcal{D}_n$ suit immédiatement.

Lemme 3. *On a*

$$b^{b+bsn} d_{bsn+b-a} d^{\beta}_{(s+t)n} q_n \in \mathbb{Z}$$

et

$$b^{a+bsn} d_{bsn+b-a} d^{b}_{bsn+a} d^{\beta}_{b(s+t)n+a-1} p_n \in \mathbb{Z}.$$

Lorsque $t = 0$*, on peut remplacer* $d^{\beta}_{(s+t)n}$*, respectivement* $d^{\beta}_{b(s+t)n+a-1}$*, par* 1*.*

Démonstration. On commence par traiter le cas de q_n. On a

$$q_n = \sum_{k=0}^{sn} (-1)^{sn-k} b^{-b-bk} \binom{sn}{k} \cdot \frac{(kb+b+rn-1)!}{(rn)!k!^b} \cdot \frac{(sn)!}{\left(k - sn - \frac{a}{b} + 1\right)_{sn+1}} \cdot \frac{(tn)!^{\beta}}{(k+1)^{\beta}_{tn}}. \quad (7)$$

Comme $b - 1 \geq 0$, il est clair que

$$\frac{(kb+b+rn-1)!}{(rn)!k!^b} \in \mathbb{Z},$$

puisque c'est une multiple entier d'un coefficient multinomial.

Par ailleurs,

$$\frac{(tn)!}{(k+1)_{tn}} = \sum_{j=1}^{tn} \frac{(-1)^{tn-j}\binom{tn}{j} j}{k+j}$$

et donc puisque k varie de 0 à sn, on voit que

$$d^{\beta}_{(s+t)n} \frac{(tn)!^{\beta}}{(k+1)^{\beta}_{tn}} \in \mathbb{Z}.$$

Si $t = 0$, on a $\frac{(tn)!}{(k+1)_{tn}} = 1$ et le dénominateur cherché est seulement 1.

De même,

$$\frac{(sn)!}{\left(k - sn - \frac{a}{b} + 1\right)_{sn+1}} = \sum_{j=0}^{sn} \frac{(-1)^{sn-j}\binom{sn}{j}}{k - \frac{a}{b} + 1 - j}$$

et donc, lorsque k varie de 0 à sn,

$$d_{bsn+b-a} \frac{(sn)!}{\left(k - sn - \frac{a}{b} + 1\right)_{sn+1}} \in \mathbb{Z}.$$

En recollant les divers morceaux, on obtient le dénominateur annoncé pour q_n.

Passons maintenant à p_n, qui s'exprime comme

$$
\begin{aligned}
p_n &= \sum_{k=0}^{sn} \frac{(-1)^{sn-k+1}}{b^{bk+a}} \binom{sn}{k} \frac{(kb+a+rn-1)!(sn)!(tn)!^\beta}{(rn)!\big(k-sn+\frac{a}{b}-1\big)_{sn+1}\big(\frac{a}{b}\big)_k^{b-\beta}\big(\frac{a}{b}\big)_{k+tn}^\beta} \\
&= \sum_{k=0}^{sn} \frac{(-1)^{sn-k+1}}{b^{bk+a}} \binom{sn}{k} \cdot \frac{(kb+a+rn-1)!}{(rn)!k!^b} \cdot \frac{(sn)!}{\big(k-sn+\frac{a}{b}-1\big)_{sn+1}} \cdot \frac{k!^b}{\big(\frac{a}{b}\big)_k^b} \cdot \frac{(tn)!^\beta}{\big(k+\frac{a}{b}\big)_{tn}^\beta}.
\end{aligned} \tag{8}
$$

Par les mêmes méthodes que pour q_n, on vérifie que

$$\frac{(kb+a+rn-1)!}{(rn)!k!^b} \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad d_{bsn+b-a}\frac{(sn)!}{\big(k-sn+\frac{a}{b}-1\big)_{sn+1}} \in \mathbb{Z}.$$

De plus,

$$\frac{k!}{\big(\frac{a}{b}\big)_k} = \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{k-j}\binom{k}{j}j}{j+\frac{a}{b}},$$

d'où

$$d_{bsn+a}^b \frac{k!^b}{\big(\frac{a}{b}\big)_k^b} \in \mathbb{Z}.$$

Enfin,

$$\frac{(tn)!}{\big(k+\frac{a}{b}\big)_{tn}} = \sum_{j=1}^{tn} \frac{(-1)^{tn-j}\binom{tn}{j}j}{k+\frac{a}{b}+j-1},$$

ce qui nous donne

$$d_{b(s+t)n+a-1}^\beta \frac{(tn)!^\beta}{\big(k+\frac{a}{b}\big)_{tn}^\beta} \in \mathbb{Z}.$$

L'estimation du dénominateur de p_n en découle. □

3.5. **Preuve de** (v)**.** Les expressions des suites $(q_n)_{n\geq 0}$ et $(p_n)_{n\geq 0}$ données en (7) et (8) sont des sommes hypergéométriques. On voit en effet que

$$
\begin{aligned}
q_n = (-1)^{sn} &\frac{(rn+b-1)!(sn)!\Gamma\big(1-sn-\frac{a}{b}\big)}{b^b(rn)!\Gamma\big(2-\frac{a}{b}\big)} \\
&\times {}_{b+2}F_{b+1}\left[\begin{matrix}-sn, 1-sn-\frac{a}{b}, \frac{rn+b}{b}, \frac{rn+b+1}{b}, \dots, \frac{rn+2b-1}{b}+1 \\ 2-\frac{a}{b}, 1, \dots, 1, tn+1, \dots, tn+1\end{matrix}; 1\right]
\end{aligned} \tag{9}
$$

(avec $b-\beta$ paramètres 1 et β paramètres $tn+1$) et

$$
\begin{aligned}
p_n = (-1)^{sn+1} &\frac{(rn+a-1)!(sn)!\Gamma\big(\frac{a}{b}-1-sn\big)\Gamma\big(\frac{a}{b}\big)^\beta (tn)!^\beta}{b^a(rn)!\Gamma\big(\frac{a}{b}\big)\Gamma\big(tn+\frac{a}{b}\big)^\beta} \\
&\times {}_{b+2}F_{b+1}\left[\begin{matrix}-sn, \frac{a}{b}-1-sn, \frac{rn+a}{b}, \frac{rn+a+1}{b}, \dots, \frac{rn+a+b-1}{b} \\ \frac{a}{b}, \dots, \frac{a}{b}, tn+\frac{a}{b}, \dots, tn+\frac{a}{b}\end{matrix}; 1\right]
\end{aligned} \tag{10}
$$

(avec $b-\beta+1$ paramètres $\frac{a}{b}$ et β paramètres $tn+\frac{a}{b}$). ([5]) Il résulte donc de la théorie développée par Wilf et Zeilberger [16] que chacune de ces suites vérifie une récurrence linéaire à coefficients polynomiaux (qui dépendent de a, b, r, s, t et β), dont l'ordre est majoré par une fonction de b. Il est alors bien connu que l'on peut trouver une récurrence linéaire à coefficients polynomiaux (d'ordre éventuellement plus grand) dont $(p_n)_{n\geq 0}$ et $(q_n)_{n\geq 0}$ sont simultanément solutions. Comme I_n est une combinaison linéaire de p_n et q_n, $(I_n)_{n\geq 0}$ vérifie aussi cette récurrence.

Sur tous les exemples calculés (voir la partie 6), il s'avère que les suites $(p_n)_{n\geq 0}$ et $(q_n)_{n\geq 0}$ vérifient la même récurrence *minimale*.

4. Preuve du corollaire 1

On va en fait montrer un peu plus. On suppose qu'il existe un nombre rationnel κ tel que $0<\kappa<1$ et $t=r/b=\kappa s$. Le corollaire correspond au cas $\kappa=1/2$.

On applique tout d'abord le théorème 1 (*ii*), dont la condition $2s+\beta t>r$ se réduit à $s>t$, ce qui est automatiquement vérifié ici puisque $t=\kappa s$ avec $\kappa<1$. On vérifie que $x_0=\frac{st}{s-t}=\frac{\kappa}{1-\kappa}\,s$ puisque dans ce cas l'équation algébrique à résoudre se met sous la forme $(x-t)^{b-2}\big((x+s)^2(x-t)^2-x^4\big)=0$. Il en découle que

$$\limsup_{n\to+\infty}|I_n|^{1/n}\leq\left(\frac{t^t(s-t)^{s-t}}{t^t}\right)^2=\big(\kappa^\kappa(1-\kappa)^{1-\kappa}\big)^{2s}.$$

On applique ensuite le théorème 1 (*iii*) dans lequel l'équation algébrique à résoudre est

$$(x+t)^{b-2}\big((x-s)^2(x+t)^2-x^4\big)=0.$$

On obtient facilement que

$$x_1=\frac{s-t+\sqrt{s^2+6st+t^2}}{4}=\omega(\kappa)s.$$

Il en découle que

$$\lim_{n\to+\infty}q_n^{1/n}=\left(\frac{(\kappa+\omega(\kappa))^\kappa}{\kappa^\kappa(1-\omega(\kappa))}\right)^{2s},$$

ce qui termine la preuve.

5. Démonstration des estimations (2)

Lorsque $r=t=0$ et $s=1$ (ce que l'on suppose dans la suite), la condition $2sn+\beta tn-rn>1+\frac{b-1}{2}$ du lemme 2 est vérifiée pour n assez grand (lorsque l'on remplace r, s, t par rn, sn, tn respectivement). On a donc

$$I_n=-\Gamma\Big(\frac{a}{b}\Big)^b\sum_{k=1}^\infty\frac{(-b)^k}{k!\,\Gamma\big(-\frac{k}{b}\big)^b}\cdot\frac{n!^2}{\big(\frac{k+a}{b}\big)_{n+1}\big(\frac{k+b}{b}\big)_{n+1}}.$$

---

5. L'intégrale I_n est quant à elle une somme de b séries hypergéométriques.

On ne peut pas appliquer le théorème 1 (*ii*) et on va montrer directement que

$$|I_n| \leq c(a,b) n^{b/2+2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b^k \Gamma\big(1+\frac{k}{b}\big)^b}{k! k^{b/2+2}}, \tag{11}$$

où $c(a,b)$ est une constante indépendante de n et où la série est convergente (comme on le voit par une application de la formule de Stirling).

Rappelons tout d'abord que

$$\frac{(-b)^k}{k!\Gamma\big(-\frac{k}{b}\big)^b} = \frac{(-b)^k \Gamma(1+\frac{k}{b})^b}{k!\pi} \sin\Big(-\pi\frac{k}{b}\Big)^b. \tag{12}$$

Par ailleurs, pour tout $k \geq 1$, on a

$$\Big(\frac{k+a}{b}\Big)_{n+1} \geq \Big(\frac{a}{b}\Big)_{n+1} = \frac{a}{b}\Big(\frac{a}{b}+1\Big)_n \geq \frac{a}{b} n!. \tag{13}$$

De plus, pour tout $k \geq 1$ et tout n tel que $n - [b/2] - 2 \geq 0$, on a

$$\begin{aligned}\Big(\frac{k+b}{b}\Big)_{n+1} &= \Big(\frac{k+b}{b}\Big)_{[b/2]+3}\Big(\frac{k+b}{b}+\Big[\frac{b}{2}\Big]+3\Big)_{n-[b/2]-2} \\ &\geq k^{[b/2]+3} b^{-[b/2]-3} (n-[b/2]-2)!. \end{aligned} \tag{14}$$

Il découle de (12), (13) et (14) que

$$\begin{aligned}\left|\frac{(-b)^k}{k!\Gamma\big(-\frac{k}{b}\big)^b} \cdot \frac{n!^2}{\big(\frac{k+a}{b}\big)_{n+1}\big(\frac{k+b}{b}\big)_{n+1}}\right| &\leq \frac{b^{1+[b/2]+3}}{a\pi} \cdot \frac{b^k \Gamma\big(1+\frac{k}{b}\big)^b}{k! k^{[b/2+3]}} \cdot \frac{n!}{(n-[b/2]-2)!} \\ &\leq \frac{b^{1+[b/2]+3}}{a\pi} \cdot n^{[b/2]+2} \cdot \frac{b^k \Gamma\big(1+\frac{k}{b}\big)^b}{k! k^{[b/2]+3}} \\ &\leq c(a,b) n^{b/2+2} \cdot \frac{b^k \Gamma\big(1+\frac{k}{b}\big)^b}{k! k^{b/2+2}},\end{aligned}$$

ce qui prouve (11).

Pour obtenir le comportement asymptotique de q_n, on peut en revanche appliquer le théorème 1 (*iii*). On obtient que $x_1 = 1/2$ puisque l'équation algébrique à résoudre se réduit à $x^b((1-x)^2 - x^2) = 0$. Il vient alors

$$\lim_{n \to +\infty} |q_n|^{1/n} = 4.$$

On a donc bien $I_n = \mathcal{O}(n^{b/2+2}) = q_n^{o(1)}$, ce qui termine la preuve des estimations (2).

6. Récurrences linéaires

Les fonctions hypergéométriques en (9) et (10) étant d'ordre $b+2$, il faut s'attendre à obtenir des récurrences linéaires d'ordre au moins $b+2$ en général, bien que cela puisse être moins dans certains cas. Dans cette partie, on présente des récurrences pour $a/b = 1/2$, $1/3$ et $1/4$, avec à chaque fois $r = 0$, $s = 1$, $t = 0$, $\beta = 0$. Dans les deux premiers cas, les récurrences sont d'ordre 2, ce qui conduit à des fractions continues irrégulières pour $\Gamma(1/2)^2 = \pi$ et $\Gamma(1/3)^3$ dont $(p_n/q_n)_{n\geq}$ sont les réduites. La vitesse de convergence des diverses suites p_n/q_n vers leurs limites respectives est en $4^{-n(1+o(1))}$, puisque l'on est dans le cadre des estimations (2).

6.1. **Une récurrence linéaire d'ordre 2 pour $\Gamma(1/2)^2$.** L'algorithme Ekhad de Zeilberger [8] appliqué aux suites $(p_n)_{n\geq 0}$ et $(q_n)_{n\geq 0}$ montre qu'elles vérifient toutes les deux la récurrence d'ordre 2 suivante :

$$\begin{aligned}&4(4n+3)(2n+3)^2u_{n+2}\\&\qquad = -(16n^4-192n^3-872n^2-1088n-411)u_{n+1}+(4n+3)(4n+1)(2n+3)^2u_n.\end{aligned}$$

Les valeurs initiales sont $p_0 = 1$, $p_1 = \frac{14}{3}$ et $q_0 = \frac{1}{2}$, $q_1 = \frac{3}{2}$.

6.2. **Une récurrence linéaire d'ordre 2 pour $\Gamma(1/3)^3$.** Cette partie contient la preuve du théorème 2. L'algorithme Ekhad appliqué aux suites $(p_n)_{n\geq 0}$ et $(q_n)_{n\geq 0}$ montre qu'elles vérifient toutes les deux la récurrence d'ordre 2 suivante :

$$\begin{aligned}&3(n+2)(27n^2+36n+13)(3n+4)^3u_{n+2} =\\&\quad (10935n^6+80190n^5+238545n^4+368550n^3+312552n^2+138648n+25408)u_{n+1}\\&\qquad\qquad\qquad\qquad - 162n(2n+1)(27n^2+90n+76)(n+1)^2u_n.\end{aligned}$$

Les valeurs initiales sont $p_0 = \frac{1}{2}$, $p_1 = \frac{93}{10}$ et $q_0 = \frac{1}{9}$, $q_1 = \frac{13}{27}$.

Cette récurrence peut se traduire par la fraction continue irrégulière

$$\Gamma\Big(\frac{1}{3}\Big)^3 = \frac{9/2\,|}{|\,C(0)} - \frac{A(0)B(1)|}{|\quad C(1)} - \cdots - \frac{A(n)B(n+1)|}{|\quad C(n+1)} - \cdots,$$

avec

$$\begin{aligned}A(n) &= 3(n+2)(27n^2+36n+13)(3n+4)^3,\\B(n) &= 162n(2n+1)(27n^2+90n+76)(n+1)^2,\\C(n) &= (10935n^6+80190n^5+238545n^4+368550n^3+312552n^2+138648n+25408).\end{aligned}$$

6.3. **Une récurrence linéaire d'ordre 3 pour $\Gamma(1/4)^4$.** L'algorithme Ekhad appliqué aux suites $(p_n)_{n\geq 0}$ et $(q_n)_{n\geq 0}$ montre qu'elles vérifient toutes les deux la récurrence d'ordre 3 suivante :

$$
\begin{aligned}
&-512(4n+1)(4n-1)(18432n^5+208896n^4+936832n^3+2072304n^2\\
&+2253348n+959715)(n+2)^2(n+1)^2u_n+8(42467328n^9+655884288n^8+4366073856n^7\\
&+16381784064n^6+38033003520n^5+56442202112n^4+53351659456n^3\\
&+30889737792n^2+9930226356n+1353935925)(n+2)^2u_{n+1}\\
&-(226492416n^{11}+4794089472n^{10}+45521829888n^9+255616548864n^8+941567410176n^7\\
&+2383767474176n^6+4220315685888n^5+5204016664704n^4+4354235126272n^3\\
&+2333220107040n^2+710068731174n+90532639413)u_{n+2}\\
&+8(18432n^5+116736n^4+285568n^3+330864n^2+175812n+32303)(n+3)^2(4n+9)^4u_{n+3}=0.
\end{aligned}
$$

Les valeurs initiales sont $p_0 = \frac{1}{3}$, $p_1 = \frac{676}{211}$ et $q_0 = \frac{1}{32}$, $q_1 = \frac{47}{256}$.

Bibliographie

[1] G. Almkvist, D. van Straten et W. Zudilin, *Apéry limits of differential equations of order 4 and 5*, in Modular Forms and String Duality (Banff, June 3–8, 2006), N. Yui, H. Verrill, and C. F. Doran (eds.), Fields Inst. Commun. Ser. 54 (2008), Amer. Math. Soc. & Fields Inst., 105–123.

[2] Y. André, *G-functions and geometry*, Aspects of Mathematics, **E13**, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1989. xii+229 pp.

[3] Y. André, *Une introduction aux motifs (motifs purs, motifs mixtes, périodes)*, Panoramas et Synthèses **17**, Société Mathématique de France, Paris, 2004. xii+261 pp.

[4] A. I. Aptekarev, *Rational approximants for Euler constant and recurrence relations*, Sovremennye Problemy Matematiki ("Current Problems in Mathematics"), vol. **9**, MIAN (Steklov Institute), Moscow, 2007.

[5] K. Ball et T. Rivoal, *Irrationalité d'une infinité de valeurs de la fonction zêta aux entiers impairs*, Invent. Math. **146**.1 (2001), 193–207.

[6] S. Bruiltet, *D'une mesure d'approximation simultanée à une mesure d'irrationalité : le cas de* $\Gamma(1/4)$ *et* $\Gamma(1/3)$, Acta Arith. **104**.3 (2002), 243–281.

[7] H. Cohen, *Accélération de la convergence de certaines récurrences linéaires*, Sémin. Théor. Nombres 1980–1981, Exposé no.16, 2 p. (1981).

[8] S. B. Ekhad, programme *Maple* disponible à
`http://www.math.rutgers.edu/~zeilberg/tokhniot/EKHAD8`.

[9] S. Fischler et T. Rivoal, *Un exposant de densité en approximation rationnelle*, Internat. Math. Res. Notices **2006** (2006), Article ID 95418, 48 pages.

[10] M. Kontsevich et D. Zagier, *Periods*, in Mathematics Unlimited – 2001 and Beyond, Springer, Berlin, 2001, 771–808.

[11] Yu. V. Nesterenko, *Modular functions and transcendence questions*, (en russe) Mat. Sb. **187** (1996), no. 9, 65–96 ; traduction en anglais dans Sb. Math. **187** (1996), no. 9, 1319–1348.

[12] T. Rivoal, *La fonction zêta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I Math. **331**.4 (2000), 267–270.

[13] T. Rivoal, *Applications arithmétiques de l'interpolation lagrangienne*, Int. J. Number Theory **5**.2 (2009), 185-208

[14] T. Rivoal, *Rational approximations for values of derivatives of the Gamma function*, Trans. Amer. Math. Soc. **361** (2009), 6115–6149.

[15] T. Rivoal,*Approximations rationnelles des valeurs de la fonction Gamma aux rationnels*, prépublication (2009), 12 pages, à paraître au J. Number Theory.

[16] H. S. Wilf et D. Zeilberger, *An algorithmic proof theory for hypergeometric (ordinary and "q") multisum/integral identities*, Invent. Math. **108**.3 (1992), 575–633.

[17] Y. Yang, *Apéry limits and special values of L-functions*, J. Math. Anal. Appl. **343** (2008), 492–513.

[18] W. Zudilin, *An Apéry-like difference equation for Catalan's constant*, Electron. J. Combin. **10** (2003), Research Paper 14, 10 pp. (electronic)

T. Rivoal, Institut Fourier, CNRS UMR 5582, Université Grenoble 1, 100 rue des Maths, BP 74, 38402 Saint-Martin d'Hères cedex, France.

Email : tanguy.rivoal@ujf-grenoble.fr

MSC2000 : 11J72 Keywords : fonction Gamma, approximations rationnelles, périodes