UN EXPOSANT DE DENSITÉ EN APPROXIMATION RATIONNELLE

par

Stéphane Fischler et Tanguy Rivoal

Résumé. — Soit ξ un nombre irrationnel. Si l'on connaît une suite d'approximations diophantiennes $u_n\xi - v_n \to 0$, avec u_n, v_n entiers, on peut en général en déduire une majoration de son exposant d'irrationalité $\mu(\xi)$, c'est-à-dire une mesure de l'écart entre ξ et les rationnels ; la meilleure suite possible pour cela est celle des réduites de ξ. Nous introduisons dans cet article une nouvelle façon de mesurer l'irrationalité de ξ au moyen d'un nombre $\nu(\xi)$, l'exposant de densité de ξ, qui tient compte non seulement de la petitesse des approximations $u_n\xi - v_n$ mais aussi de la régularité de la suite $(u_n)_n$. En particulier $\nu(\xi) < +\infty$ implique que $\mu(\xi) < +\infty$. Entre autres choses, nous montrons que $\nu(\xi) = 0$ presque sûrement, que $\nu(\xi) = 0$ pour tout ξ quadratique et que $\nu(\xi) < +\infty$ pour tout ξ algébrique réel ayant au moins un autre conjugué réel. Nous majorons également explicitement l'exposant de densité de périodes telles que $\log(2)$, π et $\zeta(3)$. Le texte contient un certain nombre de questions ouvertes, par exemple que vaut $\nu(e)$?

Abstract. — Let ξ an irrational number. A sequence of diophantine approximations $u_n\xi - v_n \to 0$, with u_n, v_n integers, generally yields an upper bound for the irrationality exponant $\mu(\xi)$, i.e., a measure of the gap between ξ and rational numbers ; the sequence of convergents is the best possible in this direction. We introduce in this article a new way to measure the irrationality of ξ by means of a number $\nu(\xi)$, the density exponent, which takes into account not only the size of $u_n\xi - v_n$ but also the regularity of the sequence $(u_n)_n$. In particular, $\nu(\xi) < +\infty$ implies that $\mu(\xi) < +\infty$. Amongst other things, we show that $\nu(\xi) = 0$ almost surely, that $\nu(\xi) = 0$ for all quadratic numbers ξ and $\nu(\xi) < +\infty$ for all real algebraic numbers with at least one other real conjuguate. We provide upper bounds for the density exponent of periods like $\log(2)$, π et $\zeta(3)$. We also mention a number of open questions, for example, what is the value of $\nu(e)$?

1. Introduction

Le but de ce texte est de définir *l'exposant de densité* d'un nombre réel irrationnel ξ, noté $\nu(\xi)$. Il s'agit d'une nouvelle façon de mesurer l'irrationalité d'un nombre, à partir des suites d'approximations rationnelles à croissance géométrique. Cet exposant diffère sensiblement de l'exposant classique d'irrationalité, noté $\mu(\xi)$, qui est la borne inférieure de l'ensemble des μ pour lesquels l'équation $|\xi - p/q| \le q^{-\mu}$ n'a qu'un nombre fini de solutions (avec la convention $\mu(\xi) = +\infty$ si cet ensemble est vide). Parmi les propriétés et résultats connus concernant l'exposant $\mu(\xi)$ (pour $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$), rappelons les suivants :

- On a $\mu(\xi) \geq 2$ pour tout $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, et $\mu(\xi) = 2$ pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$ au sens de la mesure de Lebesgue. Ce dernier résultat est un cas particulier d'un théorème classique beaucoup plus précis, dû à Khintchine [**37**, p. 69]. Par ailleurs, l'ensemble des ξ tels que $2 \leq \mu(\xi) < +\infty$ est maigre (au sens topologique de Baire).
- La valeur de $\mu(\xi)$ est gouvernée par le développement en fraction continue de ξ : il suffit de connaître la taille de $|\xi - p/q|$ quand p/q est une réduite pour calculer $\mu(\xi)$. Il en découle que $\mu(\xi) = 2$ dès que ξ est à quotients partiels bornés.
- On a $\mu(\xi) = 2$ pour tout nombre algébrique réel ξ (théorème de Roth [**51**]). La recherche de versions effectives de ce résultat est un enjeu important.
- On a $\mu(e) = 2$ et, plus précisément, on connaît exactement (voir par exemple [**1**], [**17**] et [**21**]) la taille minimale que $|e - p/q|$ prend une infinité de fois et le nombre de fois où cette quantité est petite. Ces deux résultats sont fondés sur le développement en fraction continue de e, qui est connu explicitement. Ils montrent que e ne se comporte pas comme un nombre générique (pour la mesure de Lebesgue) en ce qui concerne l'approximation rationnelle ; en particulier, il ne satisfait pas au théorème « presque sûr » de Khintchine auquel on a fait allusion ci-dessus.
- On sait que les exposants d'irrationalité de $\Gamma(1/3)$ et $\Gamma(1/4)$ sont finis ; on en connaît des majorants explicites très grands (Bruiltet [**15**]).
- On connaît également un certain nombre de majorations explicites de l'exposant d'irrationalité de périodes irrationnelles (au sens de Kontsevich-Zagier [**38**]). Ainsi, la preuve d'Apéry [**5**] donne $\mu(\zeta(3)) \leq 13,417821$ et les raffinements ultérieurs ont permis d'obtenir $\mu(\zeta(3)) \leq 5,513891$ (Rhin-Viola [**49**]). Dans la même veine, on sait majorer les exposants d'irrationalité de nombres tels que π (Hata [**35**]), $\pi/\sqrt{3}$ (Dubitskas [**24**] puis Hata [**35**]), $\log(2)$ (Rhukadze [**52**]), $\log(3)$ (Rhin [**47**]), π^2(Rhin-Viola [**48**]), etc, ce qui donne souvent lieu à une petite compétition pour obtenir des exposants de plus en plus proches de 2. Voir les bibliographies de ces articles pour les références à d'autres travaux, ainsi que [**58**]. On sait également majorer l'exposant d'irrationalité des valeurs de la fonction beta d'Euler $\mathrm{B}(p, q) = \Gamma(p)\Gamma(q)/\Gamma(p+q)$ pour certains rationnels p, q non entiers, par exemple $\Gamma(1/4)^2/\sqrt{\pi}$; pour tout rationnel $p/q \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$, les nombres $\Gamma(p/q)^q$ sont des périodes (voir [**3**, p. 212]) mais on conjecture que $\Gamma(p/q)$ ne l'est pas. En fait, une conjecture qui appartient au « folklore » prévoit que toute période irrationnelle (notamment celles citées ci-dessus) a un exposant d'irrationalité fini : voir [**59**] pour un survol des propriétés connues ou attendues de ces nombres.

Alors que $\mu(\xi)$ dépend seulement de la précision des approximations rationnelles p/q (c'est-à-dire de la petitesse de $|\xi - p/q|$ en fonction de la taille de q), l'exposant de densité $\nu(\xi) \in [0, +\infty]$ prend aussi en compte, de manière cruciale, la *régularité* de l'ensemble des « bonnes » approximations p/q. Plus précisément, $\nu(\xi)$ est défini à partir de suites $(u_n)_{n \geq 1}$ de dénominateurs à croissance géométrique, en demandant que les formes linéaires correspondantes, notées $u_n\xi - v_n$, soient petites et à décroissance géométrique régulière. (Nous suggérons au lecteur de se référer dès à présent à la définition de l'exposant de densité donnée au paragraphe 2.1.) Il s'avère que les approximations rationnelles v_n/u_n de ξ qui apparaissent dans le calcul de $\nu(\xi)$ sont souvent de piètre qualité quand on les compare aux réduites : leur intérêt est plutôt dans leur régularité, ce qui permet d'ailleurs de majorer $\mu(\xi)$.

Dans cet article, on arrive à majorer $\nu(\xi)$ en utilisant trois outils : le caractère générique de ξ, son développement en fraction continue si les quotients partiels sont bornés et des constructions *ad hoc* (de nature hypergéométrique, matricielle ou modulaire). On démontre les propriétés suivantes :

- On a $\nu(\xi) \geq 0$ pour tout $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, et $\nu(\xi) = 0$ pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$ (au sens de la mesure de Lebesgue). L'ensemble des ξ tels que $0 \leq \nu(\xi) < +\infty$ est maigre.

- Il ne semble pas, en général, que $\nu(\xi)$ soit lié au développement en fraction continue de ξ. En effet, les réduites ne forment pas (en général) une suite à croissance géométrique : leur propriété caractéristique (à savoir la petitesse de $q\xi - p$ par rapport à la taille de q) n'est pas utile pour majorer $\nu(\xi)$. Il semble que les réduites interviennent seulement quand les quotients partiels de ξ sont bornés ; dans ce cas, on démontre que $\nu(\xi) < +\infty$.

- La démonstration d'un théorème classique de Baker [**6**] (i.e., $\mu\big(2^{1/3}\big) \leq 2,9471$ qui est plus faible que le théorème de Roth mais effectif) nous permet de montrer que $\nu\big(2^{1/3}\big) \leq \frac{3}{2}\log 3$; plus généralement, sa méthode nous permet de montrer que l'exposant de densité de certains nombres algébriques de la forme $a^{1/n}$ est fini (a, n entiers). Les améliorations ultérieures du résultat de Baker (voir [**8**] par exemple) ne nous ont pas permis d'obtenir une meilleure borne pour l'exposant de densité de ces nombres. Pour un nombre algébrique irrationnel ξ quelconque, on conjecture que $\nu(\xi) = 0$, ce que l'on prouve pour ξ quadratique. Nous ne savons pas prouver que $\nu(\xi) < +\infty$ en général mais nous montrons que c'est le cas pour les nombres algébriques réels ayant au moins un conjugué réel (donc en particulier pour les algébriques de degré pair).

- On ne sait pas calculer $\nu(e)$ ni même montrer qu'il est fini. En effet, le développement en fraction continue de e semble n'être d'aucune utilité dans ce cas et on ne sait pas construire des formes linéaires à comportement géométrique $u_n e - v_n$ qui démontrent l'irrationalité de e. On ne connaît pas non plus de telles suites pour $\Gamma(1/4)$ et $\Gamma(1/3)$.

- La preuve d'Apéry donne $\nu(\zeta(3)) \leq 3$ mais les travaux ultérieurs n'améliorent pas cette majoration. En effet, ceux-ci conduisent à des suites moins denses, puisqu'il s'agit en fait de raffinements de suites extraites de celles d'Apéry. Il existe d'autres nombres irrationnels, tels que $\zeta(2) = \pi^2/6$, $\log(2)$, π, pour lesquels des constructions hypergéométriques (souvent liées à des problèmes d'approximation de Padé) permettent de majorer l'exposant de densité. Pour y parvenir, nous raffinons les méthodes utilisées pour majorer l'exposant d'irrationalité de ces nombres.

Quand on cherche la nature arithmétique d'un nombre réel ξ donné, on arrive parfois à démontrer son irrationalité de façon *constructive* en produisant deux suites d'entiers $(a_n)_n$

et $(b_n)_n$ telles que $0 \neq a_n\xi - b_n \to 0$ quand $n \to +\infty$; ce n'est pas toujours le cas, comme le montrent les exemples des nombres e^π, $\Gamma(1/4)$ ou $\Gamma(1/3)$ dont on ne sait pas montrer l'irrationalité sans montrer leur transcendance sur $\mathbb{Q}$, voire leur indépendance algébrique avec d'autres nombres [**42**]. En dehors de e^π (pour lequel on ne sait pas si $\mu(e^\pi) < +\infty$), tous les nombres cités précédemment possèdent un exposant d'irrationalité fini dont on conjecture qu'il vaut 2, si ce n'est pas déjà prouvé.

L'exposant de densité est une façon totalement différente de classifier les réels, qui prend en compte la nature des suites permettant de prouver l'irrationalité. À cet égard, nous aimerions connaître les réponses aux questions suivantes (d'autres émaillent le texte) : Existe-t-il une raison au fait que l'on retombe systématiquement sur les suites d'Apéry (ou des variations de même nature) lorsque l'on cherche à montrer que $\zeta(3) \notin \mathbb{Q}$ (voir [**27**] pour un survol des preuves connues) ? Existe-t-il une raison au fait qu'aucune des suites connues prouvant que $e \notin \mathbb{Q}$ ne soit à croissance géométrique ? Étant donné un réel $\tau \in]0, +\infty[$, existe-t-il un irrationnel ξ tel que $\nu(\xi) = \tau$?

Les périodes irrationnelles forment une classe remarquable de nombres dont le second auteur se demande si l'exposant de densité est toujours fini. Le premier auteur imagine que oui et serait tenté de conjecturer que $\nu(\xi) = 0$ pour toute période irrationnelle ξ : cela impliquerait en particulier que $\nu(\xi) = 0$ pour tout nombre algébrique ξ. Il s'agit d'un analogue du théorème de Roth mais on ne sait même pas démontrer que $\nu(\xi) < +\infty$ à part dans les cas cités précédemment. Le point difficile consiste à produire des suites régulières d'approximations, alors que justement le théorème de Roth produit des approximations précises mais ne donne aucun contrôle sur la régularité de la croissance de ces approximations. Notons que l'ensemble des nombres irrationels dont l'exposant de densité est fini est non dénombrable (proposition 4) : il contient donc strictement l'ensemble des périodes, qui est dénombrable. Il serait évidemment très intéressant d'obtenir une fonction de nature diophantienne $p : \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ telle que $p(\xi) < +\infty$ si, et seulement si, ξ est une période irrationnelle ; rappelons que l'on est à ce jour très loin de savoir montrer l'irrationalité de toutes les périodes (présumées telles).

Il apparaît clairement que les problèmes liés à la majoration de $\nu(\xi)$ nécessitent des idées très différentes de celles concernant la majoration de $\mu(\xi)$: nous espérons que cet article sera une première étape vers la réponse à ces questions et l'introduction de nouvelles méthodes dans les preuves d'irrationalité.

Table des matières

2. Définition et premières propriétés

2.1. Définition de l'exposant de densité. — Soit $\xi \in \mathbb{R}$. Dans toute la suite, on suppose que ξ est irrationnel. Soit $\mathbf{u} = (u_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante d'entiers strictement positifs. Pour tout $n \geq 1$, on note v_n l'entier le plus proche de $u_n\xi$ et on pose :

$$\alpha_\xi(\mathbf{u}) = \limsup_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}\xi - v_{n+1}|}{|u_n\xi - v_n|} \quad \text{et} \quad \beta(\mathbf{u}) = \limsup_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

Définition 1. — *Pour $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, on appelle* exposant de densité de ξ, *et on note $\nu(\xi)$, la borne inférieure de l'ensemble des réels $\log\sqrt{\alpha_\xi(\mathbf{u})\beta(\mathbf{u})}$, quand $\mathbf{u}$ décrit l'ensemble des suites croissantes $\mathbf{u} = (u_n)_{n\geq 1}$ d'entiers strictement positifs telles que*

$$\alpha_\xi(\mathbf{u}) < 1 \quad \text{et} \quad \beta(\mathbf{u}) < +\infty. \tag{2.1}$$

S'il n'existe aucune telle suite $\mathbf{u}$, on pose $\nu(\xi) = +\infty$.

Remarques. — *1) La condition $\nu(\xi) < +\infty$ signifie qu'il existe une preuve « à la Apéry » de l'irrationalité de ξ : toute suite $\mathbf{u}$ telle que $\alpha_\xi(\mathbf{u}) < 1$ et $\beta(\mathbf{u}) < +\infty$ fournit une telle preuve.*

2) Le point crucial dans la définition de l'exposant de densité est que l'on prend pour $\alpha_\xi(\mathbf{u})$ la limite supérieure de $|u_{n+1}\xi - v_{n+1}|/|u_n\xi - v_n|$. Si, au lieu de cela, on avait considéré $\limsup |u_n\xi - v_n|^{1/n}$, l'exposant ainsi obtenu n'aurait pas eu toutes les propriétés intéressantes de l'exposant de densité qui sont exposées ici : c'est ce que montre la construction exposée au paragraphe 4.4. Avec notre définition, l'hypothèse $\alpha_\xi(\mathbf{u}) < 1$ impose notamment à la suite $(|u_n\xi - v_n|)_n$ d'être strictement décroissante à partir d'un certain rang.

3) Soient $\mathbf{u}$ une suite croissante vérifiant (2.1) *et $p \geq 2$ un entier. Supposons que les limites supérieures qui définissent $\alpha_\xi(\mathbf{u})$ et $\beta(\mathbf{u})$ sont en fait des limites. Alors la suite extraite $\mathbf{u}' = (u_{np})_{n\geq 1}$ vérifie $\alpha_\xi(\mathbf{u}') = \alpha_\xi(\mathbf{u})^p$ et $\beta(\mathbf{u}') = \beta(\mathbf{u})^p$. Elle vérifie donc*

$\log\sqrt{\alpha_\xi(\mathbf{u}')\beta(\mathbf{u}')} \geq \log\sqrt{\alpha_\xi(\mathbf{u})\beta(\mathbf{u})}$ puisque l'on a toujours $\alpha_\xi(\mathbf{u})\beta(\mathbf{u}) \geq 1$, d'après la proposition 2 ci-dessous.

4) L'exposant de densité est défini comme une borne inférieure, qui n'a aucune raison d'être atteinte. Cependant, elle peut l'être : lorsque ξ est quadratique, nous construisons deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ telles que $\log\sqrt{\alpha_\xi(\mathbf{u})\beta(\mathbf{u})} = 0 = \nu(\xi)$.

5) Dès qu'il existe un réel $x \neq 0$ tel que $u_n x - v_n \to 0$, on a $\beta(|\mathbf{v}|) = \beta(\mathbf{u})$, avec $|\mathbf{v}| = (|v_n|)$.

2.2. Lemmes élémentaires sur les limites. — Le premier lemme est un exercice facile.

Lemme 1. — *On a $\limsup_{n\to+\infty} |u_n\xi - v_n|^{1/n} \leq \alpha_\xi(\mathbf{u})$ et $\limsup_{n\to+\infty} u_n^{1/n} \leq \beta(\mathbf{u})$.*

Les inégalités peuvent être strictes, comme on le voit sur l'exemple de la suite $\mathbf{u}$ définie par $u_n = 2^n$ si n pair et $u_n = 3\cdot 2^n$ si n impair. Il est bien connu toutefois que si une suite $(x_n)_n$ est telle que $|x_{n+1}/x_n|$ converge, alors $|x_n|^{1/n}$ converge aussi vers la même limite ; la réciproque est fausse. Dans le sens d'une réciproque (partielle), on dispose du lemme suivant.

Lemme 2. — *Soit $(x_n)_n$ une suite croissante de réels strictement positifs tendant vers l'infini, telle que $\lambda = \limsup_{n\to+\infty} x_n^{1/n}$ vérifie $1 < \lambda < \infty$.*

Pour tout $\lambda' > \lambda$ il existe une suite croissante $(x'_n)_n$ de réels strictement positifs telle que :

- *Pour tout n, x'_n est un multiple entier de x_n.*
- *La limite $\lim_n x'_{n+1}/x'_n$ existe et vaut λ'.*

Démonstration. — Pour les premières valeurs de n, on pose $x'_n = x_n$; puis, pour n assez grand, on définit x'_n comme étant l'unique réel de l'intervalle $[\lambda'^n, \lambda'^n + x_n[$ qui soit un multiple entier de x_n. Comme $x_n < (\lambda' - 1)\lambda'^n$ pour n assez grand, la suite (x'_n) est clairement croissante. On a en outre

$$\frac{\lambda'^{n+1}}{\lambda'^n + x_n} \leq \frac{x'_{n+1}}{x'_n} \leq \frac{\lambda'^{n+1} + x_{n+1}}{\lambda'^n}$$

ce qui termine la preuve puisque $\lambda' > \lambda$. □

Remarques. — *1) Nous utiliserons ce résultat seulement dans le cas où les x_n sont entiers. Il s'agira d'un dénominateur par lequel on multiplie une forme linéaire rationnelle en 1 et ξ pour rendre entiers ses coefficients.*

2) Cet énoncé est tout à fait constructif : comme le montre sa preuve, on peut prendre $x'_n = \lceil \lambda'^n / x_n \rceil \cdot x_n$.

2.3. Invariance par homographie. —

Lemme 3. — *Soient $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ tels que $ad - bc \neq 0$. Alors, on a*

$$\nu\left(\frac{a\xi + b}{c\xi + d}\right) = \nu(\xi),$$

les deux membres pouvant éventuellement être infinis.

Remarque. — *Il en découle en particulier que si deux réels ξ_1 et ξ_2 vérifient $\nu(\xi_1) \neq \nu(\xi_2)$, alors $1, \xi_1$ et ξ_2 sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$.*

Démonstration. — Ce résultat est évident si l'homographie en question est $z \mapsto 1/z$ (en utilisant la remarque 5 à la fin du paragraphe 2.1), $z \mapsto z + \lambda$ ou $z \mapsto \mu z$ (avec $\lambda \in \mathbb{Q}$ et $\mu \in \mathbb{Q}^\star$). Le cas général en découle par composition, grâce à la formule

$$\frac{a\xi + b}{c\xi + d} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(c\xi + d)},$$

qui est valable si $c \neq 0$. $\square$

3. Lien avec l'exposant d'irrationalité

On rappelle que l'exposant d'irrationalité de ξ, noté $\mu(\xi)$, est la borne inférieure de l'ensemble des μ pour lesquels l'équation $|\xi - p/q| \leq q^{-\mu}$ n'a qu'un nombre fini de solutions (avec la convention $\mu(\xi) = +\infty$ si cet ensemble est vide).

La proposition suivante est une variante de celle utilisée d'habitude pour majorer $\mu(\xi)$ (voir [**26**, p. 169] ou [**36**] par exemple) :

Proposition 1. — *Soient $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ deux suites d'entiers (avec $\mathbf{u}$ positive et croissante) telles que $\alpha_\xi(\mathbf{u}) < 1$ et $\beta(\mathbf{u}) < +\infty$. Alors on a*

$$\mu(\xi) \leq 1 - \frac{\log \beta(\mathbf{u})}{\log \alpha_\xi(\mathbf{u})}.$$

On en déduit donc une propriété des nombres ayant un exposant de densité fini, que l'on peut voir à l'envers comme une construction possible de nombres ayant un exposant de densité infini :

Corollaire 1. — *Soit ξ tel que $\nu(\xi) < +\infty$. Alors $\mu(\xi) < +\infty$.*

Remarque. — *La conclusion de la proposition 1 se lit aussi $\alpha_\xi(\mathbf{u})^{\mu(\xi)-1}\beta(\mathbf{u}) \geq 1$. En particulier, si $\mu(\xi) > 2$ alors les suites $\mathbf{u}$ telles que $\log \sqrt{\alpha_\xi(\mathbf{u})\beta(\mathbf{u})}$ soit proche de 0 seront forcément telles que $\alpha_\xi(\mathbf{u})$ et $\beta(\mathbf{u})$ soient proches de 1 : il s'agira d'approximations très denses mais de piètre qualité. Cela montre bien en quoi majorer l'exposant de densité (et, plus encore, le minorer) est difficile : il faut faire jouer un rôle central à la régularité des suites.*

Démonstration. — Raisonnons par l'absurde, en supposant $\mu(\xi) > 1 - \frac{\log\beta(\mathbf{u})}{\log\alpha_\xi(\mathbf{u})}$. Alors il existe $\alpha > \alpha_\xi(\mathbf{u})$ et $\beta > \beta(\mathbf{u})$ (avec $\alpha < 1$) tels que $\mu(\xi) > 1 - \frac{\log\beta}{\log\alpha}$ et, pour tout n assez grand, on a $u_n \le \beta^n$ et $|u_n\xi - v_n| \le \alpha^n$. Par définition de $\mu(\xi)$, il existe des entiers p et q, avec $q > 0$ arbitrairement grand, tels que $|\xi - p/q| \le q^{-1+\frac{\log\beta}{\log\alpha}}$, d'où $|q\xi - p| \le q^{\frac{\log\beta}{\log\alpha}}$. Pour tout n, notons Δ_n le déterminant suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} p & v_n \\ q & u_n \end{vmatrix}.$$

Alors on a :

$$\Delta_n = -\begin{vmatrix} q\xi - p & u_n\xi - v_n \\ q & u_n \end{vmatrix} = -u_n(q\xi - p) + q(u_n\xi - v_n)$$

d'où $|\Delta_n| \le u_n|q\xi - p| + q|u_n\xi - v_n|$. Posons $n_0 = \left\lfloor \frac{\log(1/3)}{\log\beta} - \frac{\log q}{\log\alpha} \right\rfloor$; c'est le plus grand entier n tel que $\beta^n \le \frac{1}{3}q^{-\frac{\log\beta}{\log\alpha}}$. Alors pour $n \in \{n_0 - 1, n_0\}$ on a

$$u_n|q\xi - p| \le \frac{1}{3}.$$

De plus, $q\alpha^n$ est majoré par une constante (qui dépend seulement de α et β) pour $n \in \{n_0 - 1, n_0\}$, donc comme n_0 est arbitrairement grand on a pour $n \in \{n_0 - 1, n_0\}$:

$$q|u_n\xi - v_n| \le \frac{1}{3}.$$

Cela prouve que les entiers Δ_{n_0-1} et Δ_{n_0} sont nuls : les points (p, q), (v_{n_0-1}, u_{n_0-1}) et (v_{n_0}, u_{n_0}) de $\mathbb{Z}^2$ sont colinéaires. En particulier, il existe un rationnel λ, qui est non nul, tel que $u_{n_0} = \lambda u_{n_0-1}$ et $v_{n_0} = \lambda v_{n_0-1}$. D'où

$$|\lambda| = \frac{|u_{n_0}\xi - v_{n_0}|}{|u_{n_0-1}\xi - v_{n_0-1}|} \le \alpha < 1,$$

ce qui contredit la croissance de la suite $(u_n)_n$. Ceci termine la preuve de la proposition. □

Question : Est-ce que $\nu(\xi) < +\infty$ implique $\mu(\xi) = 2$?

La difficulté pour résoudre cette question et, plus généralement, pour étudier les nombres ξ tels que $\nu(\xi) < +\infty$ est que l'exposant de densité fait intervenir des suites $\mathbf{u}$ telles que $\alpha_\xi(\mathbf{u})$ soit très proche de 1 (en restant strictement inférieur à 1). Pour ces suites, les approximations sont de très mauvaise qualité, tout juste suffisantes pour démontrer l'irrationalité de ξ. C'est pourquoi il faut absolument faire jouer leur grande régularité, ce qui n'intervient que très peu dans la preuve de la proposition 1. Ce problème se pose déjà quand on cherche à caractériser les nombres ξ tels que $\nu(\xi) = 0$. Nous ne savons même pas si $\nu(\xi) = 0$ implique $\mu(\xi) = 2$.

Par exemple, le nombre $\xi_{a,b} = \sum_{n\ge1} b^{-a^n}$ vérifie $\mu(\xi_{a,b}) = a$ pour tous entiers $a \ge 2$ et $b \ge 2$. On verra au paragraphe 4.3 que $\nu(\xi_{2,b}) < +\infty$ pour tout $b \ge 2$: cette propriété découle d'un phénomène (i.e. quotients partiels bornés) spécifique au cas $a = 2$ et qui n'a pas lieu si $a \geq 3$. Est-ce que l'on a $\nu\big(\xi_{a,b}\big) = +\infty$ lorsque $a \geq 3$ et $b \geq 2$?

Pour l'instant, nous savons démontrer que $\nu(\xi) > 0$ seulement pour les nombres ξ tels que $\mu(\xi) = +\infty$; et on a alors $\nu(\xi) = +\infty$.

Question : Y a-t-il d'autres nombres pour lesquels on peut démontrer que $\nu(\xi) > 0$?

Question : Existe-t-il un réel ξ tel que $0 < \nu(\xi) < +\infty$?

4. Utilisation du développement en fraction continue

Dans toute cette partie, on note $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ le développement en fraction continue de ξ et p_k/q_k la k-ième réduite, de telle sorte que $q_{k+1} = a_k q_k + q_{k-1}$ pour tout $k \geq 1$. Ici et dans toute la suite de l'article, on utilisera sans forcément les indiquer les propriétés des fractions continues ordinaires : le livre de Khintchine [**37**] est une référence classique.

4.1. Minoration de l'exposant de densité. —

Proposition 2. — *Pour tout ξ, on a $\nu(\xi) \geq 0$.*

Remarque. — *Bien que cela soit en fait une conséquence de la proposition 1 (puisque l'on a $\mu(\xi) \geq 2$ pour tout $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$), nous en donnons une preuve alternative.*

Démonstration. — Soit un réel ξ tel que $\nu(\xi) < 0$. Supposons que $\mathbf{u}$ soit une suite croissante telle que $\alpha_\xi(\mathbf{u})\beta(\mathbf{u}) < 1$ et notons $\mathbf{v}$ la suite associée. Soient $\alpha > \alpha_\xi(\mathbf{u})$ et $\beta > \beta(\mathbf{u})$ tels que $\alpha\beta < 1$. Pour tout n assez grand, on a $u_n \leq \beta^n$ et $|u_n\xi - v_n| \leq \alpha^n$ d'où $u_n^2|\xi - \frac{v_n}{u_n}| \leq (\alpha\beta)^n < \frac{1}{2}$, donc v_n/u_n est une réduite de ξ (représentée par une fraction éventuellement non irréductible). En notant p_k/q_k la k-ième réduite de ξ, il existe une fonction ψ et des entiers $\lambda_n \geq 1$ tels que $u_n = \lambda_n q_{\psi(n)}$ pour tout n assez grand. On a alors

$$\frac{\lambda_n}{q_{\psi(n)+1} + 1} \leq |u_n\xi - v_n| \leq \frac{\lambda_n}{q_{\psi(n)+1}}$$

d'où, par définition de $\alpha_\xi(\mathbf{u})$ et $\beta(\mathbf{u})$:

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{\lambda_n q_{\psi(n+1)+1}}{\lambda_{n+1} q_{\psi(n)+1}} = \frac{1}{\alpha_\xi(\mathbf{u})}$$

et

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{\lambda_n q_{\psi(n)}}{\lambda_{n+1} q_{\psi(n+1)}} = \frac{1}{\beta(\mathbf{u})}. \tag{4.1}$$

Pour tout k, notons A_k le nombre rationnel défini par $q_{k+1} = A_k q_k$. En faisant le produit des deux relations précédentes, on obtient

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{\lambda_n^2 A_{\psi(n+1)}}{\lambda_{n+1}^2 A_{\psi(n)}} \geq \frac{1}{\alpha_\xi(\mathbf{u})\beta(\mathbf{u})}. \tag{4.2}$$

Par hypothèse, on a $\alpha_\xi(\mathbf{u})\beta(\mathbf{u}) < 1$ donc il existe c tel que $\frac{1}{\alpha_\xi(\mathbf{u})\beta(\mathbf{u})} > c > 1$. Comme $\lambda_n \geq 1$, l'équation (4.2) donne $A_{\psi(n)} \geq \lambda_n^2 c^n \geq c^n$ pour tout n assez grand : la suite $(A_{\psi(n)})$ a une croissance au moins géométrique. Par définition de A_k, on obtient

$$q_{\psi(n+1)} \geq q_{\psi(n)+1} = A_{\psi(n)} q_{\psi(n)} \geq c^n q_{\psi(n)}$$

d'où l'existence de $c' > 0$ telle que $\lambda_n q_{\psi(n)} \geq q_{\psi(n)} \geq \exp(c'n^2)$ pour n assez grand, ce qui contredit l'équation (4.1). Ceci termine la preuve de la proposition 2. $\square$

4.2. Cas des nombres quadratiques. —

Proposition 3. — *Soit ξ un nombre quadratique. Alors $\nu(\xi) = 0$.*

Démonstration. — Notons $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ le développement en fraction continue de ξ, qui est ultimement périodique de période p. On a ainsi $a_{k+p} = a_k$ pour tout k assez grand. On note p_k/q_k les réduites, avec $q_{k+1} = a_k q_k + q_{k-1}$ pour $k \geq 2$ et $q_1 = 1$, $q_2 = a_1$. Pour tout $k \geq 2$ on a $q_{k+1}/q_k = a_k + 1/(q_k/q_{k-1})$ donc $q_{k+1}/q_k = [a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1]$. En particulier, pour tout $\ell \in \{0, \ldots, p-1\}$ on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{q_{np+\ell+1}}{q_{np+\ell}} = [\overline{a_{\ell+p}, a_{\ell+p-1}, \ldots, a_{\ell+1}}],$$

où la barre supérieure signifie la répétition infinie du « mot » $a_{\ell+p}, a_{\ell+p-1}, \ldots, a_{\ell+1}$. En posant $\beta_0 = \prod_{\ell=0}^{p-1} [\overline{a_{\ell+p}, a_{\ell+p-1}, \ldots, a_{\ell+1}}]$, on voit que pour tout $\ell \in \{0, \ldots, p-1\}$, le quotient $q_{(n+1)p+\ell}/q_{np+\ell}$ tend vers β_0 quand n tend vers l'infini. En posant $u_n = q_{np}$, on obtient $\beta(\mathbf{u}) = \beta_0$. En outre, on a

$$\frac{1}{q_{np+1}+1} \leq |u_n\xi - v_n| \leq \frac{1}{q_{np+1}}$$

d'où $\alpha_\xi(\mathbf{u}) = \beta_0^{-1}$. Finalement, on obtient donc $\nu(\xi) \leq 0$. La proposition 2 permet de conclure. $\square$

Remarque. — *Lorsque ξ est quadratique, on a ainsi montré qu'il existe une suite* $\mathbf{u}$ *telle que* $\log \sqrt{\alpha_\xi(\mathbf{u})\beta(\mathbf{u})} = 0$*. Existe-t-il d'autres nombres ξ ayant cette propriété ?*

4.3. Cas des nombres à quotients partiels bornés. —

Proposition 4. — *Soit $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ un nombre à quotients partiels majorés par un réel A. Alors, on a*

$$\nu(\xi) \leq \log\left(\frac{A+1}{\sqrt{A+2}}\right).$$

Remarque. — *Il existe donc une infinité non dénombrable de nombres irrationnels ayant un exposant de densité fini.*

Démonstration. — Soit A un majorant des a_k ; considérons la suite croissante $\mathbf{u} = (q_n)_{n\geq 1}$ donnée par les dénominateurs des réduites. On a $q_{n+1} \leq (A+1)q_n$ d'où $\beta(\mathbf{u}) \leq A+1$. On a aussi, pour tout n :

$$\frac{1}{q_{n+1}+1} \leq |q_n\xi - p_n| \leq \frac{1}{q_{n+1}} \leq \frac{1}{q_n + q_{n-1}} \leq \frac{1}{(1+1/(A+1))q_n}$$

d'où

$$\frac{|q_{n+1}\xi - p_{n+1}|}{|q_n\xi - p_n|} \leq \frac{(A+1)(q_{n+1}+1)}{(A+2)q_{n+1}}$$

ce qui donne $\alpha_\xi(\mathbf{u}) \leq \frac{A+1}{A+2} < 1$. Ceci termine la preuve de la proposition. □

Une famille intéressante de nombres ayant des quotients partiels bornés est fournie par les séries

$$\xi_{2,b} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b^{2^n}}$$

où $b \geq 2$ est entier. En effet, Shallit [**54**] a montré le résultat particulièrement frappant et peu évident que les valeurs des quotients partiels de $\xi_{2,b}$ pour $b \geq 3$, respectivement de $2\xi_{2,2}$, sont contenues dans $\{b-2, b-1, b, b+2\}$, respectivement dans $\{1, 2\}$.

4.4. Inadéquation des réduites en général. — Le point crucial dans la définition de l'exposant de densité est la notion de régularité. Cette notion semble « orthogonale » à celle de précision des approximations. C'est pourquoi les réduites du développement en fraction continue de ξ, qui sont les approximations les plus précises, ne nous permettent pas de majorer (quand ξ est générique) l'exposant de densité de ξ. Dans ce paragraphe, on donne une construction qui permet, pour ξ générique, de majorer un exposant qui ressemble à l'exposant de densité, mais pour lesquel la condition de régularité est moins stricte. Cela sert de motivation à la définition de l'exposant de densité et illustre l'aspect draconien de la contrainte de régularité imposée par l'hypothèse $\alpha_\xi(\mathbf{u}) < 1$. On utilise la constante de Khintchine définie par

$$K = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{\frac{\log(n)}{\log(2)}} \approx 2,68.$$

Proposition 5. — *Pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$ (au sens de la mesure de Lebesgue), il existe des suites d'entiers $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$, avec $\mathbf{u}$ croissante et positive, telles que*

$$\beta(\mathbf{u}) \limsup_{n\to+\infty} |u_n\xi - v_n|^{1/n} \leq 2\exp\left(-\frac{\pi^2}{12\log(K)}\right) \approx 0,86 < 1.$$

Démonstration. — Soit $\xi \in \mathbb{R}$ générique au sens de la mesure de Lebesgue, ce qui signifie que toutes les identités et propriétés faisant intervenir ξ et des quantités qui lui sont associées doivent être comprises comme presque sûres. En particulier, ξ est irrationnel :

notons $[a_0, a_1, a_2, \ldots]$ son développement en fraction continue et p_k/q_k sa k-ième réduite. Pour $k \geq 2$, posons

$$n_k = \sum_{i=1}^{k-1} \big(1 + \lfloor \log_2 a_i \rfloor\big)$$

et $u_{n_k+\ell} = 2^\ell q_k$ pour tout $\ell \in \{0, \ldots, \lfloor \log_2 a_k \rfloor\}$. Ceci définit bien u_n pour tout $n \geq n_2$ et la suite $\mathbf{u} = (u_n)$ est croissante. Par construction, on a $u_{n+1} \leq 2u_n$ pour tout n, d'où $\beta(\mathbf{u}) \leq 2$. Il s'agit en fait d'une égalité puisque $a_k \geq 2$ pour une infinité de k. On a, pour tout $\ell \in \{0, \ldots, \lfloor \log_2 a_k \rfloor\}$:

$$\frac{2^\ell}{q_k(a_k+1)} \leq |u_{n_k+\ell}\xi - v_{n_k+\ell}| \leq \frac{2^\ell}{q_k a_k}$$

d'où

$$\limsup_{n\to+\infty} \log\left(|u_n\xi - v_n|^{1/n}\right) \quad = \quad \limsup_{k\to+\infty} \frac{\log\left(\frac{2^{\lfloor \log_2 a_k \rfloor}}{q_k a_k}\right)}{n_{k+1}-1}.$$

Un théorème de Khinchine (voir [**37**, p. 93]) affirme que

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\log_2(a_1) + \cdots + \log_2(a_k)}{k} = \log_2(K),$$

d'où

$$\liminf_{k\to+\infty} \frac{n_k}{k} \leq \limsup_{k\to+\infty} \frac{n_k}{k} \leq \log_2(K).$$

Par ailleurs, le théorème de Lévy-Khintchine ([**40**] et [**37**, p. 66]) énonce que

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\log q_k}{k} = \frac{\pi^2}{\log(2)}. \tag{4.3}$$

On a donc finalement :

$$\limsup_{n\to+\infty} |u_n\xi - v_n|^{1/n} \leq \exp\left(-\frac{\pi^2}{12\log(K)}\right) \approx 0,43.$$

On a donc $\limsup_n |u_n\xi - v_n|^{1/n} \leq 0,43$ et $\beta(\mathbf{u}) \leq 2$, ce qui conclut la preuve. □

Remarques. — *1) Voici une autre construction utilisant les réduites. Elle fournit pour tout $\varepsilon > 0$ et pour presque tout ξ des suites d'entiers $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$, avec $\mathbf{u}$ croissante et positive, telles que*

$$\beta(\mathbf{u}) \limsup_{n\to+\infty} |u_n\xi - v_n|^{1/n} = (1+\varepsilon)^2$$

avec $\limsup_{n\to+\infty} |u_n\xi - v_n|^{1/n} < 1$ *si* $\varepsilon < \exp\left(\frac{\pi^2}{\log(2)}\right) - 1 \approx 2,27$. *Avec les mêmes notations que ci-dessus, l'équation* (4.3) *et le lemme 2 fournissent une suite d'entiers strictement positifs* (δ_n) *(qui dépend de* ε*) telle que*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\delta_{n+1} q_{n+1}}{\delta_n q_n} = (1+\varepsilon)\cdot\exp\left(\frac{\pi^2}{\log(2)}\right).$$

Posons $u_n = \delta_n q_n$. Alors $|u_n\xi - v_n|$ est essentiellement égal à δ_n/q_{n+1} donc pour ξ générique on aura $\alpha_\xi(\mathbf{u}) = \infty$. Cependant, on a $\lim_{n\to+\infty} \delta_n^{1/n} = 1+\varepsilon$ par construction (en utilisant le lemme 1) d'où

$$\limsup_{n\to+\infty} |u_n\xi - v_n|^{1/n} = (1+\varepsilon)\cdot \exp\left(-\frac{\pi^2}{\log(2)}\right),$$

ce qui donne le résultat voulu puisque $\beta(\mathbf{u}) = (1+\varepsilon)\cdot\exp(\frac{\pi^2}{\log(2)})$.

2) Nous ne voyons pas comment construire, en utilisant le développement en fraction continue d'un ξ générique, une suite croissante $\mathbf{u}$ telle que $\alpha_\xi(\mathbf{u}) < 1$ et $\beta(\mathbf{u}) < +\infty$. De même, pour $\xi = e$ dont le développement en fraction continue est bien connu, nous ne savons pas démontrer que $\nu(e) < +\infty$.

5. Exposant de densité de certaines périodes irrationnelles

Dans ce paragraphe, on donne des majorations de l'exposant de densité de certains nombres ξ intéressants, dont l'irrationalité peut être prouvée « à la Apéry » : ces nombres sont des périodes au sens de [**38**]. Très souvent, on construit par divers procédés deux suites d'entiers $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ telles que

$$\lim_{n\to+\infty} |u_n|^{1/n} < +\infty \quad \text{et} \quad 0 < \lim_{n\to+\infty} |u_n\xi - v_n|^{1/n} < 1,$$

ce qui montre l'irrationalité de ξ et permet de majorer $\mu(\xi)$.

L'existence de ces deux limites n'implique pas $\nu(\xi) < +\infty$. Néanmoins, dans les exemples ci-dessous, il s'avère que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ vérifient en fait les assertions plus fortes

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}\xi - v_{n+1}|}{|u_n\xi - v_n|} < 1, \tag{5.1}$$

dont découle que $\nu(\xi) < +\infty$. Une des façons les plus simples d'obtenir des estimations telles que (5.1) est de montrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ vérifient une récurrence linéraire et d'appliquer ensuite le théorème suivant (dont nous utiliserons seulement la partie (i), qui est démontrée dans [**31**, p. 325 et suivantes]).

Proposition 6. — *Soient $A_1, A_2, \ldots, A_m$ des fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$. On suppose que*

$$\lim_{x\to+\infty} A_j(x) = a_j, \quad j = 1, \ldots, m$$

et que les m solutions $t_1, t_2, \ldots, t_m$ de l'équation (dite caractéristique) $z^m = \sum_{j=1}^m a_j z^{m-j}$ sont de modules tous distincts.

(i) (Poincaré) Pour toute suite $(U_n)_n$ vérifiant la récurrence $U_n = \sum_{j=1}^m A_j(n) U_{n-j}$ et dont les m premiers termes ne sont pas tous nuls, on a $U_n \neq 0$ pour tout n assez grand et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = t_k,$$

où $k \in \{1, \ldots, m\}$ dépend de $(U_n)_n$.

(*ii*) (Perron) *De plus, si $A_m(n)$ ne s'annule pour aucun entier $n \geq 0$, alors il existe m suites $(U_{j,n})_{n\geq 0}$, $j = 1, \ldots, m$, solutions de la récurrence précédente et telles que*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{U_{j,n+1}}{U_{j,n}} = t_j, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Dans les démonstrations, on doit souvent multiplier des suites de rationnels par une puissance de la fonction $d_n = \mathrm{ppcm}(1, 2, \ldots, n)$ pour se ramener à des suites d'entiers. Comme $d_{n+1} = (n+1)d_n$ quand $n+1$ est un nombre premier, on a

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{d_{n+1}}{d_n} = +\infty$$

ce qui est *a priori* gênant pour calculer un exposant de densité. Néanmoins, le lemme 2 permet de résoudre le problème posé par le manque de régularité de la suite d_n puisque, pour tout $\varepsilon > 0$, il nous fournit une suite $(d_{\varepsilon,n})_{n\geq 1}$ telle que

– Pour tout n, d_n divise $d_{\varepsilon,n}$.
– On a $\lim_n d_{\varepsilon,n+1}/d_{\varepsilon,n} = e + \varepsilon$.

On définit de façon similaire une version régulière $\sigma_{\varepsilon,n}(v)$ de la quantité $\sigma_n(v)$ définie, pour tout $v \geq 1$, par $\sigma_n(v) = \prod_{p|v} p^{\lfloor n/(p-1)\rfloor}$: la suite $\sigma_{\varepsilon,n}(v)$ vérifie

– Pour tout n, $\sigma_n(v)$ divise $\sigma_{\varepsilon,n}(v)$.
– On a $\lim_n \sigma_{\varepsilon,n+1}(v)/\sigma_{\varepsilon,n}(v) = \sigma(v) + \varepsilon$,

avec $\sigma(v) = \prod_{p|v} p^{1/(p-1)}$.

5.1. Constructions hypergéométriques. — Dans ce paragraphe, on s'intéresse à des nombres dont on peut majorer l'exposant de densité grâce à des suites obtenues à l'aide de procédés hypergéométriques. Nous n'expliquerons pas pourquoi on a été amené à considérer ces suites, qui peuvent donc sembler magiques. Leur apparition est expliquable d'une façon très naturelle au moyen des approximants de Padé (éventuellement simultanés) des fonctions algébriques $(1-z)^s$ et des fonctions polylogarithmes $\mathrm{Li}_s(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^k/k^s$: voir [**2, 10, 6, 28, 50**] pour plus de détails sur cette méthode.

Théorème 1. — (*i*) *Soient a, b, u, v des entiers tels que $0 < |a| \leq b$ et $0 < u < v$. Supposons que v divise a et que $\sigma(v)b(1-\sqrt{1-a/b})^2 < 1$. On a alors*

$$\nu\big((1-a/b)^{u/v}\big) \leq \log|a| + \log\big(\sigma(v)\big).$$

En particulier, $\nu(2^{1/3}) \leq \frac{3}{2}\log(3)$.

(*ii*) *Soient a, b des entiers tels que $0 < |a| \leq b$. Supposons que $eb(1-\sqrt{1-a/b})^2 < 1$. On a alors*

$$\nu\big(\log(1-a/b)\big) \leq 1 + \log|a|.$$

En particulier, $\nu(\log(2)) \leq 1$.

(*iii*) *On a $\nu(\pi^2) \leq 2$ et $\nu(\zeta(3)) \leq 3$.*

Remarques. — *1) Les points (i) et (ii) appellent le commentaire suivant. Lorsque a est fixé, plus $|b|$ est grand, plus $\mu\big((1-a/b)^{u/v}\big)$ et $\mu\big(\log(1-a/b)\big)$ sont proches de 2. En* *revanche, dans notre majoration de l'exposant de densité des ces nombres, le dénominateur b ne joue aucun rôle.*

2) Il existe d'autres nombres dont on devrait pouvoir majorer l'exposant de densité, comme par exemple $\pi/\sqrt{3}$ *et* $\log(3)$*. On doit également pouvoir le faire pour* π^4 *mais conditionnellement à la démonstration d'une* conjecture des dénominateurs *: cela découle d'une construction de Zudilin* [**60**]*, voir aussi* [**39**] *pour la preuve des conjectures des dénominateurs les plus simples. Le cas du nombre* π *est assez délicat et sera abordé au paragraphe 5.2.*

Il est également possible que l'on puisse majorer l'exposant de densité de familles de nombres de la forme $\mathrm{Li}_s(p/q)$ *avec* $0 < |p/q| < c(s) < 1$ *avec* $c(s) \to 0$ *quand* $s \to +\infty$ *: une approche naturelle serait d'utiliser les approximants de Padé simultanés de type II des fonctions* $1, \mathrm{Li}_1(z), \ldots, \mathrm{Li}_s(z)$ *(voir* [**34**]*).*

3) La suite construite par Rhin-Viola [**49**] *pour obtenir la meilleure majoration connue de l'exposant d'irrationalité de* $\zeta(3)$ *est une modification de la suite* $(u_{Mn})_{n\geq 1}$ *extraite de la suite d'Apéry en prenant un terme sur* $M = 15$ *environ. La valeur de* $\log\sqrt{\alpha_\xi(\mathbf{u})\beta(\mathbf{u})}$ *pour la suite de Rhin-Viola est bien plus petite que celle obtenue pour cette suite extraite (à savoir* $3M$*, quand* ε *tend vers* 0*), mais nettement plus grande que* 3*. Cette remarque s'applique, entre autres, aux travaux de Hata* [**36**]*, Rukhadze* [**52**] *et Rhin-Viola* [**48**] *qui ont permis d'améliorer les exposants d'irrationalité de* π*,* $\log(2)$ *et* $\zeta(2)$ *respectivement.*

Démonstration du théorème 1. — On utilise des mêmes notations pour désigner des suites distinctes mais il n'y aura pas d'ambiguïté possible. On note $(x)_n = x(x+1)\cdots(x+n-1)$.

(*i*) *Majoration de* $\nu\big((1-a/b)^{u/v}\big)$. Posons pour simplifier $s = u/v$ et notons

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; z\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{k!(c)_k}\, z^k $$

la fonction hypergéométrique de Gauß, également notée ${}_2F_1[a,b;c;z]$, définie pour des paramètres complexes a, b, c, z tels que c n'est pas un entier négatif ou nul et $|z| < 1$. Une référence classique sur les fonctions hypergéométriques est le livre de Slater [**55**].

Définissons avec Baker [**6**] les polynômes $A_n(z) = {}_2F_1\big[-s-n, -n; -2n; z\big]$ et $B_n(z) = {}_2F_1\big[s-n, -n; -2n; z\big]$, qui sont à coefficients rationnels et de degré n. On a alors $A_n(z) - (1-z)^s B_n(z) = R_n(z)$ avec

$$ R_n(z) = \frac{{}_2F_1[-s-n, -n; -2n; 1]}{{}_2F_1[-s+n+1, n+1; 2n+2; 1]} \cdot z^{2n+1}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix} -s+n+1, n+1 \\ 2n+2 \end{matrix}; z\right]. $$

Dorénavant, on prend $z = a/b$ comme dans l'énoncé. On se ramène à des suites d'entiers en définissant $v_n = -\binom{2n}{n}\sigma_n(v) b^n A_n(a/b) \in \mathbb{Z}$, $u_n = -\binom{2n}{n}\sigma_n(v) b^n B_n(a/b) \in \mathbb{Z}$, de sorte que

$$ r_n = \binom{2n}{n}\sigma_n(v) b^n R_n(a/b) = u_n(1-a/b)^s - v_n \in (1-a/b)^s\mathbb{Z} + \mathbb{Z}. $$

(La condition $v|a$ sert à cette étape.)

On va traiter le facteur arithmétique $\sigma_n(v)$ à part ; on définit $\tilde{u}_n = u_n/\sigma_n(v)$ et $\tilde{r}_n = r_n/\sigma_n(v)$ dont on va maintenant étudier le comportement asymptotique. Au moyen de l'algorithme Ekhad [(1)] de Zeilberger [**25**] (voir également [**18**]), on montre que les suites $(\tilde{u}_n)_{n\geq 0}$ et $(\tilde{r}_n)_{n\geq 0}$ vérifient toutes les deux la récurrence :

$$(n+s+1)(n-s+1)a^2 U_n + (2n+3)(n+1)(a-2b)U_{n+1} + (n+2)(n+1)U_{n+2} = 0.$$

Le polynôme caractéristique de cette récurrence admet deux racines distinctes et on peut donc appliquer le théorème de Poincaré-Perron : comme $\tilde{u}_n \to +\infty$ et $\tilde{r}_n \to 0$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\tilde{u}_{n+1}}{\tilde{u}_n} = b(1+\sqrt{1-a/b})^2 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\tilde{r}_{n+1}}{\tilde{r}_n} = b(1-\sqrt{1-a/b})^2.$$

Revenons maintenant aux suites $(u_n)_n$ et $(r_n)_n$. En travaillant avec les suites $u_{\varepsilon,n} = \sigma_{\varepsilon,n}\tilde{u}_n$ et $r_{\varepsilon,n} = \sigma_{\varepsilon,n}\tilde{r}_n$, la condition $\sigma(v)b(1-\sqrt{1-a/b})^2 < 1$ assure que $\alpha_\xi(|\mathbf{u}_\varepsilon|) < 1$ (pour ε suffisamment petit) et on obtient donc $\nu\big((1-a/b)^s\big) \leq \log\sqrt{\alpha(|\mathbf{u}_\varepsilon|)\beta(|\mathbf{u}_\varepsilon|)} \leq \log|a| + \log(\sigma(v)+\varepsilon)$. On obtient la majoration $\nu\big(2^{1/3}\big) \leq \frac{3}{2}\log(3)$ en prenant $a=3$ et $b=128$, choix classique de Baker conduisant à la majoration $\mu\big(2^{1/3}\big) \leq 2,9471$.

(ii) *Majoration de* $\nu\big(\log(1-a/b)\big)$. On peut utiliser la série

$$S_n(a/b) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-n)_n}{(k)_{n+1}}(a/b)^{k+n} = \frac{(a/b)^{n+1}}{\binom{2n}{n}(2n+1)}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix} n+1, n+1 \\ 2n+2 \end{matrix}; a/b\right].$$

En décomposant en éléments simples le sommande de $S_n(a/b)$, on obtient que, pour tout $\varepsilon > 0$, $d_{\varepsilon,n}b^n S_n(a/b) = u_{\varepsilon,n}\log(1-a/b) - v_{\varepsilon,n}$, où $v_{\varepsilon,n} \in \mathbb{Z}$ et $u_{\varepsilon,n} = d_{\varepsilon,n}u_n \in \mathbb{Z}$ avec

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n+k}{k}(-a)^{n-k}b^k \in \mathbb{Z}.$$

Par ailleurs, il est bien connu que les suites $(S_n)_{n\geq 0}$ et $(u_n)_{n\geq 0}$ vérifient la même récurrence linéaire

$$(n+1)a^2U_n + (a-2b)(2n+3)U_{n+1} + (n+2)U_{n+2} = 0,$$

ce que l'on peut aussi vérifier à l'aide d'Ekhad. Comme cette récurrence vérifie les conditions du théorème de Poincaré-Perron et que $u_n \to +\infty$, $S_n \to 0$, on a donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = b\big(1+\sqrt{1-a/b}\big)^2 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{S_{n+1}}{S_n} = b\big(1-\sqrt{1-a/b}\big)^2.$$

On a donc $\alpha(\mathbf{u}_\varepsilon) = (e+\varepsilon)b\big(1+\sqrt{1-a/b}\big)^2$ et $\beta(\mathbf{u}_\varepsilon) = (e+\varepsilon)b\big(1-\sqrt{1-a/b}\big)^2$ et, finalement, $\nu(\log(1-a/b)) \leq \log|a| + \log(e+\varepsilon)$ pour tout $\varepsilon > 0$. On obtient la majoration $\nu\big(\log(2)\big) \leq 1$ en prenant $a=-1$ et $b=1$, choix conduisant à la majoration classique $\mu\big(\log(2)\big) \leq 4,6222$.

[(1)] Quand on l'applique à une suite de nature hypergéométrique, cet algorithme, implémenté sous de nombreux systèmes de calcul formel, fournit en même temps que la récurrence une preuve que la suite vérifie cette récurrence.

(iii) Majorations de $\nu(\pi^2)$ et de $\nu(\zeta(3))$. Les meilleures suites connues pour majorer l'exposant de densité de $\zeta(2) = \pi^2/6$ sont celles d'Apéry [**5**], que l'on peut engendrer de la manière suivante. On considère la série

$$S_n = (-1)^n n! \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-n)_n}{(k)_{n+1}^2} = \frac{(-1)^n}{\binom{2n}{n}^2 (2n+1)^2}\, {}_3F_2\left[\begin{matrix} n+1, n+1, n+1 \\ 2n+2, 2n+2 \end{matrix}; 1\right]$$

et en décomposant en éléments simples le sommande de S_n, on obtient que, pour tout $\varepsilon > 0$, $d_{\varepsilon,n}^2 S_n = u_{\varepsilon,n}\zeta(2) - v_{\varepsilon,n}$ avec $v_{\varepsilon,n} \in \mathbb{Z}$ et $u_{\varepsilon,n} = d_{\varepsilon,n}^2 u_n \in \mathbb{Z}$ avec

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k} \in \mathbb{Z}.$$

Par ailleurs, les suites $(S_n)_{n\geq 0}$ et $(u_n)_{n\geq 0}$ vérifient la même récurrence linéaire

$$(n+2)^2 U_{n+2} - (11n^2 + 33n + 25) U_{n+1} - (n+1)^2 U_n = 0,$$

à laquelle on peut appliquer le théorème de Poincaré-Perron. Comme $u_n \to +\infty$, $S_n \to 0$, on a donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{11}{2} + \frac{5\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{11}{2} - \frac{5\sqrt{5}}{2}.$$

D'où $\alpha_{\pi^2}(\mathbf{u}_\varepsilon) = (e+\varepsilon)^2(5\sqrt{5} - 11)/2 < 1$ (pour ε suffisamment petit), $\beta(\mathbf{u}_\varepsilon) = (e+\varepsilon)^2(5\sqrt{5}+11)/2$ et donc $\nu(\pi^2) \leq 2\log(e+\varepsilon)$ pour tout $\varepsilon > 0$.

Passons maintenant à $\zeta(3)$. De nouveau, les meilleures suites connues pour majorer l'exposant de densité de $\zeta(3)$ sont celles d'Apéry [**5**]. Suivant Beukers [**10**], Gutnik [**32**] et Nesterenko [**43**], on considère la série

$$S_n = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial k} \frac{(k-n)_n^2}{(k)_{n+1}^2}.$$

Malgré la dérivation, cette série appartient bien au monde hypergéométrique (voir par exemple [**50**, p. 355]). En décomposant en éléments simples le sommande de S_n, on obtient que, pour tout $\varepsilon > 0$, $d_{\varepsilon,n}^3 S_n = 2u_{\varepsilon,n}\zeta(3) - v_{\varepsilon,n}$, où $v_{\varepsilon,n} \in \mathbb{Z}$ et $u_{\varepsilon,n} = d_{\varepsilon,n}^3 u_n \in \mathbb{Z}$ avec

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 \in \mathbb{Z}.$$

Les suites $(S_n)_{n\geq 0}$ et $(u_n)_{n\geq 0}$ vérifient la même récurrence linéaire

$$(n+2)^3 U_{n+2} - (17n^2 + 51n + 39)(2n+3) U_{n+1} + (n+1)^3 U_n = 0,$$

à laquelle on peut appliquer le théorème de Poincaré-Perron. Comme $u_n \to +\infty$, $S_n \to 0$, on a donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = (\sqrt{2}+1)^4 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{S_{n+1}}{S_n} = (\sqrt{2}-1)^4.$$

D'où $\alpha_{\zeta(3)}(\mathbf{u}_\varepsilon) = (e+\varepsilon)^3(\sqrt{2}-1)^4 < 1$ (pour ε suffisamment petit), $\beta(\mathbf{u}_\varepsilon) = (e+\varepsilon)^3(\sqrt{2}+1)^4$ et donc $\nu\big(\zeta(3)\big) \leq 3\log(e+\varepsilon)$ pour tout $\varepsilon > 0$. $\square$

5.2. Constructions hypergéométriques bis : le cas du nombre π. — Il n'existe à ce jour essentiellement que deux suites (modulo des variations triviales) candidates au rôle de $\mathbf{u}$ pour le nombre π. L'une a été construite par Hata [**36**] au moyen d'une suite d'intégrales complexes I_n et lui a permis d'obtenir au moyen de la méthode du col la majoration $\mu(\pi) \leq 8,016105$, qui est la meilleure connue à ce jour ; les approximations de π ainsi construites sont dans $\mathbb{Z}[i]$. L'autre suite est due à Beukers [**14**], à l'aide d'intégrales J_n : elle donne la majoration moins bonne $\mu(\pi) \leq 11,076778$ au moyen d'approximations rationnelles de π.

La construction de Hata est assez compliquée car ses approximations de π sont *a priori* dans $\mathbb{Z}[i]$. Cependant, elles vérifient la propriété remarquable qu'une approximation sur quatre est dans $\mathbb{Z}$, ce qui nous permet de montrer le théorème suivant.

Théorème 2. — *On a* $\nu(\pi) < 11,5$.

De plus, on peut explicitement calculer la récurrence vérifiée par les approximations de Hata et le théorème de Poincaré-Perron s'applique alors. Cela implique en particulier que l'on peut obtenir la même majoration de $\mu(\pi)$ que Hata sans utiliser la méthode du col, ce qui nous semble intéressant sur le plan méthodologique.

Les intégrales de Beukers pour π se présentent de façon différente : ce sont les parties réelles de nombres complexes qui tournent autour de l'origine en s'en rapprochant. Alors que les modules de ces nombres complexes tendent vers 0 en décroissant, la suite de leurs parties réelles tend vers 0 de manière non monotone. On peut cependant extraire une sous-suite, en prenant un terme sur 5 ou 6, de façon à ce que la suite des parties réelles décroisse (en valeur absolue). Cela permet d'obtenir la majoration $\nu(\pi) < 21$, qui est moins précise que le théorème 2 car on perd beaucoup en extrayant la sous-suite.

Démontrons maintenant le théorème 2, en reprenant la construction de Hata. Notons
$$F(z) = \frac{(z-1)^2(z-2)^2(z-1-i)^2}{z^3}$$
et considérons, pour tout entier $n \geq 0$, l'intégrale complexe
$$I_n(\Gamma_{a,b}) = \int_{\Gamma_{a,b}} F(z)^n \,\frac{\mathrm{d}z}{z}$$
où $\Gamma_{a,b}$ est un chemin de $\mathbb{C}$ reliant les deux points a et b que l'on prend parmi $1, 2$ et $1+i$. On a alors
$$2iD_n\big(I_n(\Gamma_{1,2}) - 2I_n(\Gamma_{1,1+i})\big) = u_n\pi - v_n$$
où u_n, v_n sont dans $\mathbb{Z}[i]$; le facteur D_n est un entier qui sera étudié plus bas. Pour simplifier, on définit $r_n = I_n(\Gamma_{1,2}) - 2I_n(\Gamma_{1,1+i})$ de telle sorte que $2iD_nr_n = u_n\pi - v_n$. On a $u_n = D_n\tilde{u}_n$ où
$$\tilde{u}_n = \sum_{0\leq j,\, k\leq 2n} \binom{2n}{j}\binom{2n}{k}\binom{2n}{j+k-n} 2^j(1+i)^k = I_n(\Gamma), \tag{5.2}$$
Γ étant un contour fermé entourant 0 et passant par 1 et $1+i$.

Nous allons maintenant montrer les propriétés suivantes :

Lemme 4. — *a) Les suites I_n et $\tilde{u}_n$ vérifient une même récurrence linéaire d'ordre 3 dont les trois racines $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ de l'équation caractéristique vérifient $0 < |\zeta_1| < |\zeta_2| < 1 < |\zeta_3|$ et appartiennent à $(1+i)\mathbb{R}$. En particulier, $\zeta_1^4, \zeta_2^4, \zeta_3^4$ sont réels.*

b) On a $\tilde{u}_{4n} \in \mathbb{Q}$ pour tout entier $n \geq 0$. De plus, $\tilde{u}_{4n}$ n'est pas nul pour tout n assez grand et on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\tilde{u}_{4(n+1)}}{\tilde{u}_{4n}} = \zeta_3^4 \approx (122,628099)^4. \tag{5.3}$$

c) On a $r_n \neq 0$ pour tout $n \geq 0$ assez grand, et

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{r_{4(n+1)}}{r_{4n}} \right| \leq \zeta_2^4 \approx (0,023011)^4. \tag{5.4}$$

d) Les nombres v_{4n} sont des entiers pour tout n assez grand.

Démonstration du lemme. — Pour montrer a), nous utilisons la version sous Maple du programme Ekhad [**25**]. La commande

```
> AZpapd((z-1)^(2*n)*(z-2)^(2*n)*(z-1-i)^(2*n)/z^(3*n+1),z,n,N)
```

nous fournit immédiatement une récurrence d'ordre 3 pour les intégrales de Hata $I_n(\Gamma_{a,b})$:

$$\begin{aligned}
&8(1+i)(115n^2+527n+570)(2n+3)(2n+5)(n+1)(n+2)(2n+1)I_n \\
&+4(49565n^4+326267n^3+744733n^2+697381n+224310)(2n+3)(2n+5)(n+2)I_{n+1} \\
&+36(1-i)(15870n^4+120336n^3+324177n^2+360683n+133882)(3n+5)(2n+5)(4+3n)I_{n+2} \\
&-9i(115n^2+297n+158)(3n+5)(3n+8)(4+3n)(n+3)(7+3n)I_{n+3} = 0.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

En particulier, la suite des entiers de Gauß $\tilde{u}_n$ définis en (5.2) vérifie (5.5). Le polynôme caractéristique de cette récurrence est

$$P(t) = 64(i-1) + 6896it + 89424(i+1)t^2 + 729t^3$$

et il possède bien trois racines de modules distincts $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ telles que $0 < |\zeta_1| < |\zeta_2| < 1 < |\zeta_3|$. Comme $P((1+i)t) = (2i-2)(3448t + 32 + 89424t^2 + 729t^3)$ et que les trois racines du polynôme de droite sont réelles, on a donc bien aussi que $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ appartiennent à $(1+i)\mathbb{R}$.

Pour montrer b), on prouve la propriété plus générale $\tilde{u}_{4n} \in \mathbb{Q}$, $\tilde{u}_{4n+1} \in (1+i)\mathbb{Q}$, $\tilde{u}_{4n+2} \in i\mathbb{Q}$, $\tilde{u}_{4n+3} \in (1-i)\mathbb{Q}$ pour tout entier $n \geq 0$. Pour cela, on procède par récurrence sur n au moyen de la relation de récurrence (5.5), en vérifiant que c'est vrai pour $n = 0$ à l'aide de (5.2) ; on omet les détails qui ne présentent aucune difficulté. Comme $u_0 \neq 0$, le le théorème de Poincaré-Perron nous assure en particulier que u_n n'est pas nul pour tout n assez grand et que (5.3) a lieu.

Montrons c). La suite r_n vérifie la récurrence (5.5) comme somme de deux suites $I_n(\Gamma_{1,2})$ et $-2I_n(\Gamma_{1,1+i})$ qui la satisfont. Comme on a aussi $2ir_n = \tilde{u}_n\pi - \tilde{v}_n$ avec $\tilde{u}_n \neq 0$ pour n assez grand et $\tilde{v}_n \in \mathbb{Q}[i]$, la transcendance de π implique que $r_n \neq 0$ pour tout n assez grand. Par le théorème de Poincaré-Perron, on sait alors que la limite r_{n+1}/r_n existe et est égale à l'une des deux racines ζ_1, ζ_2. Il n'est pas évident de savoir de laquelle il s'agit, mais de toute façon c'est inutile pour démontrer (5.4).

Enfin, l'assertion d) découle des faits suivants : on sait que $r_{4n} = u_{4n}\pi - v_{4n}$ tend vers 0 et que $u_{4n} \in \mathbb{Z}$. Comme $v_{4n} \in \mathbb{Z}[i]$, la partie imaginaire de v_{4n} est donc nécessairement nulle pour tout n suffisamment grand. □

Pour conclure la preuve du théorème 2, il reste à traiter le cas de la suite d'entiers positifs D_n dont Hata montre que

$$\lim_{n\to+\infty} D_n^{1/n} = \exp\left(3 - \pi\sqrt{3}/6 + \log\sqrt{27/16}\right) = \kappa \approx 10,535224. \tag{5.6}$$

Il ne nous paraît pas clair que $\limsup_{n\to+\infty} D_{n+1}/D_n$ soit fini. Nous invoquons donc à nouveau le lemme 2 qui nous permet de construire, pour tout $\varepsilon > 0$, une suite $(D_{\varepsilon,n})$ telle que D_n divise $D_{\varepsilon,n}$ et $D_{\varepsilon,n+1}/D_{\varepsilon,n} \to \kappa + \varepsilon$. Pour majorer l'exposant de densité de π, on travaille donc avec la modification suivante des suites de Hata : $2iD_{\varepsilon,4n}r_{4n} = u_{\varepsilon,4n}\pi - v_{\varepsilon,4n} \in \mathbb{Z}\pi + \mathbb{Z}$ et $u_{\varepsilon,4n} = D_{\varepsilon,4n}\tilde{u}_{4n}$. Les données numériques (5.3) et (5.4) nous fournissent alors la majoration

$$\nu(\pi) \le \frac{1}{2}\log\left((\kappa+\varepsilon)^8\zeta_2^4\zeta_3^4\right) \le 11,4937 + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Ceci termine la preuve du théorème 2.

5.3. Constructions modulaires. — Dans ce paragraphe, on s'intéresse à des nombres dont on peut majorer l'exposant de densité grâce à des suites obtenues comme coefficients de Taylor de fonctions liées aux formes modulaires. Cette approche est entièrement due à Beukers [**11, 12, 13**]. Elle ne concerne qu'un nombre assez restreint d'exemples : elle redonne les suites d'Apéry pour $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$ mais elle permet aussi de montrer l'irrationalité de deux nombres que l'on ne sait pas aborder par la méthode hypergéométrique à l'heure actuelle. Ces deux méthodes sont donc complémentaires.

L'un de ces deux nombres est $8\zeta(3) - 5\sqrt{5}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{5}\right)n^{-3}$, où $\left(\frac{\cdot}{\cdot}\right)$ est le symbole de Legendre : les approximations qu'en donne Beukers sont dans $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ et nous n'avons pas cherché à savoir si elles impliquent la finitude de l'exposant de densité. Nous allons nous intéresser au deuxième nombre de Beukers $\mathscr{B}$, défini de la manière suivante :

$$\mathscr{B} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^2}, \quad \text{où} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n = q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^3(1-q^{3n})^3\frac{(1+q^{3n})^{9/2}}{(1+q^n)^{3/2}}, \ |q| < 1.$$

(La série génératrice des a_n peut s'écrire à l'aide de la fonction eta de Dedekind).

Théorème 3. — *On a* $\nu(\mathscr{B}) \le 2 + 2\log(2)$ *et* $\mu(\mathscr{B}) \le 50.653658$.

Remarque. — *La majoration de* $\mu(\mathscr{B})$ *n'a pas été donnée par Beukers mais elle ne nécessite rien de plus que ce qui est dans son article* [**11**].

Démonstration. — Au moyen de formes modulaires sur le groupe $\Gamma_1(6)$ des matrices $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right)$ à coefficients entiers vérifiant $a \equiv d \equiv 1 \pmod 6$ et $c \equiv 0 \pmod 6$, Beukers construit dans [**11**] deux suites $(u_n)_{n\ge0}$ et $(v_n)_{n\ge0}$ telles que $u_n \in \mathbb{Z}$, $4^n d_n^2 v_n \in \mathbb{Z}$ et $r_n = u_n\mathscr{B} - v_n \to 0$

suffisamment vite pour impliquer l'irrationalité de $\mathscr{B}$. Il montre également dans [**12**] que les suites $(u_n)_n$ et $(r_n)_n$ vérifient la récurrence

$$(n+1/2)^2 U_n - (34n^2+85n+107/2)U_{n+1} + (n+2)^2 U_{n+2} = 0.$$

Le théorème de Poincaré-Perron nous donne

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = (\sqrt{2}+1)^4 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{r_{n+1}}{r_n} = (\sqrt{2}-1)^4.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, définissons $u_{\varepsilon,n} = 4^n d_{\varepsilon,n}^2 u_n$, $v_{\varepsilon,n} = 4^n d_{\varepsilon,n}^2 v_n$: on a $\alpha_{\mathscr{B}}(|\mathbf{u}_\varepsilon|) = 4(e+\varepsilon)^2(\sqrt{2}-1)^4 < 1$ (pour ε suffisamment petit) et $\beta(|\mathbf{u}_\varepsilon|) = 4(e+\varepsilon)^2(\sqrt{2}+1)^4 < 1$. Il en découle que $\nu(\mathscr{B}) \le 2 + 2\log(2)$ et $\mu(\mathscr{B}) \le 50.653658$. $\square$

La suite $(u_n)_{n\ge 0}$ (avec $u_0 = 1$ et $u_1 = 5/2$) utilisée ci-dessus a ceci d'intrigant qu'on n'en connaît aucune expression explicite, sous forme d'une somme hypergéométrique par exemple. Pourtant, ses liens avec le monde hypergéométrique sont particulièrement forts comme le montre la série de faits suivants. Beukers a en effet montré que l'équation différentielle

$$(z^4 - 34z^3 + z^2)y''' + (6z^3 - 153z^2 + 3z)y'' + (7z^2 - 112z + 1)y' + (z-5)y = 0,$$

vérifiée par $A(z) = \sum_{n=0}^\infty \big(\sum_{j=0}^n \binom{n}{j}^2 \binom{n+j}{n}^2\big) z^n$, avec $|z| < (\sqrt{2}-1)^4$, est le carré symétrique de l'équation

$$(z^3 - 34z^2 + z)y'' + (2z^2 - 51z + 1)y' + \frac{1}{4}(z-10)y = 0, \tag{5.7}$$

qui admet $U(z) = \sum_{n=0}^\infty u_n z^n$ comme solution holomorphe en $z = 0$. On en déduit en particulier la relation $U(z)^2 = A(z)$ dont il découle que, pour tout entier n, on a

$$\sum_{j=0}^n u_j u_{n-j} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j}^2 \binom{n+j}{n}^2.$$

De plus, un changement de variable transforme (5.7) en l'équation différentielle fuchsienne

$$z(1-z)(1-9z)y'' + (27z^2 - 20z + 1)y' + (9z-3)y = 0,$$

dont une solution est la série $T(z) = \sum_{n=0}^\infty \big(\sum_{j=0}^n \binom{n}{j}^2 \binom{2j}{j}\big) z^n$. En explicitant, Beukers a obtenu la relation suivante, valable pour $|z|$ suffisamment petit :

$$U\left(\frac{z(1-9z)}{1-z}\right) = (1-z)^{1/2}\, T(z).$$

Enfin, dans [**56**], Beukers et Stienstra ont montré que $T(z)$ est l'une des périodes d'une certaine famille, indexée par z, de surfaces $K3$ elliptiques et, en spécialisant leurs formules générales, on obtient que

$${}_2F_1\left[\begin{matrix}1/12, 5/12\\ 1\end{matrix}; \frac{1728\, z^6(9z-1)(z-1)^3}{(3z^3-3z^2+9z-1)^3(3z-1)^3}\right] = \big((3z-1)(3z^3-3z^2+9z-1)\big)^{1/4} T(z).$$

L'apparition des mêmes coefficients numériques dans l'identité (valable pour $\mathrm{Im}(\tau) > 0$)

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix}1/12, 5/12\\ 1\end{matrix}; \frac{1728}{j(\tau)}\right] = E_4(\tau)^{1/4}, $$

où E_4 est l'une des séries d'Eisenstein et j l'invariant modulaire, n'est évidemment pas fortuite dans ce contexte et elle est très bien expliquée dans [**56**]. Voir également [**57**] pour une description très claire du lien entre formes modulaires sur $SL_2(\mathbb{Z})$ et séries hypergéométriques.

Peut-on déduire de toutes ces propriétés et relations une expression explicite [(2)] pour les nombres u_n ?

5.4. Nombres dont on ne sait pas borner l'exposant de densité. — Comme conséquence de la proposition 1, les nombres de Liouville ont un exposant de densité infini. Mais, dans la direction opposée, on est loin de savoir majorer l'exposant de densité de tous les nombres ayant un exposant d'irrationalité fini. Une condition nécessaire pour parvenir à majorer $\nu(\xi)$, pour un nombre ξ qui n'est pas de Liouville, est évidemment de connaître une preuve constructive de l'irrationalité de ξ, utilisant des suites de rationnels ; les approximants de Padé sont un outil précieux pour cela. Mais cette condition est loin d'être suffisante : par exemple, on connaît entièrement la table de Padé de la fonction exp (voir [**7**]) mais aucune des suites de rationnels que l'on en déduit, et qui prouvent que $e^r \notin \mathbb{Q}$ pour tout rationnel $r \neq 0$, n'est à croissance géométrique. On pourrait également citer le nombre e^π (dont la transcendance a été prouvée par Gel'fond [**30**]) pour lequel on ne sait même pas si $\mu(e^\pi) < +\infty$.

On connaît aussi l'irrationalité de certains nombres dérivés des q–analogues de π, $\log(2)$, $\zeta(3)$, etc, comme, par exemple, $\sum_{n=1}^{\infty} 1/F_n$ (où F_n est le n-ième nombre de Fibonacci) dont André–Jeannin a montré l'irrationalité par la méthode d'Apéry [**4**]. Les approches connues (qui utilisent de façon plus ou moins cachée des fonctions hypergéométriques basiques) ne produisent pas de suites d'approximations à croissance géométrique et on ne sait donc pas majorer l'exposant de densité des q-analogues en question.

Terminons par la remarque suivante qui montre la difficulté d'obtenir des suites régulières en notre sens à partir de suites beaucoup moins denses. Soit ξ un irrationnel positif tel qu'il existe deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ d'entiers positifs vérifiant $r_n = u_n\xi - v_n \to 0$ et supposons que $u_n \sim \exp(g(n))$ et $r_n \sim \exp(-b \cdot g(n))$ ($b > 0$) avec g fonction croissante telle que $\lim_{n\to+\infty} g(n) = +\infty$ et de réciproque h. Il est facile de voir que les suites $U_n = u_{\lfloor h(n)\rfloor}$ et $R_n = r_{\lfloor h(n)\rfloor}$ vérifient

$$ \limsup_{n\to+\infty} U_n^{1/n} < +\infty \quad \text{et} \quad \limsup_{n\to+\infty} |R_n|^{1/n} < 1. $$

Malheureusement, en général, on a seulement

$$ \limsup_{n\to+\infty} \left|\frac{R_{n+1}}{R_n}\right| = 1. $$

[(2)] autre que celle, peu satisfaisante, obtenue en développant en série entière l'équation $U(z) = \sqrt{A(z)}$.

Ce procédé de « densification » d'une suite est donc trop naïf.

6. Exposant de densité de certains nombres algébriques

6.1. Une construction à l'aide de nombres de Pisot. — Une méthode originale pour montrer qu'un entier algébrique réel ξ est soit irrationnel soit entier rationnel est de considérer la suite $(\xi - \lfloor \xi \rfloor)^n$: en notant d le degré de ξ, on a

$$(\xi - \lfloor \xi \rfloor)^n = q_{d-1,n}\xi^{d-1} + q_{d-2,n}\xi^{d-2} + \cdots + q_{1,n}\xi + q_{0,n} \tag{6.1}$$

avec tous les $q_{j,n} \in \mathbb{Z}$. Cela se prouve trivialement en utilisant le polynôme minimal de ξ sur $\mathbb{Z}$ et le fait que son coefficient dominant est 1. Si ξ n'est pas un entier rationnel, alors on déduit de (6.1) l'irrationalité de ξ par un argument classique. On obtient même une mesure d'irrationalité de ξ, en général moins bonne que la borne de Liouville $\mu(\xi) \leq d$; voir la fin de ce paragraphe pour plus de détails.

Il s'avère que l'on peut extraire de cette approche une majoration explicite de $\nu(\xi)$ pour une classe intéressante mais restreinte d'entiers algébriques. Soit $P(X) = \sum_{j=0}^{d} a_j X^j \in \mathbb{Z}[X]$ irréductible, avec $a_d = 1$ et $d \geq 3$ [(3)]. On suppose que les racines $\xi_1, \ldots, \xi_d$ de P vérifient $1 \leq |a_0| < |\xi_2| < |\xi_3| \leq \cdots \leq |\xi_d|$ et que $\xi_1 \in \mathbb{R}$: puisque $\xi_1\xi_2\cdots\xi_d = (-1)^d a_0$, on a nécessairement que $0 < |\xi_1| < 1$. Pour simplifier, on notera parfois $\xi = \xi_1$.

Théorème 4. — *Dans les conditions ci-dessus, l'exposant de densité de ξ^j est fini pour tout $j \in \{1, \ldots, d-1\}$. Plus précisément, on a $\nu(\xi^j) \leq \log|a_0| - \frac{1}{2}\log|\xi\xi_2|$.*

Compte-tenu du lemme 3, si ξ^j vérifie les hypothèses du théorème 4, l'exposant de densité du nombre algébrique $(a\xi^j + b)/(c\xi^j + d)$ est fini. C'est en particulier le cas du nombre $|1/\xi|$ qui est un nombre de Pisot si $a_0 = \pm 1$ [(4)].

Nous procédons maintenant à la démonstration du théorème 4 dans le cas $j = 1$: nous nous ramenons dans un premier temps à celle de la proposition 7 ci-dessous, que nous démontrons ensuite. On indiquera après ce qui doit être changé pour démontrer le cas de ξ^j pour $j \geq 2$: la seule difficulté se situe au niveau des notations, ce qui explique que nous donnions en détail seulement le cas $j = 1$.

On se place donc dorénavant dans les conditions du théorème avec $j = 1$, bien que certaines assertions puissent parfois être vraies dans un cadre plus général.

Nous débutons avec une remarque similaire à (6.1) : pour tout entier $n \geq 0$, il existe des entiers $p_{k,n}$ $(k = 0, \ldots, d-1)$ tels que l'on ait

$$\xi^n = p_{d-1,n}\xi^{d-1} + p_{d-2,n}\xi^{d-2} + \cdots + p_{1,n}\xi + p_{0,n}. \tag{6.2}$$

---

(3) Si $d = 2$, l'identité (6.1) redonne essentiellement des réduites de ξ et il n'y a donc pas besoin de considérer de nouveau ce cas.

(4) Un nombre de Pisot est un entier algébrique réel > 1 dont tous les conjugués sur $\mathbb{Q}$ sont de module < 1. Voir [**9**] pour les propriétés de ces nombres.

Les nombres $1, \xi, \dots, \xi^{d-1}$ étant linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, les d suites $(p_{k,n})_{n\geq 0}$ vérifient toutes la même récurrence :

$$\sum_{j=0}^{d} a_j p_{n+j} = 0 \quad \text{pour tout } n \geq 0, \tag{6.3}$$

les conditions initiales étant $p_{k,k} = 1$ et $p_{k,n} = 0$ pour $n \in \{0, \dots, d-1\} \setminus \{k\}$, pour k donné. Ces conditions assurent que ces d suites forment une base sur $\mathbb{C}$ des solutions de la récurrence (6.3) et comme $a_d = 1$, les $p_{k,n}$ sont bien des entiers. De plus, on a

$$p_{k,n} = \sum_{j=1}^{d} c_{k,j}\, \xi_j^n \tag{6.4}$$

où les $c_{k,j}$ sont dans $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d)$. On pourrait donner des expressions explicites des $c_{k,j}$ mais il nous suffira de savoir que, par définition des $p_{k,n}$, on a l'identité

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_d \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \xi_1^{d-1} & \xi_2^{d-1} & \dots & \xi_d^{d-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{0,1} & c_{1,1} & \dots & c_{d-1,1} \\ c_{0,2} & c_{1,2} & \dots & c_{d-1,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{0,d} & c_{1,d} & \dots & c_{d-1,d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

que l'on note $E \cdot C = \mathrm{Id}$ avec des définitions évidentes. Remarquons que E est une matrice de Vandermonde : on notera

$$V_k(x_1, x_2, \dots, x_k) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{k-1} & x_2^{k-1} & \dots & x_k^{k-1} \end{vmatrix}$$

le déterminant de Vandermonde construit sur $x_1, \dots, x_k$. Il est bien connu que

$$V_k(x_1, x_2, \dots, x_k) = \prod_{1 \leq i < j \leq k} (x_j - x_i),$$

qui est donc non-nul si les x_i sont tous distincts. En particulier, $\det(E) = V_d(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d)$.

Notre but est de construire à partir des suites $(\xi^n)_{n\geq 0}$ et $(p_{k,n})_{n\geq 0}$ une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ telle que $\alpha_\xi(|\mathbf{u}|) < 1$ et $\beta(|\mathbf{u}|) < +\infty$. Pour cela, on considère la matrice $(d-1) \times (d-1)$ suivante :

$$D_n = \begin{pmatrix} p_{d-1,n} & p_{d-2,n} & \cdots & p_{2,n} & \xi^n \\ p_{d-1,n+1} & p_{d-2,n+1} & \cdots & p_{2,n+1} & \xi^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{d-1,n+d-2} & p_{d-2,n+d-2} & \cdots & p_{2,n+d-2} & \xi^{n+d-2} \end{pmatrix},$$

dont on note Δ_n le déterminant. Compte-tenu de (6.2), par combinaison de colonnes, on a

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} p_{d-1,n} & p_{d-2,n} & \cdots & p_{2,n} & p_{1,n}\xi + p_{0,n} \\ p_{d-1,n+1} & p_{d-2,n+1} & \cdots & p_{2,n+1} & p_{1,n+1}\xi + p_{0,n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{d-1,n+d-2} & p_{d-2,n+d-2} & \cdots & p_{2,n+d-2} & p_{1,n+d-2}\xi + p_{0,n+d-2} \end{vmatrix}.$$

Puisque ξ est irrationnel, on a $\Delta_n = u_n\xi - v_n$ avec $v_n \in \mathbb{Z}$ et $u_n = \det(U_n)$, où

$$U_n = \begin{pmatrix} p_{d-1,n} & p_{d-2,n} & \cdots & p_{2,n} & p_{1,n} \\ p_{d-1,n+1} & p_{d-2,n+1} & \cdots & p_{2,n+1} & p_{1,n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{d-1,n+d-2} & p_{d-2,n+d-2} & \cdots & p_{2,n+d-2} & p_{1,n+d-2} \end{pmatrix}.$$

Les suites $(|u_n|)_n$ et $(|\Delta_n|)_n$ sont nos candidats pour montrer que l'exposant de densité de ξ est fini : nous allons montrer que c'est bien le cas en prouvant 1°) que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \xi_2\xi_3\cdots\xi_d = \frac{(-1)^d a_0}{\xi_1}, \tag{6.5}$$

et donc $\mathbf{u}$ est croissante à partir d'un certain rang et $\beta(|\mathbf{u}|) < +\infty$, et 2°) que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n} = \xi_1\xi_3\xi_4\cdots\xi_d = \frac{(-1)^d a_0}{\xi_2}. \tag{6.6}$$

Comme $|\xi_2| > |a_0|$ par hypothèse, on a $\alpha_\xi(|\mathbf{u}|) < 1$ et donc $\nu(\xi) \le \log\sqrt{\alpha_\xi(|\mathbf{u}|)\beta(|\mathbf{u}|)} = \log|a_0| - \frac{1}{2}\log|\xi_1\xi_2|$.

Il ne nous reste donc qu'à démontrer (6.5) et (6.6) : ce sont des conséquences de la proposition suivante, qui est plus précise.

Proposition 7. — *(i) On a*

$$u_n = (-1)^{\lfloor (d-1)/2\rfloor} \frac{V_{d-1}(\xi_2,\xi_3,\ldots,\xi_d)}{V_d(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_d)} \cdot (\xi_2\xi_3\cdots\xi_d)^n + o(1). \tag{6.7}$$

(ii) On a

$$\Delta_n = (-1)^{\lfloor 3d/2\rfloor}(\xi_2-\xi_1) \frac{V_{d-1}(\xi_1,\xi_3,\ldots,\xi_d)}{V_d(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_d)} \cdot (\xi_1\xi_3\xi_4\cdots\xi_d)^n + \mathcal{O}\big(|\xi_1\xi_2\xi_4\cdots\xi_d|^n\big). \tag{6.8}$$

Remarque. — *L'hypothèse $|\xi_2| < |\xi_3| \le \cdots \le |\xi_d|$ assure que le terme $\mathcal{O}\big(|\xi_1\xi_2\xi_4\cdots\xi_d|^n\big)$ est bien un terme d'erreur dans* (6.8). *C'est le seul endroit où l'inégalité stricte $|\xi_2| < |\xi_3|$ est utilisée car la démonstration de* (6.7) *reste valable si on autorise $|\xi_2| = |\xi_3|$.*

Le reste de ce paragraphe est consacré à la démonstration de cette proposition.

(*i*) *Comportement de u_n.* En utilisant (6.4), on vérifie que

$$U_n = \begin{pmatrix} \xi_2^n & \xi_3^n & \cdots & \xi_d^n \\ \xi_2^{n+1} & \xi_3^{n+1} & \cdots & \xi_d^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \xi_2^{n+d-2} & \xi_3^{n+d-2} & \cdots & \xi_d^{n+d-2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{d-1,2} & c_{d-2,2} & \cdots & c_{1,2} \\ c_{d-1,3} & c_{d-2,3} & \cdots & c_{1,3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{d-1,d} & c_{d-2,d} & \cdots & c_{1,d} \end{pmatrix}$$
$$+ \xi_1^n \begin{pmatrix} c_{d-1,1} & c_{d-2,1} & \cdots & c_{1,1} \\ c_{d-1,1}\xi_1 & c_{d-2,1}\xi_1 & \cdots & c_{1,1}\xi_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{d-1,1}\xi_1^{d-2} & c_{d-2,1}\xi_1^{d-2} & \cdots & c_{1,1}\xi_1^{d-2} \end{pmatrix} = V_n + W_n.$$

En notant $v_{i,j}$ et $w_{i,j}$ les éléments courants (qui dépendent de n) de V_n et W_n respectivement, on a

$$\begin{aligned} u_n = \det(V_n + W_n) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{d-1}} \varepsilon(\sigma)\big(v_{1,\sigma(1)} + w_{1,\sigma(1)}\big) \cdots \big(v_{d-1,\sigma(d-1)} + w_{d-1,\sigma(d-1)}\big) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{d-1}} \varepsilon(\sigma) v_{1,\sigma(1)} \cdots v_{d-1,\sigma(d-1)} + \Omega_n = \det(V_n) + \Omega_n \end{aligned}$$

avec

$$\text{(6.9)} \quad \Omega_n = \sum_{k=1}^{d-1} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{d-1}} \varepsilon(\sigma) \Big(v_{1,\sigma(1)} \cdots v_{k-1,\sigma(k-1)} w_{k,\sigma(k)} \times \big(v_{k+1,\sigma(k+1)} + w_{k+1,\sigma(k+1)}\big) \cdots \big(v_{d-1,\sigma(d-1)} + w_{d-1,\sigma(d-1)}\big) \Big).$$

(L'expression de Ω_n découle de l'identité

$$\text{(6.10)} \qquad \prod_{j=1}^{\ell}(a_j + b_j) = \prod_{j=1}^{\ell} a_j + \sum_{k=1}^{\ell} \Big(\prod_{m=1}^{k-1} a_m \Big) b_k \Big(\prod_{m=k+1}^{\ell} (a_m + b_m) \Big)$$

que l'on démontre par récurrence sur ℓ, avec la convention qu'un produit vide vaut 1.) Il résulte de (6.9) que

$$\Omega_n = \sum_{k=1}^{d-1} \det(U_{k,n})$$

où $U_{k,n}$ est la matrice que l'on déduit de U_n en remplaçant les $k-1$ premières colonnes par ${}^t\big(v_{i,j}\big)_{1 \le i \le d-1}$ ($j = 1, \ldots, k-1$), la k-ième par ${}^t\big(w_{i,k}\big)_{1 \le i \le d-1}$, les $d-k-1$ suivantes demeurant inchangées [5]. (On a aussi $U_{d,n} = V_n$.)

Or en procédant à des combinaisons de colonnes et en prenant soin de conserver la colonne ${}^t\big(w_{i,k}\big)_{i=1,\ldots,d-1}$ (proportionnelle à ξ_1^n) en la mettant en première position, on peut

[5] Cette façon de faire nous donne l'occasion d'utiliser la jolie identité (6.10) mais on peut aussi obtenir cela plus rapidement en invoquant la multilinéarité du déterminant.

faire en sorte que sur la j-ième colonne ($j \geq 2$) de $U_{k,n}$ on ait une combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{K}$ de $\xi_1^n, \xi_2^n, \xi_3^n, \ldots, \xi_{j+1}^n$ (on « tue » les racines les plus grandes). En développant ensuite le déterminant, on obtient alors

$$\det(U_{k,n}) = \mathcal{O}\big(|\xi_1\xi_3\cdots\xi_d|^n\big) = \mathcal{O}\big(\big|a_0/\xi_2\big|^n\big) = o(1).$$

On a donc $u_n = \det(V_n) + o(1) = C(\mathbf{u})\cdot(\xi_2\xi_3\cdots\xi_d)^n + o(1)$ avec

$$C(\mathbf{u}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \xi_2 & \xi_3 & \ldots & \xi_d \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \xi_2^{d-2} & \xi_3^{d-2} & \ldots & \xi_d^{d-2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_{d-1,2} & c_{d-2,2} & \ldots & c_{1,2} \\ c_{d-1,3} & c_{d-2,3} & \ldots & c_{1,3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{d-1,d} & c_{d-2,d} & \ldots & c_{1,d} \end{vmatrix}.$$

On peut réécrire $C(\mathbf{u})$ comme

$$C(\mathbf{u}) = (-1)^{\lfloor (d-1)/2\rfloor} V_{d-1}(\xi_2,\xi_3,\ldots,\xi_d)\cdot \begin{vmatrix} c_{1,2} & c_{2,2} & \ldots & c_{d-1,2} \\ c_{1,3} & c_{2,3} & \ldots & c_{d-1,3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{1,d} & c_{2,d} & \ldots & c_{d-1,d} \end{vmatrix}$$

et on remarque que ce dernier déterminant est exactement le mineur du coefficient $c_{0,1}$ en position $(1,1)$ dans la matrice C. Comme E est l'inverse de C, ce mineur vaut donc le coefficient de E en position $(1,1)$ divisé par $\det(E)$, soit tout simplement

$$\begin{vmatrix} c_{1,2} & c_{2,2} & \ldots & c_{d-1,2} \\ c_{1,3} & c_{2,3} & \ldots & c_{d-1,3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{1,d} & c_{2,d} & \ldots & c_{d-1,d} \end{vmatrix} = \frac{1}{\det(E)} = \frac{1}{V_d(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_d)}.$$

On a donc bien $C(\mathbf{u}) = (-1)^{\lfloor (d-1)/2\rfloor}\dfrac{V_{d-1}(\xi_2,\xi_3,\ldots,\xi_d)}{V_d(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_d)}$, qui est non-nul puisque les ξ_i sont tous distincts. Ceci termine la preuve du point (i) de la proposition 7.

(ii) *Comportement de* Δ_n. On peut exprimer la matrice D_n à l'aide des puissances des ξ_j en utilisant (6.4). Grâce à sa dernière colonne ${}^t(\xi_1^{n+i-1})_{1\leq i\leq d-1}$, on peut alors éliminer toute occurence des ξ_1^{n+i-1} dans les autres colonnes de D_n et on a donc $\Delta_n = \det(\widehat{D}_n)$ avec

$$\widehat{D}_n = \begin{pmatrix} \xi_1^n & \xi_3^n & \ldots & \xi_d^n \\ \xi_1^{n+1} & \xi_3^{n+1} & \ldots & \xi_d^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \xi_1^{n+d-2} & \xi_3^{n+d-2} & \ldots & \xi_d^{n+d-2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ c_{d-1,3} & c_{d-2,3} & \ldots & c_{2,3} & 0 \\ c_{d-1,4} & c_{d-2,4} & \ldots & c_{2,4} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{d-1,d} & c_{d-2,d} & \ldots & c_{2,d} & 0 \end{pmatrix}$$
$$+\, \xi_2^n \begin{pmatrix} c_{d-1,2} & \ldots & c_{2,2} & 0 \\ c_{d-1,2}\xi_2 & \ldots & c_{2,2}\xi_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{d-1,2}\xi_2^{d-2} & \ldots & c_{2,2}\xi_2^{d-2} & 0 \end{pmatrix} = X_n + Y_n.$$

Notons $x_{i,j}$ et $y_{i,j}$ les éléments courants de X_n et Y_n. Bien que cela ne soit pas très visible sous cette forme, la dernière colonne de $\widehat{D}_n$, qui est aussi la dernière de X_n, est bien ${}^t(\xi_1^{n+i-1})_{1\le i\le d-1}$. En procédant exactement de la même manière que pour l'estimation de u_n faite en (i), on vérifie à partir de l'expression développée de $\det(\widehat{D}_n)$ que

$$\det(\widehat{D}_n) = \det(X_n) + \sum_{k=1}^{d-1} \det(D_{k,n})$$

où $D_{k,n}$ est la matrice que l'on déduit de $\widehat{D}_n$ en remplaçant les $k-1$ premières colonnes par ${}^t(x_{i,j})_{1\le i\le d-1}$ $(j=1,\dots,k-1)$, la k-ième par ${}^t(y_{i,k})_{1\le i\le d-1}$ et en laissant inchangées les $d-k-1$ dernières. (On a $D_{d,n} = X_n$.)

Remarquons que pour $k \le d-2$, ${}^t(\xi_1^{n+i-1})_{1\le i\le d-1}$ est toujours la dernière colonne de $D_{k,n}$; ce n'est pas le cas si $k = d-1$ mais on a alors $\det(D_{d-1,n}) = 0$ puisque la dernière colonne de $D_{d-1,n}$ est la dernière de Y_n, qui est nulle. Pour évaluer Δ_n, on peut donc supposer que $k \le d-2$: par combinaisons de colonnes et en prenant soin de toujours conserver les colonnes ${}^t(\xi_1^{n+i-1})_{1\le i\le d-1}$ et ${}^t(y_{i,k})_{1\le i\le d-1}$ (proportionnelle à ξ_2^n) en les mettant dans les deux premières positions, on peut faire en sorte que sur la j-ième colonne ($j \ge 3$) de $D_{k,n}$ on ait une combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{K}$ de $\xi_1^n, \xi_2^n, \xi_3^n, \dots, \xi_{j+1}^n$, ce qui entraîne que $\det(D_{k,n}) = \mathcal{O}\big(|\xi_1\xi_2\xi_4\cdots\xi_d|^n\big)$. On a donc

$$\Delta_n = \det(X_n) + \mathcal{O}\big(|\xi_1\xi_2\xi_4\cdots\xi_d|^n\big) = C(\Delta)\cdot(\xi_1\xi_3\xi_4\cdots\xi_d)^n + \mathcal{O}\big(|\xi_1\xi_2\xi_4\cdots\xi_d|^n\big)$$

avec

$$C(\Delta) = (-1)^{d-1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \xi_1 & \xi_3 & \dots & \xi_d \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \xi_1^{d-2} & \xi_3^{d-2} & \dots & \xi_d^{d-2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_{d-1,3} & c_{d-2,3} & \dots & c_{2,3} \\ c_{d-1,4} & c_{d-2,4} & \dots & c_{2,4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{d-1,d} & c_{d-2,d} & \dots & c_{2,d} \end{vmatrix}.$$

On peut réécrire $C(\Delta)$ comme

$$C(\Delta) = (-1)^{d-1+\lfloor (d-2)/2\rfloor} V_{d-1}(\xi_1,\xi_3,\dots,\xi_d)\cdot \begin{vmatrix} c_{2,3} & c_{3,3} & \dots & c_{d-1,3} \\ c_{2,4} & c_{3,4} & \dots & c_{d-1,4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{2,d} & c_{3,d} & \dots & c_{d-1,d} \end{vmatrix}$$

et on remarque que ce dernier déterminant est un mineur d'ordre $d-2$ de la matrice C des coefficients $c_{i,j}$. Or on trouve dans [**29**, p. 21, (33)] une formule liant les divers mineurs d'une matrice (ici C) à ceux de son inverse (ici E). Cette formule s'énonce comme suit. Étant donnée $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le d}$ une matrice $d\times d$ inversible d'inverse B, notons $A(i_1,\dots,i_p;k_1,\dots,k_p)$ le mineur d'ordre p obtenu en gardant les coefficients $(a_{i_j,k_\ell})_{1\le j,\ell\le p}$: on a alors

$$A(i_1,\dots,i_p;k_1,\dots,k_p) = \frac{(-1)^{\sum_{\ell=1}^p (i_\ell+k_\ell)}}{\det(B)} B(K_1,\dots,K_{d-p};I_1,\dots,I_{d-p}),$$

où $\{i_1 < \cdots < i_p\} \sqcup \{I_1 < \cdots < I_{d-p}\} = \{1, \ldots, d\} = \{k_1 < \cdots < k_p\} \sqcup \{K_1 < \cdots < K_{d-p}\}$. Dans notre cas, on en déduit que

$$\begin{vmatrix} c_{2,3} & c_{3,3} & \ldots & c_{d-1,3} \\ c_{2,4} & c_{3,4} & \ldots & c_{d-1,4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{2,d} & c_{3,d} & \ldots & c_{d-1,d} \end{vmatrix} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \xi_1 & \xi_2 \end{vmatrix}}{V_d(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_d)}.$$

La formule ainsi obtenue pour $C(\Delta)$ termine la démonstration de la proposition 7 et celle du théorème 4 pour $j = 1$.

Le cas général. Pour démontrer le théorème lorsque $j \geq 2$, on introduit la matrice

$$D_{j,n} = \begin{pmatrix} p_{d-1,n} & \ldots & p_{j+1,n} & \xi^n & p_{j-1,n} & \ldots & p_{1,n} \\ p_{d-1,n+1} & \ldots & p_{j+1,n+1} & \xi^{n+1} & p_{j-1,n+1} & \ldots & p_{1,n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ p_{d-1,n+d-2} & \ldots & p_{j+1,n+d-2} & \xi^{n+d-2} & p_{j-1,n+d-2} & \ldots & p_{1,n+d-2} \end{pmatrix}.$$

Par combinaisons de colonnes, son déterminant $\Delta_{j,n}$ s'écrit comme

$$\Delta_{j,n} = \begin{vmatrix} p_{d-1,n} & \ldots & p_{j+1,n} & p_{j,n}\xi^j + p_{0,n} & p_{j-1,n} & \ldots & p_{1,n} \\ p_{d-1,n+1} & \ldots & p_{j+1,n+1} & p_{j,n+1}\xi^j + p_{0,n+1} & p_{j-1,n+1} & \ldots & p_{1,n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{d-1,n+d-2} & \ldots & p_{j+1,n+d-2} & p_{j,n+d-2}\xi^j + p_{0,n+d-2} & p_{j-1,n+d-2} & \ldots & p_{1,n+d-2} \end{vmatrix}.$$

En le développant et en invoquant l'irrationalité de ξ^j, on a donc $\Delta_{j,n} = u_n\xi^j - v_{j,n}$ avec la même suite $(u_n)_{n\geq 0}$ que lorsque $j = 1$ et $v_{j,n} \in \mathbb{Z}$. Il suffit donc de déterminer le comportement de $\Delta_{j,n}$. Pour cela, on utilise la même démarche que pour Δ_n : on a $\Delta_{j,n} = \det(\widehat{D}_{j,n})$ avec

(6.11)

$$\widehat{D}_{j,n} = \xi_2^n \begin{pmatrix} c_{d-1,2} & c_{d-2,2} & \ldots & c_{j+1,2} & 0 & c_{j-1,2} & \ldots & c_{1,2} \\ c_{d-1,2}\xi_2 & c_{d-2,2}\xi_2 & \ldots & c_{j+1,2}\xi_2 & 0 & c_{j-1,2}\xi_2 & \ldots & c_{1,2}\xi_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{d-1,2}\xi_2^{d-2} & c_{d-2,2}\xi_2^{d-2} & \ldots & c_{j+1,2}\xi_2^{d-2} & 0 & c_{j-1,2}\xi_2^{d-2} & \ldots & c_{1,2}\xi_2^{d-2} \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} \xi_1^n & \xi_3^n & \ldots & \xi_d^n \\ \xi_1^{n+1} & \xi_3^{n+1} & \ldots & \xi_d^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \xi_1^{n+d-2} & \xi_3^{n+d-2} & \ldots & \xi_d^{n+d-2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ c_{d-1,3} & c_{d-2,3} & \ldots & c_{j+1,3} & 0 & c_{j-1,3} & \ldots & c_{1,3} \\ c_{d-1,4} & c_{d-2,4} & \ldots & c_{j+1,4} & 0 & c_{j-1,4} & \ldots & c_{1,4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{d-1,d} & c_{d-2,d} & \ldots & c_{j+1,d} & 0 & c_{j-1,d} & \ldots & c_{1,d} \end{pmatrix}.$$

On obtient donc que $\Delta_{j,n} = C(\Delta_j) \cdot (\xi_1\xi_3\xi_4\cdots\xi_d)^n + \mathcal{O}\big(|\xi_1\xi_2\xi_4\cdots\xi_d|^n\big)$ avec
(6.12)

$$C(\Delta_j) = (-1)^{d-j+\lfloor (d-2)/2\rfloor} V_{d-1}(\xi_1,\xi_3,\ldots,\xi_d) \cdot \begin{vmatrix} c_{1,3} & \ldots & c_{j-1,3} & c_{j+1,3} & \ldots & c_{d-1,3} \\ c_{1,4} & \ldots & c_{j-1,4} & c_{j+1,4} & \ldots & c_{d-1,4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{1,d} & \ldots & c_{j-1,d} & c_{j+1,d} & \ldots & c_{d-1,d} \end{vmatrix}.$$

Le facteur $(-1)^{d-j}$ provient du développement selon la $(d-j)$-ième colonne du déterminant de la dernière matrice dans (6.11). Le déterminant dans (6.12) est un mineur d'ordre $d-2$ de la matrice C et on le calcule comme pour $C(\Delta)$ en invoquant la formule de Gantmacher : pour la suite (preuve du théorème 5), il est important de remarquer que cette formule fait apparaître un nouveau facteur $(-1)^{j+1}$, ce qui permet une compensation avec le $(-1)^j$ dans (6.12). On obtient finalement que

$$(6.13)\quad \Delta_{j,n} = (-1)^{\lfloor 3d/2\rfloor}\big(\xi_2^j - \xi_1^j\big)\frac{V_{d-1}(\xi_1,\xi_3,\ldots,\xi_d)}{V_d(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_d)} \cdot (\xi_1\xi_3\xi_4\cdots\xi_d)^n + \mathcal{O}\big(|\xi_1\xi_2\xi_4\cdots\xi_d|^n\big),$$

ce qui achève la démonstration du théorème 4.

Remarque. — *Soit ξ un entier algébrique réel de degré $d \geq 2$ et tel que $|\xi| < 1$. L'équation (6.1) se réduit alors à (6.2) que l'on peut voir comme une suite $P_n(\xi_1)$ où P_n est un polynôme de degré $d-1$ et de hauteur $\ll |\xi_d|^n$, avec ξ_d n'importe quelle racine de plus grand module du polynôme minimal de ξ. Le lemme donné page 237 de* [**46**] *s'applique et on obtient que*

$$(6.14)\qquad \mu(\xi) \leq (d-1)\left(1 - \frac{\log|\xi_d|}{\log|\xi|}\right).$$

Notons que le membre de droite de (6.14) *est toujours $\geq d-1$ et, de plus, comme $|\xi| \cdot |\xi_d|^{d-1} \geq |a_0|$, on a aussi*

$$(d-1)\left(1 - \frac{\log|\xi_d|}{\log|\xi|}\right) \geq d + (d-1)\frac{\log|a_0|}{\log|\xi|}.$$

Si $a_0 = \pm 1$, la borne (6.14) *n'est donc jamais meilleure que celle de Liouville et, d'une manière générale, elle est très éloignée de celle de Roth $\mu(\xi) = 2$.*

Par ailleurs, lorsque l'on est dans les conditions d'applications du théorème 4, sa démonstration nous donne la borne alternative :

$$\mu(\xi) \leq 1 - \frac{\log|\xi| - \log|a_0|}{\log|\xi_2| - \log|a_0|}.$$

Sur les exemples que nous avons calculés, cette majoration ne semble pas meilleure que celle donnée par (6.14) *mais nous n'avons pas certitude à ce sujet dans le cas général.*

6.2. Application à des nombres algébriques plus généraux. —

Théorème 5. — *Soit $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ un nombre algébrique réel dont au moins un conjugué galoisien (autre que lui-même) est réel. Alors $\nu(\xi)$ est fini.*

Corollaire 2. — *Si ξ est un nombre algébrique de degré pair, alors $\nu(\xi) < +\infty$.*

Remarque. — *Si ξ est quadratique, il suffit d'appliquer la proposition 3 pour démontrer le théorème 5. La preuve ci-dessous fonctionne aussi dans ce cas particulier et conduit au même résultat (essentiellement par la même méthode).*

Démonstration. — Notons $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\xi)$, $d = [\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$ le degré de ξ, r_1 (resp. r_2) le nombre de plongements réels (resp. complexes non réels) de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{C}$. L'hypothèse sur ξ signifie $r_1 \geq 2$. Notons $\sigma_1, \dots, \sigma_{r_1}$ les plongements réels et $\sigma_{r_1+1}, \dots, \sigma_r$ les plongements non réels, avec $r = r_1 + r_2$. On choisit cette numérotation de telle sorte que $\sigma_1 = \mathrm{id}$. Notons ψ le plongement logarithmique, c'est-à-dire le morphisme de groupes de $\mathbb{K}^\star$ dans $\mathbb{R}^r$ qui envoie tout $x \in \mathbb{K}^\star$ sur le r-uplet

$$(y_1, \dots, y_r) = (\log|\sigma_1(x)|, \dots, \log|\sigma_r(x)|).$$

Notons H l'hyperplan de $\mathbb{R}^r$ d'équation

$$y_1 + \cdots + y_{r_1} + 2y_{r_1+1} + \cdots + 2y_r = 0,$$

et U le groupe des unités de $\mathbb{K}$. Alors $\psi(U)$ est un réseau de H (voir par exemple [**53**], § 4.4, p. 73), c'est-à-dire qu'il existe $x_1, \dots, x_{r-1} \in U$ tels que $(\psi(x_1), \dots, \psi(x_{r-1}))$ soit une $\mathbb{Z}$-base de $\psi(U)$ et une $\mathbb{R}$-base de H.

Le cône $\{(y_1, \dots, y_r) \in H,\ y_r > y_{r-1} > \cdots > y_3 > y_2 > 0\}$ contient au moins un point du réseau $\psi(U)$, qui correspond à une unité ξ' de $\mathbb{K}$ telle que

$$|\sigma_r(\xi')| > |\sigma_{r-1}(\xi')| > \cdots > |\sigma_3(\xi')| > |\sigma_2(\xi')| > 1 \tag{6.15}$$

d'où

$$|\sigma_1(\xi')| = |\sigma_2(\xi')^{\varepsilon_2}\sigma_3(\xi')^{\varepsilon_3} \dots \sigma_r(\xi')^{\varepsilon_r}|^{-1} < 1 \tag{6.16}$$

en posant $\varepsilon_i = 1$ pour $2 \leq i \leq r_1$ et $\varepsilon_i = 2$ pour $r_1 + 1 \leq i \leq r$.

Si $\xi' = \sigma_1(\xi')$ était de degré strictement inférieur à $r_1 + 2r_2 = d$ sur $\mathbb{Q}$, sa norme serait $\pm\sigma_1(\xi')\sigma_2(\xi')^{\varepsilon'_2}\sigma_3(\xi')^{\varepsilon'_3} \dots \sigma_r(\xi')^{\varepsilon'_r}$ avec $\varepsilon'_2 \leq \varepsilon_2$, …, $\varepsilon'_r \leq \varepsilon_r$ et l'une de ces inégalités serait stricte. C'est impossible compte tenu des inégalités (6.15) et (6.16) car la norme d'un entier algébrique non nul est toujours un entier non nul.

On a donc $\mathbb{Q}(\xi') = \mathbb{Q}(\xi)$. Posons $\xi'_i = \sigma_i(\xi')$ pour $1 \leq i \leq r_1$. Pour tout j tel que $1 \leq j \leq r_2$, on note ξ'_{r_1+2j-1} et ξ'_{r_1+2j} le nombre complexe $\sigma_{r_1+j}(\xi')$ et son conjugué (au sens de la conjugaison complexe). Alors $\xi'_1, \dots, \xi'_d$ sont les d conjugués galoisiens de ξ' et les relations (6.15) et (6.16) montrent que l'on a $0 < |\xi'_1| < 1 < |\xi'_2| < |\xi'_3| \leq |\xi'_4| \leq \cdots \leq |\xi'_d|$ puisque $r_1 \geq 2$. Comme ξ' est une unité, les résultats du paragraphe précédent s'appliquent donc à ξ' (avec $a_0 = \pm 1$).

On dispose ainsi de suites d'entiers (u_n) et $(v_{j,n})$ (pour $1 \leq j \leq d-1$) qui vérifient notamment d'après (6.13) :

$$u_n \xi'^j - v_{j,n} = (-1)^{\lfloor 3d/2 \rfloor} \big({\xi_2'}^j - {\xi_1'}^j \big) \frac{V_{d-1}(\xi_1', \xi_3', \ldots, \xi_d')}{V_d(\xi_1', \xi_2', \ldots, \xi_d')} \cdot \big(\xi_1' \xi_3' \xi_4' \cdots \xi_d' \big)^n + \mathcal{O}\big(|\xi_1' \xi_2' \xi_4' \cdots \xi_d'|^n \big).$$

De plus, on pose $v_{0,n} = u_n$.

Comme $\xi \in \mathbb{Q}(\xi')$, il existe un polynôme $B(X) = \sum_{j=0}^{d-1} b_j X^j \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $\xi = B(\xi')$. En posant $v_n' = \sum_{j=0}^{d-1} b_j v_{j,n}$, on a alors :

$$\begin{aligned} (6.17) \quad & u_n \xi - v_n' \\ & = (-1)^{\lfloor 3d/2 \rfloor} \big(B(\xi_2') - \xi \big) \frac{V_{d-1}(\xi_1', \xi_3', \ldots, \xi_d')}{V_d(\xi_1', \xi_2', \ldots, \xi_d')} \cdot \big(\xi_1' \xi_3' \xi_4' \cdots \xi_d' \big)^n + \mathcal{O}\big(|\xi_1' \xi_2' \xi_4' \cdots \xi_d'|^n \big) \end{aligned}$$

puisque $B(\xi_1') = B(\xi') = \xi$.

Considérons le morphisme de corps σ_2, qui envoie ξ_1' sur ξ_2'. On a $B(\xi_2') = \sigma_2(B(\xi_1')) = \sigma_2(\xi)$, qui n'est pas égal à ξ (puisque ξ est de degré d). Donc la formule (6.17) donne un équivalent pour $u_n \xi - v_n'$, ce qui permet de conclure la preuve. $\square$

Remarques. — *1) La preuve donne en fait une majoration explicite de $\nu(\xi)$ en fonction de ξ' ; il devrait être possible d'expliciter cette majoration en fonction de l'extension $\mathbb{Q}(\xi)/\mathbb{Q}$, en choisissant convenablement ξ'. Mais il semble peu probable d'arriver ainsi à démontrer que $\nu(\xi) = 0$ (sauf bien sûr dans le cas où ξ est quadratique).*

2) Nous ne savons pas généraliser cette preuve à l'ensemble de tous les nombres algébriques réels. C'est pourquoi nous n'arrivons pas à démontrer par cette méthode que $\nu(\xi) < +\infty$ lorsque ξ est de la forme $(1 - a/b)^s$ et que le dénominateur de s est impair (voir paragraphe 5), par exemple pour $\xi = 2^{1/3}$. Il serait intéressant d'arriver à résoudre ce problème car on pourrait alors espérer démontrer que l'exposant de densité de n'importe quel nombre algébrique réel est fini.

3) Dans [**9**, p. 162, Theorem 8.3.2]*, on trouve la caractérisation suivante : « Un nombre réel ξ est algébrique si, et seulement si, il existe deux suites d'entiers $(r_n)_{n \geq 0}$ et $(s_n)_{n \geq 0}$, $s_n \geq 1$, un réel $\vartheta > 1$ et un réel $\eta > 0$ tels que, pour tout $n \geq 0$, on ait*

$$|s_n \xi - r_n| < \frac{c_1}{s_n^\eta} \quad \text{et} \quad |s_{n+1} - \vartheta s_n| < \frac{c_2}{s_n^\eta}$$

où c_1 et c_2 ne dépendent que de ξ. De plus, le degré de ξ est au plus $1 + 1/\eta$ ».

Les auteurs parlent de suites regularly distributed *: on remarque que leur majoration de $|s_n \xi - r_n|$ est plus faible que celle définissant notre $\alpha_\xi(\mathbf{s})$ tandis que leur majoration de $|s_{n+1} - \vartheta s_n|$ est plus forte que celle définissant notre $\beta(\mathbf{s})$.*

7. Liens avec la topologie et la mesure de Lebesgue

On démontre dans ce paragraphe le résultat suivant qui concerne le comportement topologique (au sens de la propriété de Baire) et presque sûr (au sens de la mesure de Lebesgue). Rappelons tout d'abord qu'une partie d'un espace topologique est dite maigre, respectivement résiduelle, si elle est contenue dans une réunion de fermés d'intérieur vide, respectivement si elle est le complémentaire d'une partie maigre.

Théorème 6. — *(i) Pour presque tout réel ξ, on a $\nu(\xi) = 0$.*

(ii) L'ensemble des réels ξ tel que $\nu(\xi) = 0$ est maigre.

Remarques. — *1) Bien que portant sur le même ensemble, les points (i) et (ii) en donnent deux visions assez opposées.*

2) La démonstration du point (ii) est très simple. En effet, d'après le corollaire 1, le complémentaire de l'ensemble des réels ξ tel que $\nu(\xi) = 0$ contient l'ensemble des réels ξ tels que $\mu(\xi) = +\infty$ c'est-à-dire l'ensemble $\mathscr{L}$ des nombres de Liouville (constitué des réels ξ tels que, pour tout réel $\mu > 0$, il existe un rationnel p/q tel que $|\xi - p/q| < 1/q^{\mu}$). Or il est bien connu que $\mathscr{L}$ est un ensemble résiduel [**44**, p. 6 à p. 9].

3) En fait, on a montré en 2) que l'ensemble des réels ξ tels que $0 \leq \nu(\xi) < +\infty$ est maigre et cela n'indique donc pas si l'ensemble $\mathscr{V} = \{\xi \in \mathbb{R} : 0 < \nu(\xi) < +\infty\}$ est non vide.

4) Il serait particulièrement intéressant de calculer la dimension de Hausdorff des ensembles $\mathscr{V}_\tau = \{\xi \in \mathbb{R} : \nu(\xi) = \tau\}$ pour $\tau > 0$. Rappelons qu'un théorème de Jarník et Besicovitch énonce que l'ensemble $\{\xi \in \mathbb{R} : \mu(\xi) \geq 2\tau\}$ a pour dimension de Hausdorff τ^{-1} pour tout $\tau \geq 1$ (voir [**16**, p. 104, Theorem 5.2]*).*

La partie difficile du théorème 6 est (*i*) et l'étape cruciale dans sa preuve est le lemme suivant (dans lequel on note λ la mesure de Lebesgue).

Lemme 5. — *Soient c, c' deux réels tels que $c' > c > 1$. Alors il existe $c'' > 0$ tel que, pour tous réels $Q > 1$ et $0 < \varepsilon < 1$, on ait*

$$\lambda\Big([0,1] \cap \bigcup_{\substack{Q \leq q \leq cQ \\ 0 \leq p < q}} \Big[\frac{p+\varepsilon}{q}, \frac{p+c'\varepsilon}{q}\Big]\Big) \geq 1 - \frac{1}{c''Q\varepsilon}.$$

Remarque. — *La preuve de ce lemme donne une valeur explicite pour c'' (en fonction de c et c'), que l'on n'a pas essayé d'optimiser.*

Démonstration. — On peut supposer $c < 2$ (dans la cas contraire, la preuve ci-dessous peut d'ailleurs être simplifiée). Le résultat est trivial si $(c'-1)\varepsilon \geq 1$ ou $c''Q\varepsilon \leq 1$, donc on peut supposer $\varepsilon < \frac{1}{c'-1}$ et $Q\varepsilon$ arbitrairement grand. De même, quitte à modifier la valeur de c'', on peut supposer que Q est un entier.

Posons

$$\mathscr{F} = \big\{p/q,\ 0 \leq p \leq q,\ Q \leq q \leq cQ\big\}.$$

Pour $f \in \mathscr{F}$, on note q le plus petit dénominateur de f compris entre Q et cQ, et $f = p/q$; avec cette convention, on pose :

$$\mathscr{I}_f = \Big[\frac{p+\varepsilon}{q}, \frac{p+c'\varepsilon}{q}\Big].$$

On va démontrer l'assertion suivante :

Si $\xi \in]0,1[$ n'appartient à aucun des $\mathscr{I}_f$, $f \in \mathscr{F}$, alors il existe des entiers

$$u < \frac{2c^2}{(c-1)(c'-c)}\frac{1}{\varepsilon}$$

et $v \in \{0,\dots,u\}$, premiers entre eux, tels que $u \geq 1$ et

$$\xi \in \left[\frac{v}{u} - \frac{2}{c-1}\frac{1}{uQ}, \frac{v}{u} + \frac{2}{c-1}\left(1+\frac{c^2}{c'-c}\right)\frac{1}{uQ}\right]. \tag{7.1}$$

Admettons pour l'instant cette assertion. Alors chaque intervalle (7.1) a une mesure de Lebesgue égale à

$$\frac{2}{c-1}\left(2+\frac{c^2}{c'-c}\right)\frac{1}{uQ}.$$

En prenant la réunion sur v, à $u \geq 2$ fixé, on obtient une mesure inférieure ou égale à

$$\frac{2}{c-1}\left(2+\frac{c^2}{c'-c}\right)\frac{1}{Q}.$$

Quand $u = 1$, cette majoration est encore valable à condition de considérer l'intersection avec $[0,1]$ des intervalles (7.1). Par réunion sur les $u \geq 1$, on obtient donc le majorant suivant pour la mesure du complémentaire dans $[0,1]$ de la réunion des $\mathscr{I}_f$:

$$\frac{4c^2}{(c-1)^2(c'-c)}\left(2+\frac{c^2}{c'-c}\right)\frac{1}{Q\varepsilon},$$

ce qui démontre le lemme (puisque la réunion sur laquelle porte le lemme contient celle des $\mathscr{I}_f$).

On est donc ramené à démontrer l'assertion ci-dessus. Soit $\xi \in]0,1[$ qui n'appartient à aucun des $\mathscr{I}_f$, $f \in \mathscr{F}$. Remarquons déjà que pour $u = 1$ les intervalles (7.1) sont

$$\left[-\frac{2}{c-1}\frac{1}{Q}, \frac{2}{c-1}\left(1+\frac{c^2}{c'-c}\right)\frac{1}{Q}\right] \quad \text{et} \quad \left[1-\frac{2}{c-1}\frac{1}{Q}, 1+\frac{2}{c-1}\left(1+\frac{c^2}{c'-c}\right)\frac{1}{Q}\right]$$

donc la conclusion voulue est triviale si

$$\xi \leq \frac{2}{c-1}\left(1+\frac{c^2}{c'-c}\right)\frac{1}{Q} \quad \text{ou} \quad \xi \geq 1-\frac{2}{c-1}\frac{1}{Q}.$$

Dans le cas contraire, on a

$$\xi > \frac{2}{(c-1)Q} \geq \frac{2}{(c'-1)Q} > \frac{c'\varepsilon}{Q}$$

puisque l'on peut supposer $c' < 2$ et $\varepsilon < \frac{1}{c'-1}$. Donc pour $f = 0$ on a $\max \mathscr{I}_f < \xi$; notons f le plus grand élément de $\mathscr{F}$ vérifiant cette propriété. On a $f < 1$ puisque $\xi < 1$, donc le successeur f' de f dans $\mathscr{F}$ existe (c'est le plus petit élément $f' \in \mathscr{F}$ strictement supérieur à f). Par définition de f, on a

$$\max \mathscr{I}_f < \xi < \min \mathscr{I}_{f'} \tag{7.2}$$

puisque $\xi \notin \mathscr{I}_{f'}$. Notons $f = p/q$ et $f' = p'/q'$ avec la même convention que ci-dessus, c'est-à-dire avec q, q' minimaux tels que $Q \leq q, q' \leq cQ$. On a alors

$$\frac{p + c'\varepsilon}{q} < \frac{p' + \varepsilon}{q'}.$$

Comme $c' > c$ et $Q \leq q, q' \leq cQ$, on a

$$\frac{c'}{q} - \frac{1}{q'} = \frac{c'q' - q}{qq'} \geq (c' - c)\frac{Q}{qq'} \geq \frac{c' - c}{c^2}\frac{1}{Q}$$

ce qui donne

$$\frac{c' - c}{c^2}\frac{\varepsilon}{Q} < \frac{p'}{q'} - \frac{p}{q}. \tag{7.3}$$

Notons $\widetilde{\mathscr{F}}$ l'ensemble des fractions irréductibles $\tilde{p}/\tilde{q} \in [0, 1]$ avec $\tilde{q} \leq (c-1)Q$. Comme on suppose $c < 2$, toute fraction de ce type peut s'écrire p/q avec $Q \leq q \leq cQ$, en multipliant $\tilde{p}$ et $\tilde{q}$ par un même entier convenable. On a donc $\widetilde{\mathscr{F}} \subset \mathscr{F}$. Notons $\tilde{p}/\tilde{q}$ le plus grand élément de $\widetilde{\mathscr{F}}$ qui soit inférieur ou égal à f et $\tilde{p}'/\tilde{q}'$ le successeur de $\tilde{p}/\tilde{q}$ dans $\widetilde{\mathscr{F}}$ (qui existe puisque $\tilde{p}/\tilde{q} \leq f < 1$). On a trivialement $\tilde{p}'/\tilde{q}' > f$, et même $\tilde{p}'/\tilde{q}' \geq f'$ par minimalité de f' (puisque $\widetilde{\mathscr{F}} \subset \mathscr{F}$). Finalement, on a :

$$\frac{\tilde{p}}{\tilde{q}} \leq f = \frac{p}{q} < f' = \frac{p'}{q'} \leq \frac{\tilde{p}'}{\tilde{q}'} \tag{7.4}$$

d'où

$$\frac{p'}{q'} - \frac{p}{q} \leq \frac{\tilde{p}'}{\tilde{q}'} - \frac{\tilde{p}}{\tilde{q}} = \frac{1}{\tilde{q}\tilde{q}'}, \tag{7.5}$$

la dernière égalité étant un résultat classique sur les fractions de Farey (voir par exemple [**33**]), puisque les fractions $\tilde{p}/\tilde{q}$ et $\tilde{p}'/\tilde{q}'$ sont irréductibles.

Grâce à cette majoration, l'équation (7.3) donne :

$$\tilde{q}\tilde{q}' < \frac{c^2}{c' - c}\frac{Q}{\varepsilon}. \tag{7.6}$$

Posons $m = \min(\tilde{q}, \tilde{q}')$ et $M = \max(\tilde{q}, \tilde{q}')$. Comme $\frac{\tilde{p}+\tilde{p}'}{\tilde{q}+\tilde{q}'}$ est une fraction comprise au sens strict entre $\tilde{p}/\tilde{q}$ et $\tilde{p}'/\tilde{q}'$, on a classiquement $m + M = \tilde{q} + \tilde{q}' > (c - 1)Q$, d'où

$$M > \frac{c - 1}{2}Q \tag{7.7}$$

ce qui donne en utilisant (7.6)

$$m < \frac{2c^2}{(c - 1)(c' - c)}\frac{1}{\varepsilon}. \tag{7.8}$$

D'autre part, en combinant (7.2) et (7.4) on obtient

$$\frac{\tilde{p}}{\tilde{q}} + \frac{c'\varepsilon}{cQ} \leq \frac{p}{q} + \frac{c'\varepsilon}{q} < \xi < \frac{p'}{q'} + \frac{\varepsilon}{q'} \leq \frac{\tilde{p}'}{\tilde{q}'} + \frac{\varepsilon}{Q}. \tag{7.9}$$

Supposons d'abord que $m = \tilde{q}$. Alors on a

$$0 < \frac{c'\varepsilon}{cQ} < \xi - \frac{\tilde{p}}{\tilde{q}} \le \frac{\tilde{p}'}{\tilde{q}'} - \frac{\tilde{p}}{\tilde{q}} + \frac{\varepsilon}{Q} \le \Big[\frac{2}{c-1} + \frac{2c^2}{(c-1)(c'-c)}\Big]\frac{1}{\tilde{q}Q}$$

compte tenu de (7.5), (7.7) et (7.8). Ceci démontre l'assertion voulue dans ce cas.

Il reste donc à traiter le cas où $m = \tilde{q}'$. On procède de manière analogue, en écrivant

$$-\frac{2}{c-1}\frac{1}{\tilde{q}'Q} \le -\frac{1}{\tilde{q}\tilde{q}'} < \xi - \frac{\tilde{p}'}{\tilde{q}'} < \frac{\varepsilon}{Q} < \frac{2c^2}{(c-1)(c'-c)}\frac{1}{\tilde{q}'Q}.$$

L'assertion est donc démontrée dans tous les cas, ce qui termine la preuve du lemme. □

Démonstration du théorème 6. — D'après le lemme 3, on a $\nu(\xi+1) = \nu(\xi)$ donc il suffit de démontrer que $\nu(\xi) = 0$ pour presque tout $\xi \in [0,1]$. Soient α et β deux réels strictement positifs tels que $\alpha < 1$ et $\alpha\beta > 1$. On va montrer que pour presque tout $\xi \in [0,1]$ il existe une suite croissante $\mathbf{u}$ telle que $\alpha_\xi(\mathbf{u}) \le \alpha$ et $\beta(\mathbf{u}) \le \beta$, ce qui implique le théorème (en faisant tendre $\alpha\beta$ vers 1 à travers un nombre dénombrable de valeurs) compte tenu de la proposition 2.

Notons a, b, c, c' des réels strictement positifs tels que $\alpha_\xi = c'a$ et $\beta = cb$, avec $c, c' > 1$. Quitte à augmenter b, on peut supposer $b > 1$ et $c < \min(b, c')$. Pour $n \ge 1$, posons

$$\mathscr{E}_n = \{\xi \in [0,1],\ \text{il existe } p, q \in \mathbb{Z} \text{ tels que } b^n \le q \le cb^n \text{ et } a^n \le q\xi - p \le c'a^n\}.$$

Le lemme, appliqué avec $Q = b^n$ et $\varepsilon = a^n$, donne une constante c'' (indépendante de n) telle que

$$\lambda(\mathscr{E}_n) \ge 1 - \frac{1}{c''(ab)^n}.$$

Pour $n_0 \ge 1$, posons

$$\begin{aligned}\mathscr{G}_{n_0} = \{\xi \in [0,1],\quad & \text{il existe des suites d'entiers } (u_n)_{n\ge n_0} \text{ et } (v_n)_{n\ge n_0} \text{ telles que,}\\ & \text{pour tout } n \ge n_0, \text{ on ait } b^n \le u_n \le cb^n \text{ et } a^n \le u_n\xi - v_n \le c'a^n\ \}.\end{aligned}$$

Alors on a

$$\mathscr{G}_{n_0} = \bigcap_{n\ge n_0} \mathscr{E}_n$$

donc

$$\lambda([0,1]\setminus \mathscr{G}_{n_0}) \le \sum_{n\ge n_0} \lambda([0,1]\setminus \mathscr{E}_n) \le \sum_{n\ge n_0} \frac{1}{c''(ab)^n}.$$

Comme la somme à droite est le reste d'une série convergente, on voit que la mesure de Lebesgue de $\mathscr{G}_{n_0}$ tend vers 1 quand n_0 tend vers l'infini : l'ensemble $\mathscr{G} = \cup_{n_0\ge 1}\mathscr{G}_{n_0}$ est donc de mesure 1. Or si ξ appartient à $\mathscr{G}$, il appartient à l'un des $\mathscr{G}_{n_0}$ et en choisissant arbitrairement les entiers $u_1 \le \cdots \le u_{n_0-1}$ entre 1 et u_{n_0} on obtient une suite $\mathbf{u} = (u_n)_{n\ge 1}$ telle que, pour $n \ge n_0$, on ait

$$1 \le \frac{b}{c} \le \frac{u_{n+1}}{u_n} \le cb \text{ et } 0 < \frac{u_{n+1}\xi - v_{n+1}}{u_n\xi - v_n} \le c'a.$$

La suite $\mathbf{u}$ est donc croissante, ξ est irrationnel et on a $\alpha_\xi(\mathbf{u}) \le c'a$, $\beta(\mathbf{u}) \le cb$. Ceci termine la preuve du théorème. $\square$

8. Généralisations et perspectives

Nous concluons cet article en indiquant quelques directions de recherches possibles, que nous entendons explorer dans le futur.

L'exposant de densité tel que nous l'avons défini ne concerne que l'approximation des nombres irrationnels par des suites de rationnels dont les dénominateurs ont une croissance au plus géométrique. On peut généraliser cette définition en introduisant un paramètre supplémentaire, une fonction croissante $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{+*}$ servant de *jauge de croissance* des suites d'entiers en jeu : le g-exposant de densité d'un irrationnel ξ, noté $\nu_g(\xi)$, serait par définition la borne inférieure des réels $\log \sqrt{\alpha_{g,\xi}(\mathbf{u})\beta_g(\mathbf{u})}$, prise sur les suites croissantes positives $\mathbf{u} = (u_n)_n$ telles que

$$\alpha_{g,\xi}(\mathbf{u}) = \limsup_{n\to+\infty}\ g(n)\,\frac{|u_{n+1}\xi - v_{n+1}|}{|u_n\xi - v_n|} < \ell \quad \text{et} \quad \beta_g(\mathbf{u}) = \limsup_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{g(n)\,u_n} < +\infty$$

(avec v_n l'entier le plus proche de $u_n\xi$ et $\ell = \lim_n g(n)$, fini ou pas). L'exposant de densité étudié dans cet article correspond au cas d'une jauge avec ℓ fini. Mais, selon la jauge choisie, certains des nombres dont nous n'avons pas pu décider s'ils ont ou non un exposant de densité fini peuvent avoir un g-exposant de densité fini. Par exemple, on a $\nu_g(e) \le -\frac{1}{2}\log(3)$ avec $g(n) = n$: en effet, la suite des réduites $(v_n/u_n)_n$ de e vérifie [(6)]

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{nu_n} = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \limsup_{n\to+\infty}\ n\,\frac{|u_{n+1}e - v_{n+1}|}{|u_ne - v_n|} = \frac{1}{2}.$$

De même, la fonction $g(n) = 2^{n!\cdot n}$ est une jauge de croissance convenable pour le nombre de Liouville $L = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n!}$: on a $\nu_g(L) \le 0$ car la suite $u_n = 2^{n!}$ vérifie

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{2^{n!\cdot n}u_n} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}\ 2^{n!\cdot n}\,\frac{|u_{n+1}L - v_{n+1}|}{|v_nL - u_n|} = 1.$$

Pour une jauge de croissance g donnée, un problème naturel est d'étudier, du point de vue de la topologie et de la mesure de Lebesgue, l'ensemble des réels ayant un g-exposant de densité fini : ceci affinerait la classification des réels au moyen de leurs suites d'approximations diophantiennes débutée ici.

Une approche commune permettant d'unifier ces divers exposants de densité pourrait découler des méthodes d'analyse non standard introduites en approximation diophantienne par Philippon [**45**] et développées ensuite par Delaunay [**22**]. En effet, nous avons attribué la valeur $+\infty$ à l'exposant de densité d'un nombre qui n'admet pas de suites d'approximations régulières en notre sens (ce qui est le cas des nombres de Liouville et, peut-être,

---

(6) Cela peut se démontrer au moyen de formules explicites sous forme de récurrences ou d'intégrales pour u_n et $u_ne - v_n$: voir par exemple [**19**].

du nombre e). Or, comme on l'a vu ci-dessus, ces nombres admettent des suites d'approximations régulières mais telles que $\lim_n u_{n+1}/u_n = +\infty$: il n'est pas déraisonnable d'imaginer attribuer une valeur non-standard (infiniment grande) à une telle limite et, selon la nature de la jauge de croissance de $\mathbf{u}$, utiliser toute la hiérarchie des hyper-réels infiniment grands pour attribuer une valeur à $\beta(\mathbf{u})$ (ou infiniment petits pour la quantité correspondant à $\alpha_\xi(\mathbf{u})$). Une telle extension de notre exposant de densité ν au moyen de ces techniques serait particulièrement élégante et certainement fructueuse. Elle fournirait une porte de sortie agréable pour éviter de se restreindre systématiquement à des suites à croissance géométrique. Cela pourrait être très utile si on voulait généraliser l'exposant de densité au problème de l'approximation par des nombres algébriques. En effet, de nombreux exposants existent pour mesurer la qualité de l'approximation d'un nombre (notamment transcendant) par des nombres algébriques, en fonction du degré et/ou de la hauteur de l'approximation. Certains de ces exposants (voir [**16**]) font apparaître des contraintes d'uniformité, mais aucun d'eux, à notre connaissance, ne fait intervenir la notion de régularité de façon aussi centrale.

Références

[1] W. W. Adams, *Asymptotic diophantine approximations to e*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **55** (1966), 28–31.

[2] K. Alladi et M. Robinson, *Legendre polynomials and irrationality*, J. Reine Angew. Math. **318** (1980), 137–155.

[3] Y. André, *Une introduction aux motifs (motifs purs, motifs mixtes, périodes)*, Panoramas et synthèses n^o 17, SMF, 2004.

[4] R. André-Jeannin, *Irrationalité de la somme des inverses de certaines suites récurrentes*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **308** (1989), n^o 19, 539–541.

[5] R. Apéry, *Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$*, Astérisque **61** (1979), 11–13.

[6] A. Baker, *Rational approximations to $\sqrt[3]{2}$ and other algebraic numbers*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **15** (1964), 375–383.

[7] G. A. Baker et P. Graves-Morris, *Padé approximants*, Second edition, Encyclopedia of Mathematics and its Applications **59**, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[8] M. A. Bennett, *Explicit lower bounds for rational approximation to algebraic numbers*, Proc. London Math. Soc. **75** (1997), 63–78.

[9] M. J. Bertin, A. Decomps-Guilloux, M. Grandet-Hugot, M. Pathiaux-Delefosse et J. P. Schreiber, *Pisot and Salem numbers*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1992.

[10] F. Beukers, *Padé approximations in number theory*, Padé approximation and its applications, Amsterdam 1980 (Amsterdam, 1980), pp. 90–99, Lecture Notes in Math. **888**, Springer, Berlin-New York, 1981.

[11] F. Beukers, *Irrationality proofs using modular forms*, Journées arithmétiques de Besançon (1985). Astérisque **147-148**, (1987), 271–283, 345.

[12] F. Beukers, *Another congruence for the Apéry numbers*, J. Number Theory **25**.2 (1987), 201–210.

[13] F. Beukers, *Consequences of Apéry's work on irrationality*, Rencontres Arithmétiques de Caen « $\zeta(3)$ irrationnel : les retombées », 1995.

[14] F. Beukers, *A rational approach to* π, Nieuw Arch. Wiskd. (5) 1 (2000), no. 4, 372–379.

[15] S. Bruiltet, *D'une mesure d'approximation simultanée à une mesure d'irrationalité : le cas de* $\Gamma(1/4)$ *et* $\Gamma(1/3)$, Acta Arith. **104**.3 (2002), 243–281.

[16] Y. Bugeaud, *Approximations by algebraic numbers*, Cambridge Tracts in Mathematics **160**, Cambridge University Press (2004).

[17] P. Bundschuh, *Irrationalitätsmaße für* e^a, $a \neq 0$ *rational oder Liouville-Zahl*, Math. Ann. **192** (1971), 229–242.

[18] H. Cohen, *Accélération de la convergence de certaines récurrences linéaires*, Séminaire de théorie des nombres de Grenoble, Année 1980-1981, I.1–I.47.

[19] H. Cohn, *A short proof of the simple continued fraction expansion of* e, American Mathematical Monthly **113** (2006), 57–62.

[20] E. T. Copson, *Asymptotic expansions*, Cambridge University Press (1967).

[21] C. S. Davis, *Rational approximations to* e, J. Aust. Math. Soc. **25** (1978), 497–502.

[22] S. Delaunay, *Approximation Diophantienne et Distances ultramétriques non standard*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) **14**.4 (2005), 629–661.

[23] J. Dieudonné, *Calcul infinitésimal*, Collection Méthodes, Hermann (1980).

[24] A. K. Dubitskas, *Approximation of* $\pi/\sqrt{3}$ *by rational fractions* (en russe), Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. 1987, no. 6, 73–76. Traduction en anglais dans Moscow Univ. Math. Bull. **42** (1987), no. 3, 67–69.

[25] Shalosh B. Ekhad, `http://www.math.rutgers.edu/~zeilberg/tokhniot/EKHAD`.

[26] N. I. Fel'dman et Yu. V. Nesterenko, *Transcendental numbers*, Number theory, IV, 1–345, A.N. Parshin et I.R. Shafarevich (Eds.), Encyclopaedia Math. Sci. 44, Springer, Berlin, 1998.

[27] S. Fischler, *Irrationalité de valeurs de zêta (d'après Apéry, Rivoal, ...)*, Séminaire Bourbaki 2002-2003, exposé no. 910, Astérisque **294** (2004), 27–62.

[28] S. Fischler et T. Rivoal, *Approximants de Padé et séries hypergéométriques équilibrées*, J. Math. Pures Appl. **82**.10 (2003), 1369–1394.

[29] F. R. Gantmacher, *Théorie des matrices, Tome 1 : Théorie générale*, traduit du russe par C. Sarthou, Collection Universitaire de Mathématiques n° 18, Dunod, Paris 1966. Réédition J. Gabay 1990.

[30] A. O. Gel'fond, *Sur les nombres transcendants*, C. R. A. S. Paris **189** (1929), 1224–1226.

[31] A. O. Gel'fond, *Calcul des différences finies*, traduit du russe par G. Rideau, Collection Universitaire de Mathématiques n° 12, Dunod, Paris 1963.

[32] L. A. Gutnik, *Irrationality of some quantities that contain* $\zeta(3)$ (en russe), Acta Arith. **42**.3 (1983), 255–264.

[33] G. H. Hardy et E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford Science Publications, Fifth Edition, 1979.

[34] M. Hata, *On the linear independence of the values of polylogarithmic functions*, J. Math. Pures Appl. (9) **69**.2 (1990), 133–173.

[35] M. Hata, *Legendre type polynomials and irrationality measures*, J. Reine Angew. Math. **407** (1990), 99–125.

[36] M. Hata, *Rational approximations to π and some other numbers*, Acta Arith. **63**.3 (1993), 335–349.

[37] A. Ya. Khintchine, *Continued fractions*, Dover Publications, 1997.

[38] M. Kontsevich et D. Zagier, *Periods*, dans « Mathematics unlimited–2001 and beyond », 771–808, Springer, Berlin, 2001.

[39] C. Krattenthaler et T. Rivoal, *Hypergéométrie et fonction zêta de Riemann*, à paraître aux Memoirs of the AMS.

[40] P. Lévy, *Sur le développement en fraction continue d'un nombre choisi au hasard*, Compositio Math. **3** (1936), 286–303.

[41] R. J. McIntosh, *An asymptotic formula for binomial sums*, J. Number Theory **58**.1 (1996), 158–172.

[42] Yu. V. Nesterenko, *Modular functions and transcendence questions*, Mat. Sb. **187**.9 (1996), 65–96 ; traduction en anglais dans Sb. Math. **187**.9 (1996), 1319–1348.

[43] Yu. V. Nesterenko, *Some remarks on* $\zeta(3)$ (en russe), Mat. Zametki **59**.6 (1996), 865–880, 960 ; traduction en anglais dans Math. Notes **59** (1996), no. 5-6, 625–636.

[44] J. C. Oxtoby, *Measure and category. A survey of the analogies between topological and measure spaces*, Second edition, Graduate Texts in Mathematics 2, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1980.

[45] P. Philippon, *Classification de Mahler et distances locales*, Bull. Austral. Math. Soc. **49**.2 (1994), 219–238.

[46] E. Reyssat, *Mesures de transcendance pour les logarithmes de nombres rationnels*, dans « Approximations diophantiennes et nombres transcendants », Luminy, 1982, Progress in Mathematics, Birkhäuser (1983), 235–245,.

[47] G. Rhin, *Approximants de Padé et mesures effectives d'irrationalité*, Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1985–86, 155–164, Progr. Math., **71**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1987.

[48] G. Rhin et C. Viola, *On a permutation group related to* $\zeta(2)$, Acta Arith. **77** (1996), no. 1, 23–56.

[49] G. Rhin et C. Viola, *The group structure for* $\zeta(3)$, Acta Arith. **97**.3 (2001), 269–293.

[50] T. Rivoal, *Séries hypergéométriques et irrationalité des valeurs de la fonction zêta de Riemann*, J. Théorie des Nombres de Bordeaux **15**.1 (2003), 351–365.

[51] K. F. Roth, *Rational approximations to algebraic numbers*, Mathematika **2** (1955), 1–20 ; corrigendum 168.

[52] E. A. Rukhadze, *A lower bound for the approximation of* $\ln 2$ *by rational numbers* (en russe) Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. 1987, no. 6, 25–29, 97.

[53] P. Samuel, *Théorie algébrique des nombres*, Collection Méthodes, Hermann (1967).

[54] J. O. Shallit, *Simple continued fractions for some irrational numbers*, J. Number Theory **11** (1979), 209–217.

[55] L. J. Slater, *Generalized hypergeometric functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1966.

[56] J. Stienstra et F. Beukers, *On the Picard-Fuchs equation and the formal Brauer group of certain elliptic $K3$-surfaces*, Math. Ann. **271** (1985), no. 2, 269–304.

[57] P. F. Stiller, *Classical automorphic forms and hypergeometric functions*, J. Number Theory **28**.2 (1988), 219–232.

[58] M. Waldschmidt, *Open Diophantine Problems*, Moscow Math. Journal **4**.1 (2004), 245–305.

[59] M. Waldschmidt, *Transcendance de périodes : état des connaissances*, Advances in Mathematics, Vol. 1 (2006), n$^{\text{o}}$ 2.

[60] W. Zudilin, *Well-poised hypergeometric service for Diophantine problems of zeta values*, J. Théor. Nombres Bordeaux **15**.2 (2003), 593–626.

S. Fischler, Équipe d'Arithmétique et de Géométrie Algébrique, Université Paris-Sud, Bâtiment 425, 91405 Orsay Cedex, France.

T. Rivoal, Institut Fourier, CNRS UMR 5582, Université Grenoble 1, 100 rue des Maths, BP 74, 38402 Saint-Martin d'Hères cedex, France.

---

20 septembre 2006