POLYNÔMES DE TYPE LEGENDRE ET APPROXIMATIONS DE LA CONSTANTE D'EULER

T. RIVOAL

Résumé. We propose a simple method to accelerate significatively the convergence of $\mathbf{S}_n = \sum_{j=1}^{n-1} 1/j - \log(n)$ towards Euler's constant γ : we construct linear combinations of consecutive values of $\mathbf{S}_n$, to which are assigned certain binomial weights, obtained thanks to a classical integral representation of $\gamma - \mathbf{S}_n$ and certain special polynomials, of Legendre type. As a special case, we recover an approximation of γ due to Elsner, obtained by a different method. Our approach also applies to the number $\log(4/\pi)$ which, as Sondow has noted, is in a sense an alternating analogue of γ ; this enables us to produce an apparently new expression of $\pi/4$ as an infinite product, which can be viewed as an analogue of Vacca's series for γ. Finally, although this method cannot prove the irrationality of γ, it is similar to the one used by Alladi and Robinson to prove the irrationality of $\log(2)$ by means of Legendre polynomials.

1. Introduction

La constante d'Euler γ est définie comme la limite, lorsque $n \to +\infty$, de la suite

$$\mathbf{S}_n = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j} - \log(n) = \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{1}{j} - \log\left(\frac{j+1}{j}\right)\right)$$

La vitesse de convergence est très lente, en $\mathcal{O}(1/n)$, comme on l'on voit sur le développement asymptotique

$$\gamma = \mathbf{S}_n + \frac{1}{2n} + \sum_{j=1}^{k} \frac{B_{2j}}{2j} \frac{1}{n^{2j}} + R(n,k),$$

où les B_{2j} sont les nombres de Bernoulli et $R(n,k) = \mathcal{O}\big((k/\pi e n)^{2k}\sqrt{k}/n\big)$ (la constante dans le $\mathcal{O}$ est indépendante de k et n : voir [6]). À k fixé, on ne gagne pas énormément mais en revanche le choix $n = k^2$ accélère le calcul de γ en fournissant une suite qui converge à la vitesse $1/k^{2k}$ mais au prix du calcul des nombres de Bernoulli, qui ne sont pas entiers et dont la croissance est essentiellement factorielle.

Sans même parler du problème toujours ouvert de l'éventuelle irrationalité de γ, on peut plus simplement se demander comment, à partir de la somme $\mathbf{S}_n$, calculer rapidement γ en utilisant des quantités combinatoires moins complexes que les nombres de Bernoulli, en particulier des entiers. Il existe de nombreuses façons de résoudre ce problème (dont celle de Sondow [8] évoquée plus bas). Une méthode particulièrement intéressante a été donnée par Elsner [5] : *Pour tous entiers $n, \tau \geq 1$, on a* ([1])

$$\left|\gamma - \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k} \binom{n}{k} \binom{k+n+\tau-1}{k+\tau-1} \mathbf{S}_{k+\tau}\right| \leq \frac{1}{2n\tau\binom{n+\tau}{n}}. \tag{1.1}$$

En particulier, lorsque $\tau = n$, la vitesse de convergence est en $n^{-3/2}4^{-n}$ et les coefficients des $\mathbf{S}_{k+\tau}$ sont majorés par 16^n.

La méthode d'Elsner consiste donc à accélérer la convergence de la suite $\mathbf{S}_n$ en la remplaçant par des sommes pondérées de $\mathbf{S}_\tau, \mathbf{S}_{1+\tau}, \dots, \mathbf{S}_{n+\tau}$. C'est un procédé naturel souvent mis en oeuvre pour obtenir de bonnes approximations de séries lentement convergentes : par exemple, c'est en affectant certains poids « binomiaux » aux sommes partielles de $\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^3$ qu'Apéry [2] a originellement montré l'irrationalité de ce nombre. La difficulté réside dans un bon choix des coefficients de pondération et le but de cette note est de donner une méthode intégrale facilitant ce choix.

Par ailleurs, Sondow [9] a remarqué que $\log(4/\pi)$ peut être vu comme un analogue « alterné » de γ car limite de la suite

$$\widehat{\mathbf{S}}_n = \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j+1} \left(\frac{1}{j} - \log\left(\frac{j+1}{j}\right)\right).$$

La convergence de $\widehat{\mathbf{S}}_n$ vers $\log(4/\pi)$ est aussi lente que celle de $\mathbf{S}_n$ vers γ et la méthode décrite ici s'applique aussi à ce nombre : il est bien connu que ces deux nombres sont liées à la fonction zêta de Riemann $\zeta(s)$ en $s = 0$ et $s = 1$ respectivement (voir la démonstration du Lemme 1 pour l'utilisation de ce fait).

Elsner démontre un résultat plus général, s'appliquant probablement à d'autres nombres que γ, bien qu'il n'en fasse pas mention. Dans le cas particulier de γ, il utilise l'identité suivante, due à Ser [7] : pour tout $n \geq 1$,

$$\gamma - \mathbf{S}_n = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t_m}{\binom{m+n}{m}} \quad \text{avec} \quad t_m = \frac{1}{(m+1)!} \int_0^1 x(1-x)\cdots(m-x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.2}$$

Ici, nous utiliserons les expressions alternatives

$$\gamma - \mathbf{S}_{n+1} = \int_0^1 x^n \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{\log(x)}\right) \mathrm{d}x \tag{1.3}$$

et

$$(-1)^n \big(\log(4/\pi) - \widehat{\mathbf{S}}_{n+1}\big) = \int_0^1 x^n \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1-x}{(1+x)\log(x)}\right) \mathrm{d}x \tag{1.4}$$

dont nous donnons les démonstrations au Lemme 1 ; l'intégrale pour t_m apparaîtra cependant en cours de route. L'equation (1.3) remonte au moins à Catalan [4]. Le cas $n = 0$ de (1.4) est dû à Sondow [9, Equation (3)], tandis que le cas général semble nouveau.

[1] Bien sûr, la suite $\mathbf{S}_n$ est définie à l'aide des rationnels $\sum_{j=1}^{n-1} 1/j$ mais le but affiché d'Elsner est de ne pas en faire intervenir d'autres.

À tout polynôme $\mathbf{V}(X) = \sum_{j=0}^{d} V_j X^j \in \mathbf{Z}[X]$, on associe le polynôme

$$\mathbf{U}(X) = \frac{1}{n!}\big(X^{m+n}(1-X)^n\mathbf{V}(X)\big)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n+d} U_k X^{m+k} \in \mathbf{Z}[X]$$

où $m, n \geq 0$ sont des entiers et

$$U_k = \sum_{\substack{i+j=k\\ i\leq n, j\leq d}} (-1)^i \binom{n}{i}\binom{m+n+k}{n} V_j.$$

Lorsque $\mathbf{V} \equiv 1$ et $m = 0$, on obtient la famille classique des polynômes de Legendre (orthogonaux sur $[0,1]$ pour la mesure de Lebesgue), ce qui justifie l'appellation *polynômes de type Legendre* dans le cas général. Définissons, pour simplifier,

$$\boldsymbol{\Omega}(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{\log(x)} \quad \text{et} \quad \widehat{\boldsymbol{\Omega}}(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1-x}{(1+x)\log(x)}$$

qui sont des fonctions continues sur $[0,1]$ et C^∞ sur $]0,1[$.

Théorème 1. *Pour tous entiers m et n tels que $m \geq n \geq 1$, on a*

$$\left|\mathbf{U}(1)\gamma - \sum_{k=0}^{n+d} U_k\, \mathbf{S}_{k+m+1}\right| = \left|\int_0^1 x^m(1-x)^n\mathbf{V}(x)\,\frac{x^n\boldsymbol{\Omega}^{(n)}(x)}{n!}\,\mathrm{d}x\right| \leq \frac{||\mathbf{V}||_\infty}{2n}\frac{m!\,n!}{(m+n+1)!},$$

et

$$\left|\mathbf{U}(-1)\log\left(\frac{4}{\pi}\right) - \sum_{k=0}^{n+d}(-1)^k U_k\, \widehat{\mathbf{S}}_{k+m+1}\right|$$
$$= \left|\int_0^1 x^m(1-x)^n\mathbf{V}(x)\,\frac{x^n\widehat{\boldsymbol{\Omega}}^{(n)}(x)}{n!}\,\mathrm{d}x\right| \leq 2n\,||\mathbf{V}||_\infty\frac{m!\,n!}{(m+n+1)!},$$

où la norme L^∞ de $\mathbf{V}$ est prise sur l'intervalle $[0,1]$.

Remarques. *a) Pour le calcul effectif de γ, resp. $\log(4/\pi)$, cette méthode n'a évidemment d'intérêt que si $\mathbf{U}(1) \neq 0$, resp $\mathbf{U}(-1) \neq 0$.*

b) Si $\mathbf{V} \equiv 1$, alors le polynôme associé $\mathbf{U}$ vérifie $\mathbf{U}(1) = (-1)^n$, ce qui résulte de l'identité $\mathbf{U}(1-X) = (-1)^n\big(X^n(1-X)^{m+n}\big)^{(n)}/n!$.

c) La majoration par $||\mathbf{V}||_\infty$ est assez grossière mais a le mérite de la simplicité. On peut parfois produire une meilleure borne, comme dans le second exemple ci-dessous.

d) Sondow [8] montre que, pour tout entier $n \geq 0$, on a

$$-\int_0^1\int_0^1 \frac{\big(x(1-x)y(1-y)\big)^n}{(1-xy)\log(xy)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \binom{2n}{n}\gamma - \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}^2\sum_{k=1}^{n+j}\frac{1}{k} + L_n$$

où $L_n \in \mathbf{Q}\log(n+1) + \mathbf{Q}\log(n+2) + \cdots + \mathbf{Q}\log(2n)$ est une combinaison linéaire explicite. Il en déduit des critères conditionnels pour l'irrationalité de γ.

Lorsque $\mathbf{U}(X) = (X^{n+\tau-1}(1-X)^n)^{(n)}/n!$, le Théorème 1 redonne exactement l'équation (1.1) d'Elsner. L'exemple du polynôme

$$\mathbf{U}(X) = \frac{1}{n!}\big(X^{2n}(1-X^2)^n\big)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{2n+2k}{n}X^{2k+n}$$

est également intéressant car $\mathbf{U}(1) = (-2)^n$ et $\mathbf{U}(-1) = 2^n$, ce qui fournit une méthode de calcul simultané ([2]) de γ et $\log(4/\pi)$:

$$\left|\gamma - \frac{1}{(-2)^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{2n+2k}{n}\mathbf{S}_{2k+n+1}\right| = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n\,27^{n/2}}\Big),$$

$$\left|\log(4/\pi) - \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{2n+2k}{n}\widehat{\mathbf{S}}_{2k+n+1}\right| = \mathcal{O}\Big(\frac{n}{27^{n/2}}\Big).$$

Enfin, on conclut cet article par la démonstration d'une identité pour $\log(4/\pi)$ basée sur (1.4) et qui peut être vue comme un analogue de la série de Vacca pour γ (voir le **Théorème 2** au paragraphe 3 et les commentaires le précédant). Cette identité se traduit par une expression de π qui semble nouvelle :

$$\frac{\pi}{4} = \prod_{k=2}^{\infty}\Big(1+\frac{1}{k+1}\Big)^{2\rho(k)[1-\log_2(k)]} \tag{1.5}$$

où $\rho : \mathbf{N} \to \{-1,0,1\}$ est 4-périodique, avec $\rho(0) = 1$, $\rho(1) = -1$ et $\rho(2) = \rho(3) = 0$.

2. Démonstration du Théorème 1

On vérifie que, pour tout $x \in\,]0,1[$, on a

$$\mathbf{\Omega}(x) = \int_0^1 \frac{1-x^t}{1-x}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \widehat{\mathbf{\Omega}}(x) = \int_0^1 \frac{1-x^t}{1+x}\,\mathrm{d}t.$$

La démonstration du théorème repose sur deux lemmes.

Lemme 1. *Pour tout entier $n \geq 0$, on a*

$$\gamma - \mathbf{S}_{n+1} = \int_0^1 x^n\,\mathbf{\Omega}(x)\,\mathrm{d}x \quad \textit{et} \quad (-1)^n\big(\log(4/\pi) - \widehat{\mathbf{S}}_{n+1}\big) = \int_0^1 x^n\,\widehat{\mathbf{\Omega}}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration. On indique d'abord comment démontrer le cas $n = 0$ (avec $\mathbf{S}_1 = \widehat{\mathbf{S}}_1 = 0$), sans rentrer dans les détails. Concernant γ, par le changement de variable $x = \exp(-t)$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mathbf{\Omega}(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^\infty \Big(\frac{1}{e^t-1} - \frac{e^{-t}}{t}\Big)\mathrm{d}t = \lim_{s\to1}\int_0^\infty \Big(\frac{t^{s-1}}{e^t-1} - t^{s-2}e^{-t}\Big)\mathrm{d}t \\ &= \lim_{s\to1}\big(\Gamma(s)\zeta(s) - \Gamma(s-1)\big) = \lim_{s\to1}\Gamma(s)\Big(\zeta(s) - \frac{1}{s-1}\Big) = \gamma,\end{aligned}$$

[2]On obtient une majoration asymptotiquement meilleure que celle annoncée par le Théorème 1 en utilisant l'identité $2\int_0^1 x^n(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x = \Gamma(n/2+1)\Gamma(n+1)/\Gamma(3n/2+1)$ dans la démonstration.

en utilisant les propriétés des fonctions zêta de Riemann et Gamma d'Euler (voir [11]).

Pour $\log(4/\pi)$, on utilise en plus que $\zeta(0) = -1/2$ et $\zeta'(0) = -\log(\sqrt{2\pi})$: par le changement de variable $x = \exp(-t)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \widehat{\mathbf{\Omega}}(x)\,\mathrm{d}x - \log(2) &= \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{2t^{-1}}{e^t+1}\right)\mathrm{d}t = \lim_{s\to 0}\int_0^\infty \left(t^{s-1}e^{-t} - \frac{2t^{s-1}}{e^t+1}\right)\mathrm{d}t \\
&= \lim_{s\to 0}\big(\Gamma(s) - 2\Gamma(s)(1-2^{1-s})\zeta(s)\big) \\
&= \lim_{s\to 0}\left(\Gamma(s+1)\,\frac{1-2(1-2^{1-s})\zeta(s)}{s}\right) \\
&= 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\big((2^{1-s}-1)\zeta(s)\big)\Big|_{s=0} = \log(2/\pi).
\end{aligned}$$

Supposons maintenant $n \geq 1$. En remarquant que $\dfrac{x^n-1}{\log(x)} = n\displaystyle\int_0^1 x^{nt}\,\mathrm{d}t$ pour $0 < x < 1$ et donc que

$$\int_0^1 \frac{x^n-1}{\log(x)}\,\mathrm{d}x = n\int_0^1\left(\int_0^1 x^{nt}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t = n\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{nt+1} = \log(n+1), \tag{2.1}$$

on peut alors écrire

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^n\,\mathbf{\Omega}(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \mathbf{\Omega}(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{x^n-1}{x-1}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{x^n-1}{\log(x)}\,\mathrm{d}x \\
&= \gamma - \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} + \int_0^1 \frac{x^n-1}{\log(x)}\,\mathrm{d}x = \gamma - \mathbf{S}_{n+1}.
\end{aligned}$$

Enfin, toujours lorsque $n \geq 1$, on a également

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^n\,\widehat{\mathbf{\Omega}}(x)\,\mathrm{d}x &= (-1)^n\int_0^1 \widehat{\mathbf{\Omega}}(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{x^n-(-1)^n}{x+1}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{x^n-(-1)^n}{x+1}\,\frac{1-x}{\log(x)}\,\mathrm{d}x \\
&= (-1)^n\left(\log(4/\pi) + \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^j}{j} + \sum_{j=1}^n (-1)^j\int_0^1 x^{j-1}\frac{1-x}{\log(x)}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= (-1)^n\big(\log(4/\pi) - \widehat{\mathbf{S}}_{n+1}\big),
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé (2.1) sous la forme

$$\int_0^1 x^{j-1}\,\frac{1-x}{\log(x)}\,\mathrm{d}x = \log(j) - \log(j+1). \tag{2.2}$$

La preuve du lemme est complète. $\square$

Lemme 2. *Pour tout entier $n \geq 1$ et tout $x \in]0,1[$, on a*

$$\left|\frac{x^n}{n!}\,\mathbf{\Omega}^{(n)}(x)\right| \leq \frac{1}{2n} \quad \text{et} \quad \left|\frac{x^n}{n!}\,\widehat{\mathbf{\Omega}}^{(n)}(x)\right| \leq 2n.$$

Démonstration. Pour tout $x \in]0,1[$, on vérifie que

$$\frac{1}{n!}\,\mathbf{\Omega}^{(n)}(x) = \int_0^1 \frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\frac{1-x^t}{1-x}\right)\mathrm{d}t.$$

En développant par la formule de Newton selon les puissances de $1-x$, on a

$$\frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\frac{1-x^t}{1-x}\right) = (-1)^n\sum_{k=n}^{\infty}\frac{t(1-t)\cdots(k-t)}{(k+1)!}\binom{k}{n}(1-x)^{k-n}.$$

Or pour tout $t \in [0,1]$, on a $0 \le \dfrac{t(1-t)\cdots(k-t)}{(k+1)!} \le \dfrac{t}{k+1}$. Donc pour tout $x \in]0,1[$, on a

$$\begin{aligned} 0 \le \frac{(-1)^n}{n!}\,\widehat{\Omega}^{(n)}(x) \;&\le\; \sum_{k=n}^{\infty}\binom{k}{n}\frac{(1-x)^{k-n}}{k+1}\int_0^1 t\,\mathrm{d}t \\ &\le \frac{1}{2n}\sum_{k=n-1}^{\infty}\binom{k}{n-1}(1-x)^{k-n+1} = \frac{1}{2nx^n} \end{aligned}$$

et le lemme est démontré pour $\mathbf{\Omega}$.

Le cas de $\widehat{\mathbf{\Omega}}$ est similaire puisque pour tout $x \in]0,1[$, on a

$$\frac{x^n}{n!}\,\widehat{\mathbf{\Omega}}^{(n)}(x) = x^n\int_0^1 \frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\frac{1-x^t}{1+x}\right)\mathrm{d}t = \frac{(-1)^n x^n}{(1+x)^{n+1}} - x^n\int_0^1\frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\frac{x^t}{1+x}\right)\mathrm{d}t. \tag{2.3}$$

En appliquant la formule de Leibniz, on trouve

$$\frac{x^n}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\frac{x^t}{1+x}\right) = \sum_{j=0}^{n}\frac{t(1-t)\cdots(j+1-t)}{j!}\,\frac{x^{n-j}}{(1+x)^{j+1}},$$

qui est une fonction positive pour $t \in [0,1]$ et $x \in]0,1[$. On obtient alors que, pour $x \in]0,1[$,

$$0 \le x^n\int_0^1\frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\frac{x^t}{1+x}\right)\mathrm{d}t \le \sum_{j=0}^{n}(j+1)\frac{x^{n-j}}{(1+x)^{j+1}}\int_0^1 t\,\mathrm{d}t \le \frac{n+1}{2}.$$

En reportant dans (2.3) et en majorant $|x^n(1+x)^{-n}|$ par 1, le résultat en découle. □

Nous sommes maintenant en position de prouver le Théorème 1. Soit $A(X) = \sum_{j=0}^{d} a_j X^j$ un polynôme quelconque de $\mathbf{C}[X]$; par le Lemme 1, on a

$$\int_0^1 A(x)\,\mathbf{\Omega}(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{d} a_j\int_0^1 x^j\,\mathbf{\Omega}(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{d} a_j(\gamma - \mathbf{S}_{j+1}) = A(1)\gamma - \sum_{j=0}^{d} a_j\mathbf{S}_{j+1} \tag{2.4}$$

et, de même,

$$\int_0^1 A(x)\,\widehat{\mathbf{\Omega}}(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{j=0}^d a_j \int_0^1 x^j\,\widehat{\mathbf{\Omega}}(x)\,\mathrm{d}x \tag{2.5}$$

$$= \sum_{j=0}^d (-1)^j a_j(\log(4/\pi) - \widehat{\mathbf{S}}_{j+1}) = A(-1)\log(4/\pi) - \sum_{j=0}^d (-1)^j a_j \widehat{\mathbf{S}}_{j+1}.$$

Avec le choix $A = \mathbf{U}$, on peut transformer les intégrales (2.4) et (2.5) pour obtenir la majoration attendue. En effet, comme $\mathbf{U}$ a un ordre en 0 au moins égal à $m \geq n$, la majoration fournie par le Lemme 2 nous permet d'intégrer n fois par parties pour obtenir l'égalité

$$\int_0^1 \mathbf{U}(x)\,\mathbf{\Omega}(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n!}\int_0^1 \big(x^{m+n}(1-x)^n\mathbf{V}(x)\big)^{(n-1)}\,\mathbf{\Omega}^{(1)}(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \cdots = (-1)^n \int_0^1 x^m(1-x)^n\mathbf{V}(x)\,\frac{x^n}{n!}\,\mathbf{\Omega}^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x.$$

D'où, finalement,

$$\left|\int_0^1 \mathbf{U}(x)\,\mathbf{\Omega}(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \frac{||\mathbf{V}||_\infty}{2n}\int_0^1 x^m(1-x)^n\,\mathrm{d}x = \frac{||\mathbf{V}||_\infty}{2n}\frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}.$$

La démonstration est totalement similaire dans le cas de $\log(4/\pi)$.

3. Représentations alternatives de γ et $\log(4/\pi)$

La présence des logarithmes d'entiers étant un réel problème, il est important d'obtenir des expressions alternatives pour γ et $\log(4/\pi)$ ne faisant intervenir si possible que des rationnels. Ceci peut se faire à partir des intégrales (1.3) et (1.4) : on obtient ainsi un certain nombre d'expressions déjà connues pour γ, dont les deux suivantes :

$$\gamma = \int_0^1 \frac{\sum_{n=1}^\infty x^{2^n}}{x(1+x)}\,\mathrm{d}x \qquad \text{Catalan [4]}$$

$$\gamma = \sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{[\log_2(n)]}{n} = \sum_{n=0}^\infty n \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{(-1)^k}{k} \qquad \text{Vacca [12],}$$

qui sont essentiellement identiques (on déduit aisément l'une de l'autre). La deuxième série de Vacca est très attrayante car son terme converge en $\mathcal{O}(n2^{-n})$ mais malheureusement ses troncations fournissent des rationnels dont le dénominateur est beaucoup trop gros pour en déduire l'irrationalité de γ. ([3]) En adaptant la démonstration classique de l'identité de Catalan ci-dessus, nous allons obtenir des identités pour $\log(4/\pi)$ similaire à celles de Catalan

[3]Il pourrait être intéressant de tenter d'accélérer davantage la série de Vacca en calculant les approximants de Padé à l'origine de la série entière $\sum_{n=0}^\infty n\,z^n \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1}(-1)^k/k$.

et Vacca, en particulier une série convergeant en $\mathcal{O}(2^{-n})$ mais qui n'est malheureusement pas à termes rationnels.

Théorème 2. *On a les égalités suivantes :*

$$\log(4/\pi) = \int_0^1 \frac{x-1}{\log(x)} \frac{\sum_{n=2}^{\infty} x^{2^n}}{x(1+x)(1+x^2)}\,\mathrm{d}x = 2\sum_{n=0}^{\infty} n \sum_{k=2^{n+1}}^{2^{n+2}-1} \rho(k)\log\left(1+\frac{1}{k+1}\right),$$

où $\rho : \mathbf{N} \to \{-1,0,1\}$ *est 4-périodique, avec* $\rho(0)=1$, $\rho(1)=-1$ *et* $\rho(2)=\rho(3)=0$.

Démonstration. Notons $\overline{\mathbf{S}}_n = \sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j \log((j+1)/j)$, qui tend vers $\log(2/\pi)$. En retranchant (4.1) (voir paragraphe suivant) de (1.4), puis par le changement de variable $x \mapsto x^2$, on obtient

$$\log(2/\pi) - \overline{\mathbf{S}}_{2^n} = -\int_0^1 x^{2^n-1}\frac{1-x}{(1+x)\log(x)}\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 x^{2^{n+1}-1}\frac{1-x^2}{(1+x^2)\log(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Donc

$$\overline{\mathbf{S}}_{2^{n+1}} - \overline{\mathbf{S}}_{2^n} = \int_0^1 x^{2^{n+1}-1}\frac{1-x}{\log(x)}\left(\frac{1}{1+x} - \frac{1+x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{2^{n+1}}\frac{x-1}{\log(x)}\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x)(1+x^2)}.$$

On en déduit que

$$\int_0^1\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{2^{n+1}}\right)\frac{x-1}{\log(x)}\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x)(1+x^2)} = \lim_{n\to\infty}\overline{\mathbf{S}}_{2^{n+1}} - \overline{\mathbf{S}}_2 = \log(2/\pi)+\log(2) = \log(4/\pi),$$

(l'echange série-intégrale est licite par positivité) qui est exactement l'identité attendue.

Pour obtenir l'expression sous forme de série, on remarque que, pour tout $x \in [0,1[$, on a $x^4 + x^8 + x^{16} + x^{32} + \cdots = (x^4 - x^8) + 2(x^8 - x^{16}) + 3(x^{16} - x^{32}) + \cdots$, soit, plus formellement,

$$\sum_{n=2}^{\infty} x^{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} n\big(x^{2^{n+1}} - x^{2^{n+2}}\big).$$

De plus, comme

$$\frac{1}{x(1+x)(1+x^2)} = 2\sum_{k=0}^{\infty}\rho(k)x^k$$

et

$$\frac{x-1}{\log(x)} = \int_0^1 x^t\,\mathrm{d}t,$$

on a donc

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{x-1}{\log(x)} \frac{\sum_{n=2}^{\infty} x^{2^n}}{x(1+x)(1+x^2)}\,\mathrm{d}x \\
&\quad = 2\sum_{n=0}^{\infty} n \sum_{k=0}^{\infty} \rho(k) \int_0^1 \Big(\int_0^1 \Big(x^{2^{n+1}+k+t} - x^{2^{n+2}+k+t} \Big)\,\mathrm{d}x \Big) \mathrm{d}t \\
&\quad = 2\sum_{n=0}^{\infty} n \sum_{k=0}^{\infty} \rho(k) \bigg(\log\Big(1+\frac{1}{2^{n+1}+k+1}\Big) - \log\Big(1+\frac{1}{2^{n+2}+k+1}\Big)\bigg) \\
&\quad = 2\sum_{n=0}^{\infty} n \sum_{k=2^{n+1}}^{2^{n+2}-1} \rho(k) \log\Big(1+\frac{1}{k+1}\Big),
\end{aligned}
$$

en utilisant le fait que $\rho(k) = \rho(k+2^m)$ pour $m \geq 2$. □

On peut réarranger les termes de la série ainsi obtenue pour $\log(4/\pi)$ pour obtenir l'expression alternative

$$
\log(4/\pi) = 2\sum_{k=2}^{\infty} \rho(k)[\log_2(k) - 1] \log\Big(1+\frac{1}{k+1}\Big),
$$

dont découle, en passant à l'exponentielle, le produit infini (1.5) pour π indiqué à la fin de l'introduction. Il est probable que l'on puisse obtenir beaucoup d'autres identités de ce genre en utilisant les techniques de [3] et [10].

4. Conclusion

Les équations (1.3) et (1.4) rappelent évidemment l'équation

$$
(-1)^n \bigg(\log(2) - \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}}{j} \bigg) = \int_0^1 x^n \frac{\mathrm{d}x}{1+x}, \tag{4.1}
$$

utilisée par Alladi et Robinson [1] pour montrer l'irrationalité de $\log(2)$ au moyen des polynômes de Legendre usuels $\mathbf{L}_n(X) = \big(X^n(1-X)^n\big)^{(n)}/n!$:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{L}_n(-1)\log(2) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{n+k}{n} \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^j}{j} \\
&\qquad\qquad = \int_0^1 \mathbf{L}_n(x) \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n}{(1+x)^{n+1}}\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

ce qui donne un intérêt supplémentaire aux approximations de γ et $\log(4/\pi)$ fournies par le Théorème 1.

Les identités intégrales (1.3), (1.4) et (4.1) signifient également que les suites $\gamma - \mathbf{S}_{n+1}$, $(-1)^n\big(\log(4/\pi) - \widehat{\mathbf{S}}_{n+1}\big)$ et $(-1)^n\big(\log(2) - \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}/j\big)$ sont les moments de mesures sur $[0,1]$ (absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue), ce qui est une propriété importante car naturellement liée à des questions d'approximation *via* les polynômes orthogonaux, tels ceux de Legendre, et les approximants de Padé. En particulier, la différence $\gamma - \mathbf{S}_{n+1}$ possède ainsi une signification mathématique intrinsèque, ce qui explique peut-être le fait qu'il en existe autant d'expressions différentes (Catalan, Hermite, Kluyver, Ser, etc) et qu'il soit si difficile d'obtenir des expressions intéressantes de γ qui ne se généralisent pas immédiatement à $\gamma - \mathbf{S}_{n+1}$.

Il est impossible que $\gamma - \sum_{j=1}^{n} 1/j$ puisse être une suite de moments d'une mesure signée sur $[0,1]$ car $\log(n+1)$ n'est pas bornée. Toutefois, on peut remarquer que si l'on remplace $[0,1]$ par $[0,+\infty[$, on dispose alors de l'équation aux moments

$$\int_0^\infty t^n \log(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t = n!\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} - \gamma\right) \quad (n \in \mathbf{N}),$$

qui pourrait peut-être servir à construire des approximations *rationnelles* rapidement convergentes vers γ, bien qu'aucune famille de polynômes pouvant jouer le rôle de celle des polynômes $\mathbf{U}$ de cet article ne s'impose clairement.

Remerciements. Je remercie C. Elsner pour ses commentaires constructifs, ainsi que Marc Prévost pour m'avoir communiqué sa prépublication *A familly of criteria for irrationality of Euler's constant* (où il met en avant un très intéressant lien entre l'approximation de Padé et les critères d'irrationalité de γ de type Sondow [8]).

Bibliographie

[1] K. Alladi et M. L. Robinson, *Legendre polynomials and irrationality*, J. Reine Angew. Math. **318** (1980), 137–155

[2] R. Apéry, *Irrationalité de* $\zeta(2)$ *et* $\zeta(3)$, Astérisque **61** (1979), 11–13.

[3] B. C. Berndt et D. Bowman, *Ramanujan's short unpublished manuscript on integrals and series related to Euler's constant*, in Constructive, experimental, and nonlinear analysis (Limoges, 1999), 19–27, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

[4] E. Catalan, *Sur la constante d'Euler et la fonction de Binet*, J. Liouville (3) I (1875), 209–241.

[5] C. Elsner, *On a sequence transformation with integral coefficients for Euler's constant*, Proc. Amer. Math. Soc. **123**.2 (1995), 1537–1541.

[6] D. E. Knuth, *Euler's constant to* 1271 *places*, Math. Comp. **16** (1962), 275–281.

[7] J. Ser, *Question 5562*, L'intermédiaire des mathématiciens **4** (1925), série 2, 126–127.

[8] J. Sondow, *Criteria for irrationality of Euler's constant*, Proc. Amer. Math. Soc. **131**.11 (2003), 3335–3344.

[9] J. Sondow, *Double integrals for Euler's constant and* $\ln\frac{4}{\pi}$ *and an analog of Hadjicostas's formula*, Amer. Math. Monthly **112**.1 (2005), 61–65.

[10] J. Sondow et W. Zudilin, *Euler's constant, q-logarithms, and formulas of Ramanujan and Gosper*, à paraître au Ramanujan J. (2005).

[11] E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function*, Second edition, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1986.

[12] G. Vacca, *A new series for the Eulerian constant* $\gamma = \cdot 577\ldots$, Quart. J. of Math **41** (1909), 363–364.

Institut Fourier, CNRS UMR 5582 / Université Grenoble 1, 100 rue des Maths, BP 74, 38402 Saint-Martin d'Hères cedex, France
E-mail address: rivoal@ujf-grenoble.fr