Les E-fonctions et G-fonctions de Siegel

Tanguy Rivoal

Institut Fourier, CNRS et Université Grenoble Alpes

Journées X-UPS *Périodes et transcendance*

École polytechnique, les 15 et 16 avril 2019

Le programme

Dans mes deux exposés, il sera question en particulier des nombres

$$\sqrt{2}, \quad e, \quad \ln(2), \quad \pi, \quad e^{i+\sqrt[3]{2}+5\sqrt{7}},$$

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s \in \mathbb{N},\ s \geq 2,$$

$$J_0(\alpha) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\alpha/2)^{2n}}{n!^2}, \quad \alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^*,$$

$$\gamma := \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n) \right) = -\int_0^{+\infty} \ln(x) e^{-x} dx,$$

$$\delta := \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+x} dx \quad \text{“ = “} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n!.$$

S'agit-il de nombres rationnels ou irrationnels ? Sont-ils algébriques ou transcendants ? De quelles méthodes dispose-t-on pour répondre à ces questions ?

Un critère d'irrationalité

Expliciter une suite de rationnels α_n qui converge vers un réel α donné peut être difficile mais cela ne dit rien sur la nature arithmétique de ce nombre.

Pour démontrer l'irrationalité d'un réel α, on a besoin de plus d'informations sur la suite $\alpha_n = p_n/q_n$ avec $p_n, q_n \in \mathbb{Z}$.

Critère d'irrationalité. *Soient α un réel et $(p_n)_{n\geq 0}$, $(q_n)_{n\geq 0}$ deux suites d'entiers tq*

$$\forall n \geq 0, \quad q_n\alpha - p_n \neq 0$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} |q_n\alpha - p_n| = 0.$$

Alors $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

Supposons au contraire que $\alpha = a/b \in \mathbb{Q}$. Alors

$$0 < |b| \cdot |q_n\alpha - p_n| = |q_n a - p_n b| \in \mathbb{N}.$$

Si n est assez grand, $|q_n a - p_n b| < 1$.

Or il n'y a pas d'entier dans $]0, 1[$.

Donc $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

Deux exemples

Posons $\varepsilon_n = (\sqrt{2}-1)^n$. Il existe des entiers p_n et q_n tq $\varepsilon_n = q_n\sqrt{2} - p_n$. Par ailleurs, $0 < \varepsilon_n \to 0$ quand $n \to +\infty$. Donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Bonus : la suite $(p_n/q_n)_{n\geq 0}$ est liée à la fraction continue de $\sqrt{2}-1$:

$$\sqrt{2}-1 = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}} = [0; 2, 2, \ldots, 2, \ldots].$$

Pour tout $n \geq 2$, $p_n/q_n = [0; 2, 2, \ldots, 2]$ avec $n-1$ chiffres 2.

Euler :

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cdots}}}}} = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \ldots].$$

L'une ou l'autre de ces expressions de e démontrent que $e \notin \mathbb{Q}$. Par exemple

$$0 < n!e - n!\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = n!\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} < \frac{e}{n+1}.$$

Cette méthode, due à Fourier, s'adapte au cas de e^{-1} et $e^{\pm 1/m}$ mais pas de $e^{\pm m}$, $m \geq 2$ entier.

Il est rare de connaître explicitement la fraction continue d'une constante classique. On ne connaît pas la loi de formation de celle de π par exemple.

Critère d'irrationalité généralisé. *On se donne $N \geq 2$ réels $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ et $N+1$ suites d'entiers $(p_{k,n})_{n\geq 0}$ tq*

$$0 < |p_{0,n} + p_{1,n}\alpha_1 + p_{2,n}\alpha_2 + \cdots + p_{N,n}\alpha_N| \to 0$$

quand $n \to +\infty$. Alors un au moins des α_j est irrationnel.
S'il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha_j = \beta^j$, alors $\beta \notin \mathbb{Q}$.

Approximants de Padé

Étant donnés $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathbb{C}[[z]]$ et des entiers $p, q \geq 0$,

$\exists$ P et $Q \in \mathbb{C}[z]$ de degrés respectifs $\leq p$ et $\leq q$, tq $Q \not\equiv 0$ et

$$Q(z)F(z) - P(z) = c\, z^{p+q+1} + c'\, z^{p+q+2} + \cdots = \mathcal{O}(z^{p+q+1}).$$

Considérons les coefficients de Q comme des inconnues. Le problème revient à résoudre un système linéaire homogène ayant une inconnue de plus que d'équations. P est attaché à Q de manière unique. Il y a donc une solution non-triviale.

Les polynômes P et Q ne sont pas forcément uniques.

La fraction P/Q est unique (sous forme réduite). C'est l'approximant de Padé $[p/q]$ de F.

Les approximants de Padé sont de bonnes approximations rationnelles *fonctionnelles* de F.

Si $F(z) \in \mathbb{Q}[[z]]$, en prenant $z = r \in \mathbb{Q}$, on peut espérer obtenir des bonnes approximations rationnelles *numériques* du nombre $F(r)$.

Approximants de Padé de $\log(1-z)$

Polynômes de Legendre :

$$P_n(z) = \frac{1}{n!}(z^n(1-z)^n)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k}\binom{n+k}{n} z^k \in \mathbb{Z}_n[z].$$

$$\forall\, 0 \le k < n, \quad \int_0^1 x^k P_n(x)dx = 0.$$

$$Q_n(z) = \int_0^1 \frac{P_n(x) - P_n(z)}{z-x}dx = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}\binom{n+k}{n}\sum_{\ell=1}^{k}\frac{z^{k-\ell}}{\ell} \in \mathbb{Q}_{n-1}[z]$$

Théorème 1

$\forall n \ge 0$, $|z| < 1$,

$$B_n(z)\log\left(1-z\right) - A_n(z) = (-1)^{n+1}z^{2n+1}\int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n}{(1-zx)^{n+1}}dx = \mathcal{O}\left(z^{2n+1}\right)$$

avec $B_n(z) = z^n P_n(1/z)$ *et* $A_n(z) = z^n Q_n\left(1/z\right)$.

A_n/B_n est l'approximant de Padé $[n/n]$ de $\log(1-z)$. On évalue de deux façons différentes

$$\int_0^1 \frac{P_n(x)}{1-zx}dx.$$

Irrationalité de valeurs du logarithme

Corollaire 1

Pour tout entier $b \geq 2$ ou ≤ -1, le nombre $\log(1 - \frac{1}{b})$ est irrationnel.

Preuve pour $b = -1$. Posons $d_n := \mathrm{ppcm}(1, 2, \ldots, n)$.

$$P_n(-1) \in \mathbb{Z}, \qquad d_n Q_n(-1) \in \mathbb{Z}.$$

$$(-1)^{n+1} d_n \int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n}{(1+x)^{n+1}}\,dx = d_n\big(P_n(-1)\log(2) - Q_n(-1)\big) \in \mathbb{Z}\log(2) + \mathbb{Z}.$$

Théorème des nombres premiers : $d_n = e^{n+o(n)} \leq 3^n$.

$$0 < \int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n}{(1+x)^{n+1}}\,dx \ll \left(\max_{x\in[0,1]} \frac{x(1-x)}{1+x}\right)^n = (\sqrt{2}-1)^{2n}.$$

Comme $e(\sqrt{2}-1)^2 < 1$, le critère d'irrationalité s'applique.

Approximants de Padé de $\exp(z)$

Théorème 2

$\forall n \geq 0$, $\exists$ $A_n, B_n \in \mathbb{Z}_n[z]$ tq

$$B_n(z)e^z - A_n(z) = (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{n!} \int_0^1 x^n(1-x)^n e^{xz}\,dx.$$

A_n/B_n est l'approximant de Padé $[n/n]$ de $\exp(z)$. On évalue des deux façons différentes l'intégrale

$$\int_0^1 P_n(x)e^{xz}\,dx.$$

Corollaire 2 (Lambert)

$\pi \notin \mathbb{Q}$ et $\forall r \in \mathbb{Q}^*$, $e^r \notin \mathbb{Q}$.

Avec $r = a/b \neq 0$, on a $b^n B_n(r)e^r - b^n A_n(r) \in \mathbb{Z}e^r + \mathbb{Z}$ et

$$0 < |b^n B_n(r)e^r - b^n A_n(r)| \ll \frac{(a^2/4b)^n}{n!} \to 0.$$

En posant $z = \pm i\pi$ dans le théorème 2, on obtient $\pi \notin \mathbb{Q}$ grâce à $e^{\pm i\pi} = -1$.

Approximants de Padé de type I et II

Soient $F_1, \ldots, F_s \in \mathbb{C}[[z]]$.

Approximants de Padé de type I. Étant donnés des entiers $p \geq 0$ et $s \geq 2$,

$\exists\ P_1, \ldots, P_s \in \mathbb{C}[z]$, non tous nuls, tq $\deg(P_j) \leq p$ et

$$\sum_{j=1}^{s} P_j(z)F_j(z) \in \mathbb{C}[[z]]$$

ait un ordre d'annulation au moins $s(n+1)-1$ en $z=0$.

Approximants de Padé de type II. Étant donnés des entiers positifs p et q tq $p \geq (s-1)q$,

$\exists\ P_1, \ldots, P_s, Q \in \mathbb{L}[z]$, $Q \neq 0$, tq $\deg(P_j) \leq p$, $\deg(Q) \leq s \cdot q$ et

$$Q(z)F_j(z) - P_j(z) \in \mathbb{C}[[z]], \quad 1 \leq j \leq s.$$

ait un ordre au moins $p+q+1$ en $z=0$.

Indépendance linéaire de réels

On utilise les approximants de Padé de type I en conjonction avec le critère suivant, ou ses variantes.

Proposition 1 (Critère de Nesterenko)

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in \mathbb{R}$*. On suppose qu'il existe* $s+1$ *suites d'entiers* $(p_{j,r})_{r\geq 0}$ *et* $(\lambda_r)_{r\geq 0}$*, et des réels* $u, v > 0$ *tq*

$$\lim_{r\to+\infty} \lambda_r = +\infty, \qquad \lim_{r\to+\infty} \frac{\lambda_{r+1}}{\lambda_r} = 1,$$

$$|p_{j,r}| \leq v^{\lambda_r(1+o(1))}, \quad j = 1, \dots, s$$

et

$$\left| \sum_{j=1}^{s} p_{j,r}\alpha_j \right| = u^{\lambda_r(1+o(1))}.$$

Alors le rang sur $\mathbb{Q}$ *de la famille* $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$ *est* $\geq 1 - \dfrac{\ln(u)}{\ln(v)}$.

E-fonctions (telle que $\exp(z)$) : $\lambda_r = \ln(r!) \sim r\ln(r)$.

G-fonctions (telle que $\log(1-z)$) : $\lambda_r = r$.

Approximants de Padé de type II et I de exp

Théorème 3 (Hermite)

$\forall n \geq 0, k \geq 1$, $\exists$ $A_{\ell,n}$ et $B_n \in \mathbb{Z}_{kn}[z]$ tq

$$\begin{aligned} & B_n(z)e^{\ell z} - A_{\ell,n}(z) \\ & \quad = \frac{z^{(k+1)n+1}}{n!} e^{\ell z} \int_0^\ell x^n \prod_{j=1}^{k} (x-j)^n e^{-zx} dx = \mathcal{O}(z^{(k+1)n+1}), \quad \ell = 1, \dots, k. \end{aligned}$$

Les nombres $e, e^2, \dots, e^k$ sont approchés par des rationnels ayant le même dénominateur $B_n(1)$.

$\exists$ $Q_0, \dots, Q_{k-1} \in \mathbb{Z}_n[z]$ tq

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=0}^{k-1} Q_\ell(z) e^{\ell z} \\ & \quad = \frac{z^{k(n+1)-1}}{n!^{k-1}} \int_{\substack{x_1 \geq 0, \dots, x_{k-1} \geq 0 \\ x_1 + \cdots + x_k = 1}} \prod_{\ell=1}^{k} \left(x_\ell^n \, e^{(\ell-1) x_\ell z} \right) dx_1 \cdots dx_{k-1} = \mathcal{O}(z^{k(n+1)-1}). \end{aligned}$$

Théorèmes diophantiens sur les valeurs de l'exponentielle

Théorème 4 (Hermite)

e $\notin \overline{\mathbb{Q}}$.

Cela découle aussi du critère de Nesterenko avec les approximants de type I.

Théorème 5 (Hermite-Lindemann)

$\forall \alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^*$, $e^{\alpha} \notin \overline{\mathbb{Q}}$.

Pour n'importe quelle détermination du logarithme, $\forall \alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0, 1\}$, $\log(\alpha) \notin \overline{\mathbb{Q}}$. *En particulier,* $\pi \notin \overline{\mathbb{Q}}$ *(Lindemann).*

Théorème 6 (Lindemann-Weierstrass)

(*i*) *Soient* $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \overline{\mathbb{Q}}$ *supposés* $\mathbb{Q}$*-lin indep. Alors* $e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_k}$ *sont* $\mathbb{Q}$*-alg indep.*

De manière équivalente :

(*ii*) *Soient* $\beta_1, \ldots, \beta_\ell \in \overline{\mathbb{Q}}$ *supposés deux à deux distincts. Alors* $e^{\beta_1}, \ldots, e^{\beta_\ell}$ *sont* $\overline{\mathbb{Q}}$*-lin indep.*

$\forall \ \alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^*$, $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$ sont transcendants.

Polylogarithmes

Pour $s \in \mathbb{N}$, $|z| < 1$:

$$\mathrm{Li}_s(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^s}$$

$$\mathrm{Li}_1(z) = -\log(1-z).$$

$s \geq 2$:

$$\mathrm{Li}_s(1) = \zeta(s)$$

$n \in \mathbb{N}, n \geq 2$:

$$\zeta(2n) \in \mathbb{Q}\pi^{2n}, \qquad \zeta(2n-1)\ ?$$

$$\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}\log(2)^2.$$

$$24\,\mathrm{Li}_3\left(\frac{1}{2}\right) = 4\log(2)^3 - 2\pi^2\log(2) + 21\zeta(3).$$

On ne sait calculer explicitement la suite des approximants de Padé (diagonaux) d'aucun Li_s lorsque $s \geq 2$.

Approximants de Padé de type I et II des polylogarithmes

Fixons un entier $n \geq 0$ et posons

$$R_n(k) := \frac{(k-1)(k-2)\cdots(k-2n-1)}{k^2(k+1)^2\cdots(k+n)^2} \in \mathbb{Q}(k).$$

Proposition 2

$\exists\ A_n, B_n, C_n \in \mathbb{Q}_n[z]$ *tq*

$$\sum_{k=1}^{\infty} R_n(k) z^{k+n} = A_n(z)\,\mathrm{Li}_2(z) + B_n(z)\,\mathrm{Li}_1(z) + C_n(z) = \mathcal{O}(z^{3n+2}).$$

Avec le critère de Nesterenko (par exemple), on obtient le

Théorème 7

$\forall s \geq 1$, $\forall q \in \mathbb{Z}$ *tq* $|q| > e^{s^2}$, *les nombres* $1, \mathrm{Li}_1(1/q), \ldots, \mathrm{Li}_s(1/q)$ *sont* $\mathbb{Q}$*-lin indep. (Nikishin, Hata)*

Irrationalité de valeurs de la fonction zêta de Riemann

$\exists\ P_n, Q_n, T_n \in \mathbb{Q}_n[z]$ et $A_n, B_n, C_n, D_n \in \mathbb{Q}_n[z]$ tq

$$\begin{cases} R_n(z) := P_n(z)\,\mathrm{Li}_2(z) + Q_n(z)\,\mathrm{Li}_1(z) + T_n(z) = \mathcal{O}(z^{2n+1}) \\ \\ P_n(z)\log(z) + Q_n(z) = \mathcal{O}((1-z)^{n+1}), \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_n(z)\,\mathrm{Li}_2(z) + B_n(z)\,\mathrm{Li}_1(z) + C_n(z) = \mathcal{O}(z^{2n+1}) \\ \\ S_n(z) := 2A_n(z)\,\mathrm{Li}_3(z) + B_n(z)\,\mathrm{Li}_2(z) + D_n(z) = \mathcal{O}(z^{2n+1}) \\ \\ A_n(z)\log(z) + B_n(z) = \mathcal{O}(1-z). \end{cases}$$

Solutions “uniques” :

$$R_n(z) = n! \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)\cdots(k-n)}{k^2(k+1)^2\cdots(k+n)^2} z^{k+n}, \quad P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k} z^{n-k},$$

$$S_n(z) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial k}\left(\frac{(k-1)^2\cdots(k-n)^2}{k^2(k+1)^2\cdots(k+n)^2}\right) z^{k+n},\ A_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 z^{n-k}.$$

$$R_n(1) = P_n(1)\zeta(2) + T_n(1), \quad S_n(1) = 2A_n(1)\zeta(3) + D_n(1).$$

$$P_n(1) \in \mathbb{Z}, \quad d_n^2 T_n(1) \in \mathbb{Z}.$$

$$A_n(1) \in \mathbb{Z}, \quad d_n^3 D_n(1) \in \mathbb{Z}.$$

$$0 \neq R_n(1) = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{5n+o(n)}, \qquad 0 \neq S_n(1) = (\sqrt{2}-1)^{4n+o(n)}.$$

Le critère d'irrationalité s'applique car

$$e^2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^5 < 1, \quad e^3(\sqrt{2}-1)^4 < 1.$$

Théorème 8

(i) $\zeta(2)$ *et* $\zeta(3)$ *sont irrationnels (Apéry).*

(ii) Le rang sur $\mathbb{Q}$ *de la famille* $(1, \zeta(3), \zeta(5), ..., \zeta(2s+1))$ *est* $\geq \frac{1}{3}\log(s)$.

(iii) $\exists$ *au moins un irrationnel parmi* $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$ *(Zudilin).*

(iv) Il y a au moins $2^{\frac{\ln(s)}{\ln\ln(s)}(1+o(1))}$ *nombres irrationnels dans l'ensemble* $\{\zeta(3), \zeta(5), \ldots, \zeta(2s+1)\}$ *lorsque* $s \to +\infty$ *(Fischler, Sprang et Zudilin).*

E-fonctions de Siegel

Définition 1

Une E-fonction (stricte) est une série entière $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n \in \mathbb{Q}[[z]]$ *tq*

(i) $F(z)$ *est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients dans* $\mathbb{Q}(z)$.

(ii) $\exists\ C > 0$ *tq* $\forall n \geq 0$, *on ait* $|a_n| \leq C^{n+1}$.

(iii) $\exists$ *une suite d'entiers* $(D_n)_{n\geq 0}$ *et* $D > 0$ *tq*

$$D_n a_m \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq m \leq n$$

et $1 \leq |D_n| \leq D^{n+1}$.

Les E-fonctions forment un sous-anneau de $\overline{\mathbb{Q}}[[z]]$, stable par $\frac{d}{dz}$ et $\int_0^z$. Ce sont des fonctions entières.

Les unités de cet anneau sont $\alpha e^{\beta z}$, $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^*$, $\beta \in \overline{\mathbb{Q}}$.

Exemples de E-fonctions

Les polynômes de $\overline{\mathbb{Q}}[z]$, e^z, les fonctions hypergéométriques confluentes ${}_pF_p$, la fonction de Bessel

$$J_0(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z/2)^{2n}}{n!^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \binom{2n}{n}}{4^n} \frac{z^{2n}}{(2n)!},$$

$$\sin(z), \quad \cos(z), \quad \int_0^z \frac{\sin(x)}{x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n)!(2n+1)^2},$$

$$h(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)}_{H_n} z^n.$$

$h(z)$: un dénominateur commun de $0 =: H_0, H_1, \ldots, H_n$ est d_n et

$$zh'''(z) + 2(1-z)h''(z) + (z-3)h'(z) + h(z) = 0.$$

Les fonctions algébriques sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ non polynomiales, $\log(1-z)$, $\tan(z)$, $J_0(\sqrt{z})$, $(1-z)^{\sqrt{2}}$ ne sont pas des E-fonctions.

Théorème 9 (Siegel-Shidlovskii)

Soient $Y = {}^t(F_1, \ldots, F_n)$ *un vecteur de* E*-fonctions et* $A \in M_{n\times n}(\overline{\mathbb{Q}}(z))$ *tq* $Y' = AY$.

Soit T *un polynôme non nul dénominateur commun des coefficients de* A*, de degré minimal.*

Alors, $\forall \alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ *tq* $\alpha T(\alpha) \neq 0$,

$$\deg \mathrm{tr}_{\overline{\mathbb{Q}}(z)} \overline{\mathbb{Q}}(z)\big(F_1(z), \ldots, F_n(z)\big) = \deg \mathrm{tr}_{\overline{\mathbb{Q}}} \overline{\mathbb{Q}}\big(F_1(\alpha), \ldots, F_n(\alpha)\big).$$

Lindemann-Weierstrass : Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \overline{\mathbb{Q}}$ sont $\mathbb{Q}$-lin indep, $e^{\alpha_1 z}, \ldots, e^{\alpha_n z}$ sont $\overline{\mathbb{Q}}(z)$-alg indep, et

$$\frac{d}{dz}\begin{pmatrix} e^{\alpha_1 z} \\ \vdots \\ e^{\alpha_n z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\alpha_1 z} \\ \vdots \\ e^{\alpha_n z} \end{pmatrix}, \qquad T(z) = 1.$$

Siegel : Les E-fonctions J_0 et J_0' sont $\overline{\mathbb{Q}}(z)$-alg indep et

$$\begin{pmatrix} J_0'(z) \\ J_0''(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_0(z) \\ J_0'(z) \end{pmatrix}, \, T(z) = z.$$

Une application aux constantes d'Euler γ et de Gompertz δ

Théorème 10

L'un des nombres $\gamma = -\int_0^{+\infty} \ln(x)e^{-x}$ *et* $\delta = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+x}dx$ *est transcendant.*

Posons

$$\mathcal{E}(z) := \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{z^n}{n!n}, \qquad \mathcal{G}(z) := \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x+z}dx.$$

Les E-fonctions $\mathcal{E}(z)$ et e^{-z} sont $\overline{\mathbb{Q}}(z)$-alg indep et

$$\begin{pmatrix} 1 \\ e^{-z} \\ \mathcal{E}(z) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{z} & \frac{1}{z} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-z} \\ \mathcal{E}(z) \end{pmatrix}, \quad T(z) = z.$$

$\forall \alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^*$, on a

$$2 = \deg \operatorname{tr}_{\overline{\mathbb{Q}}(z)} \overline{\mathbb{Q}}(z)\big(1, e^{-z}, \mathcal{E}(z)\big) = \deg \operatorname{tr}_{\overline{\mathbb{Q}}} \overline{\mathbb{Q}}\big(1, e^{-\alpha}, \mathcal{E}(\alpha)\big).$$

$\forall z \in]0, +\infty[$, on a $\mathcal{E}(z) = -\gamma - \ln(z) - e^{-z}\mathcal{G}(z)$.

Conclusion avec

$$\mathcal{E}(1) = -\gamma - \frac{\delta}{e}.$$

Soient $F_1, \ldots, F_n$ des E-fonctions à coefficients **rationnels** vérifiant les hypothèses du théorème de Siegel-Shidlovskii.

Supposons de plus $F_1, \ldots, F_n$ $\mathbb{Q}(z)$-lin indep.

Proposition 3

Fixons $\varepsilon > 0$ *et* $\alpha \in \mathbb{Q}$ *tq* $\alpha T(\alpha) \neq 0$. *Il existe des suites d'entiers* $(q_{j,r})_r$ *tq*

$$0 < \left| \sum_{j=1}^{n} q_{j,r} F_j(\alpha) \right| \leq \frac{1}{r!^{n-1-\varepsilon n}}, \quad |q_{j,r}| \leq r!^{1+\varepsilon}.$$

Théorème 11

$\forall\ \alpha \in \mathbb{Q}$ *tq* $\alpha T(\alpha) \neq 0$, *les nombres* $F_1(\alpha), \ldots, F_n(\alpha)$ *sont* $\mathbb{Q}$*-lin indep.*

G-fonctions de Siegel

Définition-Proposition 1

Une G-fonction est une série formelle $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \overline{\mathbb{Q}}[[z]]$ tq $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ est une E-fonction (stricte).

$F(z)$ vérifie automatiquement une équation différentielle linéaire sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$.

Les G-fonctions forment un sous-anneau de $\overline{\mathbb{Q}}[[z]]$, stable par $\frac{d}{dz}$ et $\int_0^z$. Elles sont holomorphes en $z = 0$ mais ne sont pas entières (sauf si polynomiales).

Si $F(z) \in \mathbb{Z}[[z]]$ est holomorphe en $z = 0$ et vérifie une équation différentielle linéaire sur $\mathbb{C}(z)$, elle est une G-fonction.

L'intersection des E-fonctions et G-fonctions est $\overline{\mathbb{Q}}[z]$.

Exemples de G-fonctions

Les fonctions hypergéométriques généralisées ${}_{p+1}F_p$.

Les fonctions algébriques sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ holomorphes en $z = 0$,

$$\frac{1}{(1-z)^s} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s(s+1)\cdots(s+n-1)}{n!} z^n \quad (s \in \mathbb{Q}), \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{n+1} z^k = \frac{2}{1+\sqrt{1-4z}},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n+k}{k} \right) z^n = \frac{1}{\sqrt{1-6z+z^2}}.$$

G-fonctions transcendantes :

$$\arctan(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n^2 \binom{2n}{n}} = 2 \arcsin\left(\frac{z}{2}\right)^2,$$

$$\log(1-z)^s, \qquad \mathrm{Li}_s(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^s}, \qquad \sum_{n_1 > \cdots > n_k \geq 1} \frac{z^{n_1}}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \cdots n_k^{s_k}}, \quad s, s_1, \ldots, s_k \in \mathbb{N}.$$

Soient $Y = {}^t(F_1, \dots, F_n)$ un vecteur de G-fonctions de $\mathbb{Q}[[z]]$ et $A \in M_{n\times n}(\mathbb{Q}(z))$ tq $Y' = AY$.

Condition de Galochkin : condition sur la croissance des dénominateurs des coefficients des matrices $A_k/k! \in M_{n\times n}(\mathbb{Q}(z))$, définies par $Y^{(k)} = A_k Y$.

Proposition 4

Supposons $F_1, \dots, F_n$ $\mathbb{Q}(z)$-lin indep **et** *que la condition de Galochkin soit vérifiée par A.*

Soit $q \neq 0$ un entier.

$\exists$ $u, v > 0$ et des suites d'entiers $(p_{j,r})_r$ (dépendant tous de q) tq

$$0 < \left| p_{0,r} + \sum_{j=1}^{n} p_{j,r} F_j(1/q) \right| \leq u^{r+1}, \quad |p_{j,r}| \leq v^{r+1}.$$

Théorème 12 (Galochkin)

Supposons $F_1, \dots, F_n$ $\mathbb{Q}(z)$*-lin indep* **et** *que la condition de Galochkin soit vérifiée par A.*

Alors $\exists\ c_0(Y) > 0$ *tq,* $\forall q \in \mathbb{Z}$ *tq* $|q| > c_0(Y)$*, les nombres*

$$1, F_1(1/q),\ F_2(1/q),\ \dots,\ F_n(1/q)$$

sont $\mathbb{Q}$*-lin indep.*

Théorème 13 (Chudnovsky)

Supposons $F_1, \dots, F_n$ $\mathbb{Q}(z)$*-lin indep.*

Alors la condition de Galochkin est vérifiée par A.

La condition de Galochkin et ces résultats se généralisent au cas où $F_1, \dots, F_n \in \overline{\mathbb{Q}}[[z]]$.

Un système différentiel vérifiant la condition de Galochkin est dit un *G-opérateur*.

$L \in \overline{\mathbb{Q}}(z)[\frac{d}{dz}]$ est dit un G-opérateur lorsque son système compagnon est un G-opérateur.

Structure des G-opérateurs

Théorème 14 (Chudnovsky, version alternative)

Soient f une G-fonction et $L \in \overline{\mathbb{Q}}(z)[\frac{d}{dz}] \setminus \{0\}$ tq $Lf(z) = 0$ et d'ordre minimal pour F. Alors L est un G-opérateur.

Théorème 15 (André, Chudnovsky, Katz)

Soit $L \in \overline{\mathbb{Q}}(z)[\frac{d}{dz}]$ un G-opérateur.

(i) *L'équation différentielle $Ly(z) = 0$ admet en $z = 0$ une $\mathbb{C}$-base de solutions de la forme*

$$\sum_{j=1}^{\mu} \left(z^{r_1} P_{j,1}(\log(z)) + \cdots + z^{r_\mu} P_{j,\mu}(\log(z)\right) F_j(z).$$

où les $r_j \in \mathbb{Q}$, $P_{j,k}(X) \in \overline{\mathbb{Q}}[X]$ et chaque F_j est une G-fonction.

(ii) *Les singularités de L sont dans $\overline{\mathbb{Q}} \cup \{\infty\}$. L est fuchsien et ses exposants locaux sont dans $\mathbb{Q}$.*

E-opérateurs

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ une E-fonction, avec $|a_n| \leq C^{n+1}$.

Transformée de Laplace : pour $\mathrm{Re}\,(z) > C$,

$$g(z) := \int_0^{+\infty} f(x) e^{-xz} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \int_0^{+\infty} x^n e^{-zx} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n+1}}.$$

$g(z)$ est une G-fonction de la variable $1/z$.

Transformée de Fourier-Laplace des opérateurs :

$$\mathcal{F} : \mathbb{C}[z]\left[\frac{d}{dz}\right] \to \mathbb{C}[z]\left[\frac{d}{dz}\right]$$
$$z \mapsto -\frac{d}{dz}, \quad \frac{d}{dz} \mapsto z.$$

$L \in \overline{\mathbb{Q}}[z][\frac{d}{dz}]$ d'ordre μ tq $Lf(z) = 0$:

$$\left(\left(\frac{d}{dz}\right)^{\mu} \circ \mathcal{F}(L)\right) g(z) = 0.$$

Définition-Proposition 2 (André)

Un opérateur $L \in \overline{\mathbb{Q}}[z][\frac{d}{dz}]$ est dit un E-opérateur si $\mathcal{F}(L) \in \overline{\mathbb{Q}}[z][\frac{d}{dz}]$ est un G-opérateur. Toute E-fonction est annulée par un E-opérateur.

Un exemple de E-opérateur

Vérifions que

$$L := z\Big(\frac{d}{dz}\Big)^2 - (6z-1)\frac{d}{dz} + (z-3)$$

est un E-opérateur.

Avec la règle $\frac{d}{dz}z = z\frac{d}{dz} + 1$, on a

$$\begin{aligned} N := \mathcal{F}(L) &= -\frac{d}{dz}z^2 - \Big(-6\frac{d}{dz} - 1\Big)z + \Big(-\frac{d}{dz} - 3\Big) \\ &= (-z^2 + 6z - 1)\frac{d}{dz} - (z-3). \end{aligned}$$

La G-fonction

$$u(z) := \frac{1}{\sqrt{1 - 6z + z^2}}$$

est une solution locale en 0 de $Ny(z) = 0$.

N d'ordre 1 est évidemment minimal pour $u(z)$.

Donc $N = \mathcal{F}(L)$ est un G-opérateur.

Donc L est un E-opérateur. Il annule la E-fonction

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n+k}{n}\right).$$

Structure des E-opérateurs

Théorème 16 (André)

Soit $L \in \overline{\mathbb{Q}}[z][\frac{d}{dz}]$ un E-opérateur d'ordre μ.

(*i*) *En $z = 0$, $Ly(z) = 0$ admet une $\mathbb{C}$-base de solutions locales de la forme*

$$\sum_{j=1}^{\mu} \big(z^{r_1} P_{j,1}(\log(z)) + \cdots + z^{r_\mu} P_{j,\mu}(\log(z)\big) E_j(z).$$

où les $r_j \in \mathbb{Q}$, $P_{j,k}(X) \in \overline{\mathbb{Q}}[X]$ et chaque $E_j(z)$ est une E-fonction.

(*ii*) *0 est la seule singularité finie de L.*

(*iii*) *Soit F une E-fonction. Les singularités finies non nulles d'un opérateur de $\overline{\mathbb{Q}}(z)[\frac{d}{dz}]$ minimal (pour l'ordre) pour $F(z)$ sont apparentes.*

(*iii*) est la propriété cruciale qui a permis à André de donner une nouvelle preuve du théorème de Siegel-Shidlovskii sans approximants de type Padé construits à l'aide du lemme de Siegel.

Théorème 17 (Théorème de relèvement de Beukers)

Soient $Y = {}^t(F_1, \ldots, F_n)$ un vecteur de E-fonctions et $A \in M_{n\times n}(\overline{\mathbb{Q}}(z))$ tq $Y' = AY$.

Soit $T(z)$ un dénominateur de $A(z)$, de degré minimal.

Soit $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ tq $\alpha T(\alpha) \neq 0$ et $P \in \overline{\mathbb{Q}}[X_1, \ldots, X_n]$ homogène en $X_1, \ldots, X_n$ tq

$$P\big(F_1(\alpha), \ldots, F_n(\alpha)\big) = 0.$$

Alors, $\exists\ Q \in \overline{\mathbb{Q}}[Z, X_1, \ldots, X_n]$ homogène en $X_1, \ldots, X_n$ tq

$$Q\big(z, F_1(z), \ldots, F_n(z)\big) = 0 \quad \text{et} \quad Q(\alpha, X_1, \ldots, X_n) = P(X_1, \ldots, X_n).$$

Corollaire 3 (Beukers)

Dans les mêmes conditions, supposons de plus $F_1(z), \ldots, F_n(z)$ $\overline{\mathbb{Q}}(z)$-lin indep.

Alors $\forall\ \alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ tq $\alpha T(\alpha) \neq 0$, les nombres $F_1(\alpha), \ldots, F_n(\alpha)$ sont $\overline{\mathbb{Q}}$-lindep.

Corollaire 4 (Dichotomie diophantienne)

Soient $\mathbb{K}$ un corps de nombres et $F(z) \in \mathbb{K}[[z]]$ une E-fonction. Alors $\forall \alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, soit $F(\alpha) \in \mathbb{K}(\alpha)$ soit $F(\alpha) \notin \overline{\mathbb{Q}}$.

Valeurs algébriques exceptionnelles de E-fonctions

Soit F_1 une E-fonction.

1) Injectons F_1 dans $Y = {}^t(F_1, \ldots, F_n)$ vérifiant un système différentiel. Soit $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ tq $\alpha T(\alpha) \neq 0$.

Si $F_1, \ldots, F_n$ sont $\overline{\mathbb{Q}}(z)$-alg indep, alors $F_1(\alpha) \notin \overline{\mathbb{Q}}$.

Si $m := \deg \mathrm{tr}_{\overline{\mathbb{Q}}(z)} \overline{\mathbb{Q}}(z)(F_1(z), \ldots, F_n(z)) < n$, alors il existe m nombres transcendants parmi les n nombres $F_1(\alpha), F_2(\alpha), \ldots, F_n(\alpha)$. Est-ce que $F_1(\alpha) \notin \overline{\mathbb{Q}}$?

2) Les théorèmes de Siegel-Shidlovskii et de Beukers ne disent rien lorsque $T(\alpha) = 0$.

Théorème 18 (Adamczewski-R.)

Il existe un algorithme qui réalise les tâches suivantes.

Étant donnée une E-fonction F en entrée, il commence par déterminer si F est transcendante sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ ou pas.

Si elle ne l'est pas, il affiche le polynôme F en sortie.

Si elle l'est, il poursuit et affiche en sortie la liste finie des $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ tq $F(\alpha) \in \overline{\mathbb{Q}}$, ainsi que la liste correspondante des valeurs $F(\alpha)$.

Fuchs, Picard, Griffiths : les périodes de variétés définies sur $\overline{\mathbb{Q}}$ vérifient des équations différentielles fuchsiennes avec des exposants rationnels.

Ces équations sont dites de Picard-Fuchs, ou bien connexions de Gauss-Manin.

Théorème 19 (André)

Tout produit de facteurs d'opérateurs différentiels de Picard-Fuchs est un G-opérateur.

Interprétation : une période fonctionnelle "est" une G-fonction, à un facteur près.

Tout indique que la réciproque est vraie.

Conjecture 1 (Bombieri-Dwork)

Les G-fonctions proviennent de la géométrie.

Plus précisément, tout G-opérateur de $\overline{\mathbb{Q}}(z)[\frac{d}{dz}]$ est un produit de facteurs d'opérateurs différentiels de Picard-Fuchs.

Exemples

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; z\right] = \frac{\Gamma(c)e^{i\pi(1-c)}}{4\Gamma(c)\Gamma(b-c)\sin(\pi b)\sin(\pi(c-b))}\int_{\mathcal{P}} x^{b-1}(1-x)^{c-b-1}(1-zx)^{-a}dx $$

où $\mathcal{P}$ est le "cycle de Pochhammer".

Beukers-Peters :

$$ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\binom{n+k}{n}^2\right)t^n = \frac{1}{(2i\pi)^3}\int_D \frac{dxdydz}{1-(1-xy)z-txyz(1-x)(1-y)(1-z)}. $$

Bostan-Lairez-Salvy :

$$ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{n}{k}^3\right)z^n = \frac{1}{(2i\pi)^2}\int_{\{|z|<1/2\}^2}\frac{xydxdy}{(xy)^2-z(1+x)^2(1+y)^2(1-xy)^2}. $$

G-fonctions : qui pour remplacer Siegel et Shidlovskii ?

L'analogue exact du théorème de Siegel-Shidlovskii est faux pour les G-fonctions.

Une E-fonction transcendante ne prend qu'un nombre fini de valeurs algébriques en des points algébriques.

Une G-fonction transcendante peut prendre des valeurs algébriques sur un ensemble de nombres algébriques dense dans son disque de convergence (Wolfart).

$$
{}_2F_1\left[\begin{matrix} 1/12, 5/12 \\ 1/2 \end{matrix} ; \frac{1323}{1331}\right] = \frac{3}{4}\sqrt[4]{11},
$$

$$
{}_2F_1\left[\begin{matrix} 1/12, 5/12 \\ 1/2 \end{matrix} ; \frac{392}{253^3}(44372 - 1767\sqrt{3})\right] = \frac{2}{3}\sqrt[4]{21 + 20\sqrt{3}}
$$

$$
{}_2F_1\left[\begin{matrix} 7/12, 11/12 \\ 3/2 \end{matrix} ; \frac{1323}{1331}\right] = \frac{11^{7/4}\,\Gamma(1/4)^4}{336\,\pi^2} \notin \overline{\mathbb{Q}}.
$$

La *conjecture des périodes* de Grothendieck gouverne les relations algébriques sur $\overline{\mathbb{Q}}$ entre périodes.

Elle gouverne probablement les relations algébriques sur $\overline{\mathbb{Q}}$ entre valeurs de G-fonctions aux points algébriques si la conjecture de Bombieri-Dwork est correcte.