Approximants de Padé et Polyzêtas

Tanguy Rivoal,
CNRS et Université Grenoble 1

Travail en commun Stéphane Fischler,
Université Paris-Sud

Polylogarithmes

Pour $s \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{Li}_s(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^s}$$

$$\mathrm{Li}_1(z) = -\log(1-z)$$

$$\mathrm{Li}_s\left(\frac{1}{z}\right) = \int_0^1 \frac{\frac{1}{(s-1)!}\log(1/x)^{s-1}}{z-x}\,dx$$

$$\mathrm{Li}_s(1) = \zeta(s)$$

$$\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}\log(2)^2$$

$$24\,\mathrm{Li}_3\left(\frac{1}{2}\right) = 4\log(2)^3 - 2\pi^2\log(2) + 21\zeta(3).$$

Un problème de Padé général

Soit des entiers $n \geq 0$, $A \geq 1$ et $\rho, \sigma \geq 0$ tels que $\rho + \sigma \leq A(n+1) - 1$.

On veut déterminer des polynômes $P_0(z)$, $\widetilde{P}_0(z)$ et $P_k(z)$ $(1 \leq k \leq A)$ de degré $\leq n$ et des fonctions $S(z)$, $\widetilde{S}(z)$, $R(z)$ tels que

$$
\begin{aligned}
S(z) &= P_0(z) + \sum_{k=1}^{A} P_k(z) \operatorname{Li}_k\left(\frac{1}{z}\right) = O\left(\frac{1}{z^{\rho+1}}\right) \\
\widetilde{S}(z) &= \widetilde{P}_0(z) + \sum_{k=1}^{A} (-1)^k P_k(z) \operatorname{Li}_k(z) = O(z^{n+\sigma+1}) \qquad (1) \\
R(z) &= \sum_{k=1}^{A} (-1)^{k-1} P_k(z) \frac{\log(z)^{k-1}}{(k-1)!} = O\big((1-z)^{A(n+1)-\rho-\sigma-1}\big).
\end{aligned}
$$

Un problème de Padé général, suite

Théorème 1 (Fischler-R, 2003)

À constante multiplicative près, le problème (1) *a une unique solution, et elle vérifie pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $|z| \geq 1$,

$$S(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-\rho)_\rho (k+n+1)_\sigma}{(k)_{n+1}^A} z^{-k},$$

et, si $z \notin]-\infty, 0]$,

$$R(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{(s-\rho)_\rho (s+n+1)_\sigma}{(s)_{n+1}^A} z^{-s} \mathrm{d}s$$

où $\mathcal{C}$ *est un lacet entourant les points* $-n, -n+1, \ldots, 0$ *dans le sens direct.*

La fonction $\widetilde{S}(z)$ et les polynômes se déduisent facilement de $S(z)$.

Cas particuliers

- $A = 1$, $\rho = n$ et $\sigma = 0$: Approximants de Padé diagonaux (usuels) de $\mathrm{Li}_1(1/z)$.

$$S(z) = P_1(z)\,\mathrm{Li}_1\left(\frac{1}{z}\right) + P_0(z) = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right).$$

$$S(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-n)_n}{(k)_{n+1}} z^{-k} = \int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n}{(z-x)^{n+1}}\,dx.$$

- $A = 2$, $\rho = n$ et $\sigma = 0$: Problème de Beukers pour $\zeta(2)$.

$$S(z) = P_2(z)\,\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{z}\right) + P_1(z)\,\mathrm{Li}_1\left(\frac{1}{z}\right) + P_0(z) = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right)$$

$$R(z) = P_2(z)\log(z) - P_1(z) = O\big((1-z)^{n+1}\big).$$

$$S(1) = P_2(1)\zeta(2) + P_0(1).$$

$$S(z) = n! \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-n)_n}{(k)_{n+1}^2} z^{-k} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n y^n(1-y)^n}{(z-xy)^{n+1}}\,dxdy.$$

On retrouve les suites d'Apéry pour $\zeta(2)$.

Cas particuliers, suite

- $\rho = \sigma = r \cdot n$, $r = [A/log(A)^2]$, A impair, n pair : Infinité d'irrationnels parmi les $\zeta(2k+1)$.

$$S(z) = P_0(z) + \sum_{k=1}^{A} P_k(z)\,\mathrm{Li}_k\left(\frac{1}{z}\right) = O\left(\frac{1}{z^{rn+1}}\right),$$

$$P_k(z) = (-1)^{A(n+1)+k} z^n P_k(1/z), \quad k \geq 1.$$

$$S(1) = P_0(1) + \sum_{k=3,\, k\ impair}^{A} P_k(1)\zeta(k), \quad P_{2k}(1) = 0,\ P_1(1) = 0.$$

$$S(z) = n!^{A-2r} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-rn)_{rn}(k+n+1)_{rn}}{(k)_{n+1}^{A}} z^{-k}$$

$$= \frac{((2r+1)n+1)!}{n!^{2r+1}} \int_{[0,1]^{A+1}} \left(\frac{\prod_{j=1}^{A+1} x_j^r(1-x_j)}{(z-x_1\cdots x_{A+1})^{2r+1}}\right)^n \frac{dx_1\cdots dx_{A+1}}{(z-x_1\cdots x_{A+1})^2}.$$

Généralisations

• Certains problèmes de Padé admettent une solution explicite et d'autres (apparemment) pas. Par exemple, personne ne sait résoudre explicitement le problème de Padé (pour un entier $s \geq 2$ donné) :

$$P_1(z)\,\mathrm{Li}_s\left(\frac{1}{z}\right) + P_0(z) = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right).$$

• Nous avons résolu explicitement des généralisations du problème (1) qui interpolent entre les problèmes de type I et ceux de type II pour les polylogarithmes. Elles contiennent le problème de Beukers pour $\zeta(3)$: pour tout $n \geq 0$,

$$P_2(z)\,\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{z}\right) + P_1(z)\,\mathrm{Li}_1\left(\frac{1}{z}\right) + P_0(z) = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right)$$

$$P_2(z) 2\,\mathrm{Li}_3\left(\frac{1}{z}\right) + P_1(z)\,\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{z}\right) + \widetilde{P}_0(z) = S(z) = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right)$$

$$P_2(z)\log(z) - P_1(z) = O(1-z).$$

$$S(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dk}\left(\frac{(k-n)_n^2}{(k)_{n+1}^2}\right) z^{-k}, \quad S(1) = 2P_2(1)\zeta(3) + \widetilde{P}_0(1).$$

On retrouve les suites d'Apéry pour $\zeta(3)$.

Polyzêtas

$$\zeta(s_1, s_2, \ldots, s_d) = \sum_{k_1 > k_2 > \cdots > k_d \geq 1} \frac{1}{k_1^{s_1} k_2^{s_2} \cdots k_d^{s_d}}, \quad s_1 \geq 2, s_2 \geq 1, \ldots, s_d \geq 1.$$

• Il y a 2^{p-2} polyzêtas de poids $p := s_1 + s_2 + \cdots + s_d$.
Z_p = le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par les polyzêtas de poids $p \geq 2$.

Conjecture 1

(i) *Pour tout entier* $p \geq 2$, *on a* $\dim_{\mathbb{Q}}(Z_p) = c_p$, *où* $(c_n)_{n\geq 0}$ *est définie par* $c_{n+3} = c_{n+1} + c_n$, $c_0 = 1$, $c_1 = 0, c_2 = 1$.
(ii) *Les espaces* $\mathbb{Q}$ *et* Z_p, $p \geq 2$, *sont en somme directe sur* $\mathbb{Q}$.

• $\dim_{\mathbb{Q}}(Z_p) \leq c_p \approx 1,32^p$ (Goncharov, Terasoma, $\approx$ 2000).

Il y a c_p polyzêtas de poids p avec $s_j \in \{2, 3\}$. Ils forment un système générateur de Z_p (conjecture d'Hoffman, prouvée par Brown en 2010).

• Conséquence : les nombres $\pi, \zeta(3), \zeta(5), \zeta(7), \ldots$, sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$. On ne sait même pas prouver que $\zeta(3) \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

• $\dim_{\mathbb{Q}}(Z_5) = 2$ équivaut à $\frac{\zeta(5)}{\zeta(3)\zeta(2)} \notin \mathbb{Q}$.

Peut-on se dispenser de construire des problèmes de Padé ?

• À une dimension, une série $\sum_{k=1}^{\infty} Q(k)/(k)_{n+1}^{A}$, $Q \in \mathbb{Q}[X]$, se décompose facilement en $P_0(1) + \sum_{k=2}^{A} P_k(1)\zeta(k)$. L'annulation de certains des $P_k(1)$ est (relativement) facile à démontrer.

• Avec Cresson et Fischler (2008), nous avons montré que toute série

$$\sum_{k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_d \geq 1} \frac{Q(k_1, k_2, \ldots, k_d)}{(k_1)_{n+1}^{A_1}(k_2)_{n+1}^{A_1} \cdots (k_d)_{n+1}^{A_d}}, \quad Q \in \mathbb{Q}[X_1, X_2, \ldots, X_d]$$

est une $\mathbb{Q}$-combinaison linéaire de polyzêtas de poids $\leq \sum_{j=1}^{d} A_j$. Les annulations de coefficients sont quasi impossibles à démontrer.

• Nous avons construit avec difficulté des séries multiples s'exprimant avec peu de polyzêtas. Par exemple, pour tout $n \geq 0$,

$$\sum_{k \geq \ell \geq 1} \Big(k + \frac{1}{2}\Big)\Big(\ell + \frac{1}{2}\Big) \frac{(k - \ell - n)_{2n+1}(k + \ell)_{2n+1}}{(k)_{n+1}^{4}(\ell)_{n+1}^{4}}$$
$$\in \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\zeta(3) + \mathbb{Q}\zeta(5) + \mathbb{Q}\zeta(7) + \mathbb{Q}\big(\zeta(5,3) - \zeta(3,5)\big).$$

• Les problèmes de Padé permettent le contrôle *a priori* de l'ensemble des polyzêtas et de l'annulation de certains coefficients.

Polylogarithmes multiples

- $b_j \geq 1$, $a_j \in \{s, \ell\}$. Entre k_j et k_{j+1} : $\gtrsim$ est $>$ si $a_j = s$, et $\geq$ si $a_j = \ell$.

$$\mathrm{Li}^{a_1 a_2 \cdots a_{d-1}}_{b_1, b_2, \ldots, b_d}(z) = \sum_{k_1 \gtrsim k_2 \gtrsim \cdots \gtrsim k_d \geq 1} \frac{z^{k_1}}{k_1^{b_1} k_2^{b_2} \cdots k_d^{b_d}}, \qquad \mathrm{Li}_{\emptyset}(z) = 1.$$

$$\mathrm{Li}^{s}_{1,1}(z) = \sum_{k_1 > k_2 \geq 1} \frac{z^{k_1}}{k_1 k_2} = \frac{1}{2} \log(1-z)^2$$

$$\mathrm{Li}^{\ell}_{1,1}(z) = \sum_{k_1 \geq k_2 \geq 1} \frac{z^{k_1}}{k_1 k_2} = \mathrm{Li}_2(z) + \frac{1}{2} \log(1-z)^2$$

$$\zeta^{a_1 a_2 \cdots a_{d-1}}_{b_1, b_2, \ldots, b_d} = \sum_{k_1 \gtrsim k_2 \gtrsim \cdots \gtrsim k_d \geq 1} \frac{1}{k_1^{b_1} k_2^{b_2} \cdots k_d^{b_d}}, \quad \zeta^{ss\cdots s}_{b_1, b_2, \ldots, b_d} = \zeta(b_1, b_2, \ldots, b_d).$$

- Il existe une fonction poids $\omega^{\mathbf{a}}_{\mathbf{b}}(x)$ continue sur $]0,1[$, à singularité une puissance de $\log(x)$ en $x = 0$ et de $\log(1-x)$ en $x = 1$, et telle que

$$\mathrm{Li}^{\mathbf{a}}_{\mathbf{b}}\left(\frac{1}{z}\right) = \int_0^1 \frac{\omega^{\mathbf{a}}_{\mathbf{b}}(x)}{z - x} dx.$$

Problème de Sorokin pour $\zeta^{\ell}_{2,1}$

- Pour tout $n \geq 0$, il s'agit de résoudre le problème de Padé :

$$S(z) = P_3(z)\,\mathrm{Li}^{\ell}_{2,1}\left(\frac{1}{z}\right) + P_2(z)\,\mathrm{Li}^{\ell}_{1,1}\left(\frac{1}{z}\right) + P_1(z)\,\mathrm{Li}_1\left(\frac{1}{z}\right) + P_0(z) = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right)$$

$$P_3(z)\,\mathrm{Li}_1(1-z) + P_2(z) = O((1-z)^{n+1})$$

$$P_3(z)\,\mathrm{Li}_2(1-z) + P_1(z) = O((1-z)^{n+1}).$$

Théorème 2 (Sorokin, 1996)

Pour tout entier $n \geq 0$, ce problème a une solution non-triviale, unique à constante multiplicative près.

$$S(z) = z^{n+1} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n y^n(1-y)^n w^n(1-w)^n}{(z-xy)^{n+1}(z-xyw)^{n+1}} dxdydw.$$

$$S(1) = P_3(1)\zeta^{\ell}_{2,1} + P_0(1).$$

- Conséquence : Irrationalité de $\zeta^{\ell}_{2,1} = 2\zeta(3)$. On retrouve les suites d'Apéry.

Problème de Sorokin pour π^2

- Pour tous $n, r \geq 0$, il s'agit de résoudre le problème de Padé :

$$S(z) = \sum_{k=0}^{r} \left[A_k(z) \,\mathrm{Li}_{\{2\}_{k+1}}^{\{s\}_k}\left(\frac{1}{z}\right) + B_k(z)\,\mathrm{Li}_{1\{2\}_k}^{\{s\}_k}\left(\frac{1}{z}\right) \right] + C(z)$$

$$= O\left(\frac{1}{z^{(r+1)(n+1)}}\right)$$

$$\sum_{k=j}^{r} (-1)^k \left[A_k(z)\,\mathrm{Li}_{\{1\}_{2k-2j+1}}^{\{s\ell\}_{k-j}}(1-z) + B_k(z)\,\mathrm{Li}_{\{1\}_{2k-2j}}^{\{\ell s\}_{k-j-1}\ell}(1-z) \right]$$

$$= O((1-z)^{n+1}), \quad j = 0, \ldots, r.$$

- La condition en $z = 1$ implique que

$$B_k(1) = 0, \quad k = 0, \ldots, r.$$

$$\zeta_{\{2\}_{k+1}}^{\{s\}_k} = \frac{\pi^{2k+2}}{(2k+3)!}.$$

$$S(1) = C(1) + \sum_{k=0}^{r} A_k(1) \frac{\pi^{2k+2}}{(2k+3)!}.$$

Problème de Sorokin pour π^2, suite

Théorème 3 (Sorokin, 1996)

Pour tous entiers $n, r \geq 0$, ce problème a une solution non-triviale, unique à constante multiplicative près.

$$S(z) = \int_{[0,1]^{2r+2}} \prod_{j=1}^{r+1} \frac{x_j^n(1-x_j)^n y_j^n(1-y_j)^n}{\left(\frac{z}{x_1 y_1 \cdots x_{j-1} y_{j-1}} - x_j y_j\right)^{n+1}} \mathrm{d}x_j \mathrm{d}y_j.$$

• Conséquence en $z = 1$: Transcendance de π.

• La preuve du théorème 3 se fait par récurrence sur $r \geq 0$. Pour $r = 0$, ce problème est exactement le problème de Beukers sur $\zeta(2)$. On sait relever les identités intégrales de r à $r+1$.

Problème en poids impair

- Fischler-R (2013) : Pour tous entiers $n, r \geq 0$, on veut résoudre le problème

$$S(z) = \sum_{k=0}^{r} \left[A_k(z)\,\mathrm{Li}_{2\{1\}_{2k+1}}^{\{\ell s\}_k \ell}\left(\frac{1}{z}\right) + B_k(z)\,\mathrm{Li}_{\{1\}_{2k+2}}^{\{\ell s\}_k \ell}\left(\frac{1}{z}\right) \right.$$

$$\left. + C_k(z)\,\mathrm{Li}_{\{1\}_{2k+1}}^{\{s\ell\}_k}\left(\frac{1}{z}\right) \right] + D(z) = O\Big(\frac{1}{z^{(r+1)(n+1)}}\Big)$$

$$\sum_{k=j}^{r} A_k(z)\,\mathrm{Li}_{1\{2\}_{r-k}}^{\{\ell\}_{r-k}}(1-z) + B_j(z) = O\big((1-z)^{n+1}\big), \quad j = 0, \dots, r$$

$$\sum_{k=j}^{r} A_k(z)\,\mathrm{Li}_{\{2\}_{r-k+1}}^{\{\ell\}_{r-k}}(1-z) + C_j(z) = O\big((1-z)^{n+1}\big), \quad j = 0, \dots, r.$$

- Pour $r = 0$, c'est le problème de Sorokin pour $\zeta(3)$.
- Les conditions en $z = 1$ donnent $B_k(1) = C_k(1) = 0$, $k = 0, \dots, r$.

$$\zeta_{2\{1\}_{2k+1}}^{\{\ell s\}_k \ell} = 2\zeta(2k+3).$$

$$S(1) = D(1) + 2\sum_{k=0}^{r} A_k(1)\zeta(2k+3).$$

Problème en poids impair, suite

Théorème 4 (Fischler-R, 2013)

Pour tous entiers $n, r \geq 0$, ce problème a une solution non-triviale, unique à constante multiplicative près.

$$S(z) = z^{(r+1)(n+1)} \times$$

$$\int_{[0,1]^{2r+3}} \frac{u_0^{(r+1)(n+1)-1}(1-u_0)^n \prod_{j=1}^{r+1} \left((u_j v_j)^{(r-j+2)(n+1)-1}(1-u_j)^n(1-v_j)^n\right)}{\prod_{j=1}^{r+1} \left((z-u_0u_1v_1\cdots u_{j-1}v_{j-1}u_j)^{n+1}(z-u_0u_1v_1\cdots u_jv_j)^{n+1}\right)} \mathbf{dudv}.$$

• On dérive $n+1$ fois $S(z)$. À l'aide des conditions en $z=1$ puis grâce au changement de variable $z \to 1-z$, on tombe sur le problème de Padé de Sorokin pour π^2 de niveau r.

• Conséquences : Irrationalité de $\zeta(3)$ ($r=0$). Ce problème ne permet pas de montrer qu'il y a une infinité de $\zeta(2k+1)$ irrationnels. On obtient cependant une nouvelle preuve de la conjecture de Vasilyev (1996).

Démonstration du théorème 4 pour $r = 0$

- On résout le problème de Sorokin pour $\zeta^{\ell}_{2,1}$ grâce à celui de Beukers pour $\zeta(2)$.

$$S(z) = A_n(z)\,\mathrm{Li}^{\ell}_{2,1}\left(\frac{1}{z}\right) + B_n(z)\,\mathrm{Li}^{\ell}_{1,1}\left(\frac{1}{z}\right) + C_n(z)\,\mathrm{Li}_1\left(\frac{1}{z}\right) + D_n(z) = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right)$$

$$U(z) = B_n(z) + A_n(z)\,\mathrm{Li}_1(1-z) = O((1-z)^{n+1})$$

$$V(z) = C_n(z) + A_n(z)\,\mathrm{Li}_2(1-z) = O((1-z)^{n+1}).$$

- Les fonctions poids

$$\omega^{\ell}_{2,1}(x) = \mathrm{Li}_2(1-x) + \mathrm{Li}_1(x)\,\mathrm{Li}_1(1-x), \quad \omega^{\ell}_{1,1}(x) = \mathrm{Li}_1(x), \quad \omega_1(x) = 1$$

sont holomorphes en $x = 0$. Noter que $\omega^{\ell}_{2,1}(x) = \zeta(2) - \mathrm{Li}_2(x)$.

- Conséquences :

$$V(z) + U(z)\,\mathrm{Li}_1(z) = A_n(z)\omega^{\ell}_{2,1}(z) + B_n(z)\omega^{\ell}_{1,1}(z) + C_n(z)\omega_1(z)$$

est holomorphe en $z = 0$ et

$$S(z) = \int_0^1 \frac{V(x) + U(x)\,\mathrm{Li}_1(x)}{z - x}\,dx.$$

• Une fonction poids se dérive comme le polylogarithme multiple qu'elle représente. Ici

$$\frac{d}{dx}\omega^{\ell}_{2,1}(x) = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}\omega^{\ell}_{1,1}(x), \quad \frac{d}{dz}\Big(\operatorname{Li}^{\ell}_{2,1}\left(\frac{1}{z}\right)\Big) = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{z}}\operatorname{Li}^{\ell}_{1,1}\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$\frac{d}{dx}\omega^{\ell}_{1,1}(x) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1-x}}\omega_{1}(x), \quad \frac{d}{dz}\Big(\operatorname{Li}^{\ell}_{1,1}\left(\frac{1}{z}\right)\Big) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1-z}}\operatorname{Li}_{1}\left(\frac{1}{z}\right).$$

• Conséquences :

$$S^{(n+1)}(z) = \frac{\widetilde{A}_{2n+1}(z)}{z^{n+1}(1-z)^{n+1}}\operatorname{Li}^{\ell}_{1,1}\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{\widetilde{B}_{2n+1}(z)}{z^{n+1}(1-z)^{n+1}}\operatorname{Li}_{1}\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{\widetilde{C}_{2n+1}(z)}{z^{n+1}(1-z)^{n+1}} = O\left(\frac{1}{z^{2n+2}}\right)$$

et

$$\big(V(z) + U(z)\operatorname{Li}_1(z)\big)^{(n+1)} = \frac{\widetilde{A}_{2n+1}(z)}{z^{n+1}(1-z)^{n+1}}\operatorname{Li}_1(z) + \frac{\widetilde{B}_{2n+1}(z)}{z^{n+1}(1-z)^{n+1}}.$$

• $U(z)$ et $V(z) = O((1-z)^{n+1})$ donc $(1-z)^{n+1}$ divise $\widetilde{A}_{2n+1}(z)$ et $\widetilde{B}_{2n+1}(z)$.

• Donc

$$z^{n+1}S^{(n+1)}(z) = \widetilde{A}_n(z)\,\mathrm{Li}_{1,1}^{\ell}\left(\frac{1}{z}\right)+\widetilde{B}_n(z)\,\mathrm{Li}_1\left(\frac{1}{z}\right)+\frac{\widetilde{C}_{2n+1}(z)}{(1-z)^{n+1}} = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right)$$

et

$$z^{n+1}\big(V(z)+U(z)\,\mathrm{Li}_1(z)\big)^{(n+1)} = \widetilde{A}_n(z)\,\mathrm{Li}_1(z)+\widetilde{B}_n(z) = O(z^{n+1}).$$

• On a

$$S^{(n+1)}(z) = c_n\int_0^1 \frac{V(x)+U(x)\,\mathrm{Li}_1(x)}{(z-x)^{n+2}}dx.$$

Les conditions en $z=1$ assurent que $S^{(n+1)}(z)$ a au plus une singularité du type $\log(1-z)^2$ en $z=1$. Donc $(1-z)^{n+1}$ divise aussi $\widetilde{C}_{2n+1}(z)$.

• Finalement $z^{n+1}S^{(n+1)}(z)$ et $z^{n+1}\big(V(z)+U(z)\,\mathrm{Li}_1(z)\big)^{(n+1)}$ donnent le problème de Padé suivant

$$\widetilde{A}_n(z)\,\mathrm{Li}_{1,1}^{\ell}\left(\frac{1}{z}\right)+\widetilde{B}_n(z)\,\mathrm{Li}_1\left(\frac{1}{z}\right)+\widetilde{C}_n(z) = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right)$$

$$\widetilde{A}_n(z)\,\mathrm{Li}_1(z)+\widetilde{B}_n(z) = O(z^{n+1}).$$

- Remarquons que

$$\mathrm{Li}_1\left(\frac{1}{1-z}\right) = -\,\mathrm{Li}_1\left(\frac{1}{z}\right), \quad \mathrm{Li}^{\ell}_{1,1}\left(\frac{1}{1-z}\right) = \mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$\mathrm{Li}_1(1-z) = -\log(z).$$

- En changeant z en $1-z$, le problème précédent devient donc

$$\widehat{A}_n(z)\,\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{z}\right) + \widehat{B}_n(z)\,\mathrm{Li}_1\left(\frac{1}{z}\right) + \widehat{C}_n(z) = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right)$$

$$\widehat{A}_n(z)\log(z) - \widehat{B}_n(z) = O((1-z)^{n+1}).$$

- C'est le problème de Beukers pour $\zeta(2)$, donc

$$S^{(n+1)}(1-z) = (1-z)^{-n-1}\int_0^1\int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n y^n(1-y)^{n+1}}{(z-xy)^{n+1}}\,dxdy.$$

- Un opérateur de primitivation itérée, de type Riemann-Liouville, montre

$$S(z) = z^{n+1}\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n y^n(1-y)^n w^n(1-w)^n}{(z-xy)^{n+1}(z-xyw)^{n+1}}\,dxdydw.$$

Une nouvelle preuve de la conjecture de Vasilyev

- En 1996, Vasilyev a conjecturé que, pour $d \geq 3$ impair,

$$J_d := \int_{[0,1]^d} \frac{\prod_{j=1}^d x_j^n (1-x_j)^n}{Q_d(x_1,\ldots,x_d)^{n+1}} \mathrm{d}x_j \in \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\zeta(3) + \mathbb{Q}\zeta(5) + \cdots + \mathbb{Q}\zeta(d)$$

où $Q_1(x_1) = 1 - x_1$ et

$$\begin{aligned} Q_d(x_1,\ldots,x_d) &= 1 - Q_{d-1}(x_1,\ldots,x_{d-1})x_d, \quad d \geq 2 \\ &= 1 - (1 - (\cdots 1 - (1-x_1)x_2 \cdots)x_{d-1})x_d. \end{aligned}$$

- En faisant $z = 1$ dans le théorème 4, on obtient une nouvelle preuve de cette conjecture, la première étant due à Zudilin en 2001. Pour cela, on utilise des changements de variables obtenus en 2001 par Fischler.

- Lorsque $d = 3$, il s'agit de démontrer que $J_3 = S_0(1)$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} &\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n y^n(1-y)^n z^n(1-z)^n}{(1-(1-(1-x)y)z)^{n+1}} dxdydz \\ &\qquad = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n y^n(1-y)^n z^n(1-z)^n}{(1-xy)^{n+1}(1-xyz)^{n+1}} dxdydz. \end{aligned}$$