E-fonctions et E-opérateurs

Tanguy Rivoal,
CNRS et Université Grenoble Alpes

E et G-fonctions

On fixe un plongement de $\overline{\mathbb{Q}}$ dans $\mathbb{C}$. On note $\mathcal{O}$ l'anneau des entiers de $\overline{\mathbb{Q}}$.

Définition 1

Une E-fonction est une série entière $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{n!} z^n \in \overline{\mathbb{Q}}[[z]]$ telle qu'il existe $C > 0$ vérifiant :

(*i*) *$F(z)$ vérifie une équation différentielle linéaire à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}(z)$.*

(*ii*) *Pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ et tout $n \geq 0$, $|\sigma(A_n)| \leq C^{n+1}$.*

(*iii*) *Il existe une suite d'entiers rationnels $D_n \neq 0$, avec $|D_n| \leq C^{n+1}$, tels que $D_n A_m \in \mathcal{O}$ pour tout $m \leq n$.*

Une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$ est une G-fonction ssi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{n!} z^n$ est une E-fonction.

Propriétés des E et G-fonctions

• Une G-fonction est holomorphe en $z = 0$ mais est non entière (sauf si polynomiale).

L'ensemble des G-fonctions forme un anneau stable par $\frac{d}{dz}$ et $\int_0^z$. Il contient les fonctions algébriques / $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ holomorphes en $z = 0$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{k+n}{k} \Big) z^n$$

et les polylogarithmes $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^s}$.

• Une E-fonction est une fonction entière, transcendante sur / $\mathbb{C}(z)$ (sauf si polynomiale).

L'ensemble des E-fonctions est un anneau stable par $\frac{d}{dz}$ et $\int_0^z$. Il contient les fonctions exponentielle et de Bessel,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{k+n}{k} \Big) \frac{z^n}{n!}$$

L'intersection de ces deux ensembles est réduite à $\overline{\mathbb{Q}}[z]$.

Le théorème d'André-Chudnovsky-Katz, G-opérateurs

Étant donnée une G-fonction $F(z)$, soit un opérateur différentiel $M \in \overline{\mathbb{Q}}[z, \frac{d}{dz}] \setminus \{0\}$ tel que $MF = 0$ et dont l'ordre η est minimal pour F.

Notons $\xi_1, \dots, \xi_p$ les singularités finies de M.

- M est fuchsien, avec des exposants rationnels en tout ξ_j et à ∞.

- Dans $\mathbb{C}$ privé de coupures d'origines les ξ_j, en tout $z = \xi \in \overline{\mathbb{Q}}$, M a une base locale de solutions $F_\ell(z)$ de la forme

$$F_\ell(z) = \sum_{j=1}^{\eta} \Big(\sum_{s \in S} \sum_{k \in K} \alpha_{j,s,k,\ell} \log(z-\xi)^s (z-\xi)^k \Big) G_{j,\xi}(z-\xi), \quad \ell = 1, \dots, \eta$$

où $S \subset \mathbb{N}$ et $K \subset \mathbb{Q}$ sont finis, $\alpha_{j,s,k,\ell} \in \overline{\mathbb{Q}}$.

Les $G_{j,\xi}(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[[z]]$ sont des G-fonctions.

- Si $\xi = \infty$, le même résultat a lieu en remplaçant $z - \xi$ par $1/z$.

M est un G-opérateur.

E-opérateurs

Définition 2 (André, 2000)

Un opérateur différentiel $L \in \overline{\mathbb{Q}}[x, \frac{d}{dx}]$ est un E-opérateur si l'opérateur $\widehat{L} \in \overline{\mathbb{Q}}[z, \frac{d}{dz}]$ obtenu à partir de L en changeant formellement

$$x \to -\frac{d}{dz}, \qquad \frac{d}{dx} \to z$$

est un G-opérateur. $\widehat{L}$ est le transformé de Fourier-Laplace de L.

Motivation. Étant donnée une E-fonction $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{n!} x^n$, il existe un E-opérateur L (d'ordre μ) tel que $LF(x) = 0$. Posons

$$g(z) = \int_0^{\infty} F(x) e^{-xz} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{z^{n+1}} \qquad \text{(Transformée de Laplace de } E\text{).}$$

Alors

$$\left(\left(\frac{d}{dz} \right)^{\mu} \circ \widehat{L} \right) g(z) = 0.$$

Exemple

Soit $L = x(\frac{d}{dx})^2 - (6x-1)\frac{d}{dx} + (x-3)$.

$$\widehat{L} = -\frac{d}{dz}z^2 - \big(-6\frac{d}{dz} - 1\big)z + \big(-\frac{d}{dz} - 3\big)$$

La G-fonction $u(z) = \frac{1}{\sqrt{1-6z+z^2}}$ est solution de $\widehat{L} = 0$.

$\widehat{L}$ est minimal pour u, donc $\widehat{L}$ est un G-opérateur et L est un E-opérateur.

Une solution de $L = 0$ est la E-fonction

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\Big(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}\binom{k+j}{j}\Big)x^k.$$

$$\int_0^{\infty} F(x)e^{-zx}dx = \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\binom{k+j}{j}\Big)\frac{1}{z^{k+1}} = \frac{1}{z}u\Big(\frac{1}{z}\Big).$$

$$\widehat{L}\Big(\frac{1}{z}u\Big(\frac{1}{z}\Big)\Big) = 0.$$

Base de solutions d'un E-opérateur en $z = 0$

Théorème 1 (André, 2000)

(*i*) *Un E-opérateur a au plus 0 et ∞ comme singularités : 0 est régulier et ∞ irrégulier.*

(*ii*) *Un E-opérateur L d'ordre μ a une base de solutions $F_\ell(z)$ en $z = 0$ de la forme*

$$F_\ell(z) = \sum_{j=1}^{\mu} \Big(\sum_{s \in S} \sum_{k \in K} \psi_{j,s,k,\ell} z^s \log(z)^k \Big) E_j(z), \quad \ell = 1, \ldots, \mu$$

où $S \subset \mathbb{Q}$, $K \subset \mathbb{N}$ sont finis, $\psi_{j,s,k,\ell} \in \overline{\mathbb{Q}}$ et les $E_j(z)$ sont des E-fonctions.

Solutions holomorphes des E-opérateurs

Théorème 2 (R-Roques, 2016)

Soit $L \in \overline{\mathbb{Q}}[z, \frac{d}{dz}]$ *un* E*-opérateur d'ordre* μ *avec une base sur* $\mathbb{C}$ *de solutions* **holomorphes** *en* $z = 0$.

Alors L *a une base sur* $\mathbb{C}$ *de solutions de la forme*

$$P_1(z)e^{\beta_1 z} + \cdots + P_\ell(z)e^{\beta_\ell z}$$

pour un entier $\ell \leq \mu$, *des* β_j *dans* $\overline{\mathbb{Q}}^*$, *et des* $P_j(z)$ *dans* $\overline{\mathbb{Q}}[z]$.

Bertrand a donné deux preuves du théorème de Siegel-Shidlovsky au moyen de la méthode des déterminants d'interpolation de Laurent.

Une des deux preuves fonctionne sous l'hypothèse que les solutions du E-opérateur sous-jacent sont holomorphes en $z = 0$.

Il a alors observé que "*cette hypothèse n'est en pratique vérifiée que dans le cas du théorème de Lindemann-Weierstrass*", i.e. de l'indépendance algébrique sur $\mathbb{Q}$ des exponentielles de nombres algbriques indépendants sur $\mathbb{Q}$.

Preuve du théorème 2

$\mathcal{O}$ est l'anneau des entiers de $\overline{\mathbb{Q}}$.

Proposition 1

Soit $\mathcal{L} = \sum_{j=0}^{\mu} A_j(z)\left(\frac{d}{dz}\right)^j \in \overline{\mathbb{Q}}[z, \frac{d}{dz}]$ *avec* $A_\mu(z) \neq 0$. *Soit*

$$F(z-\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n!}(z-\alpha)^n \in \overline{\mathbb{Q}}[[z-\alpha]]$$

une solution locale de $\mathcal{L} = 0$ *en* $z = \alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ *tel que* $A_\mu(\alpha) \neq 0$.

Soit $D_n \geq 1$ *le plus petit entier tel que* $D_n u_0, D_n u_1, \ldots, D_n u_n \in \mathcal{O}$.

Alors il existe un entier $\Delta \geq 1$ *tel que* D_n *divise* Δ^{n+1}.

En multipliant $\mathcal{L}$ par un entier rationnel convenable, on suppose sans perte de généralité que

$$A_0(z), A_1(z), \ldots, A_\mu(z) \in \mathcal{O}[z].$$

Soit $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ tel que $A_\mu(\alpha) \neq 0$. Le vecteur

$$Y(z) = {}^t\big(F(z-\alpha), F'(z-\alpha), \ldots, F^{(\mu-1)}(z-\alpha)\big)$$

vérifie $Y'(z) = C(z)Y(z)$ où

$$C(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\frac{A_0}{A_\mu} & -\frac{A_1}{A_\mu} & \cdots & \cdots & -\frac{A_{\mu-1}}{A_\mu} \end{pmatrix} \in M_\mu(\overline{\mathbb{Q}}(z)).$$

Définissons $C_0(z) = I_\mu$ et $C_{n+1}(z) = C_n(z)C(z) + \frac{d}{dz}C_n(z)$.

$C_n(z) = \frac{1}{A_\mu(z)^n}\widetilde{C}_n(z)$ avec $\widetilde{C}_n(z) \in M_\mu(\mathcal{O}[z])$.

Les degrés des coefficients de $\widetilde{C}_n(z)$ sont $\leq Bn$ pour un certain entier B.

Soit u et $v \in \mathbb{N}^*$ tel que $u\alpha \in \mathcal{O}$ et $\frac{v}{A_\mu(\alpha)} \in \mathcal{O}$.

Alors

$$u^{Bn}v^nC_n(\alpha) = \frac{u^{Bn}v^n\widetilde{C}_n(\alpha)}{A_\mu(\alpha)^n} \in M_\mu(\mathcal{O}).$$

Par ailleurs

$$Y(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n(\alpha)}{n!}(z-\alpha)^n\right) Y(\alpha).$$

Soit $w \in \mathbb{N}^*$ tel que les composantes de $wY(\alpha)$ soient dans $\mathcal{O}$. Alors le n-ième coefficient de Taylor de chaque composante de $Y(z)$, dont $F(z-\alpha)$, est dans

$$\frac{1}{n!w(u^Bv)^n}\,\mathcal{O}.$$

On peut prendre $D_n = w(u^Bv)^n$ et $\Delta = \mathrm{ppcm}(w, u^Bv)$.

Conséquence. En tout $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^*$, notre E-opérateur L "spécial" a une base de solutions $F_1(z-\alpha), \ldots, F_\mu(z-\alpha)$ telle que chaque $F_j(z)$ est une E-fonction.

Posons $F_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{n!} z^n$. Alors $G(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{z^{n+1}}$ est une G-fonction (en $1/z$).

Il suffit de montrer que $G(z) \in \overline{\mathbb{Q}}(z)$.

De $L\big(F(z-\alpha)\big)=0$, on déduit que

$$\widehat{L}\big(e^{-\alpha z}G(z)\big)=e^{-\alpha z}P(z), \qquad P(z)\in\overline{\mathbb{Q}}[z].$$

Notons S l'ensemble des singularités de G dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Soit $[\gamma]\in\pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\setminus S, z_0)$ et $[\gamma]G$ le prolongement analytique de G le long de $[\gamma]$. Alors

$$[\gamma]G(z)-G(z)=e^{\alpha z}\varphi(z)$$

où φ est solution de $\widehat{L}=0$.

Supposons que $\varphi\neq 0$.

$\widehat{L}$ est un G-opérateur, donc fuchsien. Ainsi φ a une croissance modérée à ∞. Comme $\alpha\neq 0$, $e^{\alpha z}\varphi(z)$ a donc croissance exponentielle à ∞ dans une certaine direction.

Mais G est une G-fonction donc elle a croissance modérée au voisinage de chaque $s\in S$. Il en est de même pour $[\gamma]G-G$, en particulier à ∞.

Contradiction.

Donc $[\gamma]G=G$: la monodromie de G est triviale. $G(z)\in\overline{\mathbb{Q}}(z)$.