Quelques aspects classiques et modernes de la théorie des nombres transcendants

Tanguy Rivoal

Institut Fourier, CNRS et Université Grenoble Alpes

École de Théorie des nombres Ethén

CIRM, 6-10 octobre 2025

Critères d'irrationalité

Expliciter une suite de rationnels α_n qui converge vers un réel α donné peut être difficile mais cela ne dit rien sur la nature arithmétique de ce nombre.

Pour démontrer l'irrationalité d'un réel α, on a besoin de plus d'informations sur la suite $\alpha_n = p_n/q_n$ avec $p_n, q_n \in \mathbb{Z}$.

Critère d'irrationalité. *Soient α un réel et $(p_n)_{n\geq 0}$, $(q_n)_{n\geq 0}$ deux suites d'entiers tq*

$$\forall n \geq 0, \quad q_n\alpha - p_n \neq 0$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} |q_n\alpha - p_n| = 0.$$

Alors $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

Critère d'irrationalité généralisé. *On se donne $m \geq 1$ réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ et $m+1$ suites d'entiers $(p_{k,n})_{n\geq 0}$ tq*

$$0 < |p_{0,n} + p_{1,n}\alpha_1 + p_{2,n}\alpha_2 + \cdots + p_{m,n}\alpha_m| \to 0$$

quand $n \to +\infty$. Alors un au moins des α_j est irrationnel.

S'il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha_j = \beta^j$, alors $\beta \notin \mathbb{Q}$.

Approximants de Padé

• Étant donnés $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathbb{C}[[z]]$ et des entiers $p, q \geq 0$,

$\exists$ P et $Q \in \mathbb{C}[z]$ de degrés respectifs $\leq p$ et $\leq q$, tq P ou $Q \neq 0$ et

$$Q(z)F(z) - P(z) = c\, z^{p+q+1} + c' z^{p+q+2} + \cdots = \mathcal{O}(z^{p+q+1}).$$

• Considérons les coefficients de Q comme des inconnues. Le problème revient à résoudre un système linéaire homogène ayant une inconnue de plus que d'équations. P est attaché à Q de manière unique. Il y a donc une solution non-triviale.

• Les polynômes P et Q ne sont pas forcément uniques.

La fraction P/Q est unique (sous forme réduite). C'est l'approximant de Padé $[p/q]$ de F.

• Les approximants de Padé sont de bonnes approximations rationnelles *fonctionnelles* de F.

Si $F(z) \in \mathbb{Q}[[z]]$, en prenant $z = r \in \mathbb{Q}$, on peut espérer obtenir des bonnes approximations rationnelles *numériques* du nombre $F(r)$.

Approximants de Padé de l'exponentielle

Théorème 1

$\forall n \geq 0$, $\exists\ A_n, B_n \in \mathbb{Z}_n[z]$ *tq*

$$B_n(z)e^z - A_n(z) = (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{n!} \int_0^1 x^n(1-x)^n e^{xz}\,dx.$$

A_n/B_n est l'approximant de Padé $[n/n]$ de $\exp(z)$. On évalue des deux façons différentes l'intégrale

$$\int_0^1 P_n(x)e^{xz}\,dx \quad \text{où } P_n(x) = \frac{1}{n!}\left(x^n(1-x)^n\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{n+k}{n}x^k.$$

Corollaire 1

$\pi \notin \mathbb{Q}$ *(Lambert, 1761) et* $\forall r \in \mathbb{Q}^*$, $e^r \notin \mathbb{Q}$ *(Euler 1737, Fourier, Liouville, Hermite, etc).*

Avec $r = a/b \neq 0$, on a $b^n B_n(r)e^r - b^n A_n(r) \in \mathbb{Z}e^r + \mathbb{Z}$ et

$$0 < |b^n B_n(r)e^r - b^n A_n(r)| \ll \frac{(a^2/4b)^n}{n!} \to 0.$$

En posant $z = \pm i\pi$ dans le théorème 1, on obtient $\pi \notin \mathbb{Q}$ au moyen de $e^{\pm i\pi} = -1$.

Approximants de Padé de type I et II

Soient $F_1, \ldots, F_m \in \mathbb{C}[[z]]$.

Approximants de Padé de type I (Hermite-Padé). Étant donnés des entiers $p \geq 0$ et $m \geq 2$,

$\exists\ P_1, \ldots, P_m \in \mathbb{C}[z]$, non tous nuls, tq $\deg(P_j) \leq n$ et

$$\sum_{j=1}^{m} P_j(z) F_j(z) \in \mathbb{C}[[z]]$$

ait un ordre d'annulation au moins $m(n+1) - 1$ en $z = 0$.

Approximants de Padé de type II. Étant donnés des entiers positifs p et q tq $p \geq (m-1)q$,

$\exists\ P_1, \ldots, P_m, Q \in \mathbb{L}[z],\ Q \neq 0$, tq $\deg(P_j) \leq p$, $\deg(Q) \leq m \cdot q$ et

$$Q(z) F_j(z) - P_j(z) \in \mathbb{C}[[z]], \quad 1 \leq j \leq m.$$

ait un ordre au moins $p + q + 1$ en $z = 0$.

Critère d'indépendance linéaire de réels

On utilise souvent les approximants de Hermite-Padé (type I) en conjonction avec le critère suivant.

Proposition 1 (Critère de Siegel)

Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$. *On suppose qu'il existe* m^2 *suites d'entiers* $(p_{j,k,n})_{n\geq 0}$, $1 \leq j, k \leq m$, *et* $(\lambda_n)_{n\geq 0}$, *et des réels* $u > 1, v > 1$ *tq*

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty,$$

$$|p_{j,k,n}| \leq v^{\lambda_n}, \quad j,k = 1,\ldots,m, \quad n \geq 0,$$

$$\left|\sum_{j=1}^{m} p_{j,k,n}\alpha_j\right| \leq u^{\lambda_n}, \quad k = 1,\ldots,m, \quad n \geq 0,$$

et

$$\det\left((p_{j,k,n})_{1\leq j,k\leq m}\right) \neq 0, \quad n \geq 0.$$

Alors la dimension sur $\mathbb{Q}$ *de la famille* $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ *est* $\geq 1 - \ln(u)/\ln(v)$.

Conséquence importante : si $\alpha_j := \beta^j$ et $1 - \ln(u)/\ln(v) \to +\infty$ quand $m \to +\infty$, alors β est transcendant sur $\mathbb{Q}$.

E-fonctions telles que $\exp(z)$: $\lambda_n \sim \ln(n!) \sim n\ln(n)$.

G-fonctions telles que $\log(1-z)$: $\lambda_n \sim n$.

Approximants de Hermite-Padé de l'exponentielle

Théorème 2 (Hermite)

$\forall n \geq 0$, $m \geq 2$ *et* $k = 1, \ldots, m$, $\exists Q_{1,k,n}, \ldots, Q_{m,k,n} \in \mathbb{Q}[z]$ *tq* $\deg(Q_{j,k,n}) \leq n$ *pour* $j \leq k-1$ *et* $\deg(Q_{j,k,n}) \leq n-1$ *pour* $j \geq k$, *et*

$$\sum_{j=1}^{m} Q_{j,k,n}(z) e^{(j-1)z}$$

$$= \frac{z^{mn+k}}{n!^{m-1}} \int_{\substack{x_1 \geq 0, \ldots, x_{m-1} \geq 0 \\ x_1 + \cdots + x_m = 1}} \prod_{j=1}^{m} \left(x_j^n \, e^{(j-1)x_\ell z} \right) dx_1 \cdots dx_{m-1}, \quad k = 1, \ldots, m$$

et

$$\det \left(Q_{j,k,n}(z) \right)_{1 \leq j,k \leq m} = c \cdot z^{mn} \neq 0, \quad c \in \mathbb{C}^*.$$

Conséquence. Prenons $z = 1$. Il existe des suites d'entiers $(p_{j,k,n})_n$ tels que

$$\left| \sum_{j=1}^{m} p_{j,k,n} e^{j-1} \right| \leq \frac{1}{n!^{(m-1)(1+o(1))}}, \quad |p_{j,k,n}| \leq n!^{1+o(1)}, \quad \det \left((p_{j,k,n})_{1 \leq j,k \leq m} \right) \neq 0.$$

Critère de Siegel : la dimension du $\mathbb{Q}$-ev engendré par $1, e, \ldots, e^{m-1}$ est m.

Théorèmes diophantiens classiques sur les valeurs de l'exponentielle

- Autrement dit :

Théorème 3 (Hermite, 1873)

$e \notin \overline{\mathbb{Q}}$.

- Avec $z = \alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, on obtient le

Théorème 4 (Hermite-Lindemann, 1882)

$\forall \alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^*$, $e^\alpha \notin \overline{\mathbb{Q}}$.

$\forall \alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0, 1\}$, $\log(\alpha) \notin \overline{\mathbb{Q}}$. *En particulier,* $\pi \notin \overline{\mathbb{Q}}$ *(Lindemann).*

- Avec les approximants de Hermite-Padé des fonctions $e^{\alpha_1 z}, \ldots, e^{\alpha_k z}$, on obtient plus généralement le

Théorème 5 (Lindemann-Weierstrass, 1885)

(*i*) *Supposons que* $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \overline{\mathbb{Q}}$ *soient* $\mathbb{Q}$*- linéairement indépendants. Alors* $e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_k}$ *sont* $\mathbb{Q}$*-algébriquement indépendants.*

De manière équivalente :

(*ii*) *Soient* $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell \in \overline{\mathbb{Q}}$ *supposés deux à deux distincts. Alors* $e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_\ell}$ *sont* $\overline{\mathbb{Q}}$*-linéairement indépendants.*

Le lemme de Siegel

- En général, on ne connaît pas explicitement les approximants de Hermite-Padé $\sum_{j=1}^{m} P_j(z)F_j(z) = \mathcal{O}(z^{m(n+1)-1})$ d'une famille donnée de séries $F_j(z) \in \mathbb{C}[[z]]$.
- Les $P_j \in \mathbb{C}[z]$ de degré n existent toujours : cela revient à trouver une solution non-nulle d'un système linéaire ayant une inconnue de plus (l'ensemble des coefficients des P_j) que d'équations (les conditions d'annulation des $m(n+1)-1$ premiers coefficients de Taylor).
- On peut néanmoins borner la taille des coefficients des P_j.

Proposition 2 (Lemme de Siegel, 1929)

Soit $(a_{i,j})_{1\leq i\leq p, 1\leq j\leq q}$ une matrice à coefficients dans l'anneau des entiers $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ d'un cdn $\mathbb{K}$. Supposons que $p < q$ ("strictement plus d'inconnues que d'équations"). Il existe $c > 0$ ne dépendant que de $\mathbb{K}$ tq le système linéaire

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{q} a_{1,j}x_j = 0 \\ \quad\vdots \qquad \vdots \\ \sum_{j=1}^{q} a_{p,j}x_j = 0 \end{cases}$$

admette un vecteur solution non-nul ${}^t(x_1, \ldots, x_q) \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}^q$ tq

$$\max_{j=1,\ldots,q} |x_j| \leq c + \left(cq \max_{i,j} |a_{i,j}|\right)^{\frac{p}{q-p}}.$$

Le théorème de Gel'fond-Schneider

Théorème 6 (Gel'fond-Schneider, 1934)

Soient $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{Q}}$ tq $\alpha \neq 0, 1$ et $\beta \notin \mathbb{Q}$. Alors $\alpha^\beta \notin \overline{\mathbb{Q}}$. En particulier, e^π et $2^{\sqrt{2}}$ sont transcendants (Gel'fond 1929, Kuzmin 1930 respectivement).

Preuve de Gel'fond. Supposons $\alpha, \beta, \gamma := \alpha^\beta$ tous dans un cdn $\mathbb{K}$ de degré h. Notons $\rho_1, \ldots, \rho_{q^2}$ les nombres $(\lambda + \mu\beta)\log(\alpha)$ où $\lambda, \mu \in \{1, \ldots, q\}$.

Posons $m := 2h + 2$ et $n := q^2/(2m) \in \mathbb{N}$.

Construction d'une fonction auxiliaire. Posons $R(z) = \sum_{j=1}^{q^2} \omega_j e^{\rho_j z}$, $\omega_j \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$. On a

$$\frac{1}{\log(\alpha)^k} R^{(k)}(\ell) := \sum_{j=1}^{q^2} (\lambda + \mu\beta)^k (\alpha^\lambda \gamma^\mu)^\ell \omega_j \in \overline{\mathbb{Q}}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \forall \ell \in \mathbb{Z}.$$

On demande que $R^{(k)}(\ell) = 0$ pour $k = 0, \ldots, n-1$ et $\ell = 1, \ldots, m$.

Par le lemme de Siegel : $\exists \omega_j \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ non tous nuls tq $|\overline{\omega_j}| \leq c_1^n n^{n/2}$.

$R \not\equiv 0$ car les $e^{\rho_j z}$ sont $\overline{\mathbb{Q}}$-linéairement indépendantes.

Soit p tq $R^{(k)}(\ell) = 0$ pour tout $k = 0, \ldots, p-1$ et $\ell = 1, \ldots, m$ mais $R^{(p)}(\ell_0) \neq 0$ pour au moins un $\ell_0 \in \{1, \ldots, m\}$. Par construction, $p > n$.

On pose $\delta := \frac{1}{\log(\alpha)^p} R^{(p)}(\ell_0) \in \overline{\mathbb{Q}}^*$ et $d \in \mathbb{N}^*$ un dénominateur commun de α, β, γ.

Estimations arithmétiques. On a $d^{p+2mq}\delta \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}^*$ d'où (car $q = \sqrt{2mn} \ll \sqrt{p}$)

$$|N_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}}(\delta)| \geq c_2^{-p}.$$

De plus, $\overline{|\delta|} \leq c_3^p p^p$.

Estimation analytique. La fonction

$$S(z) := p! \frac{R(z)}{(z-\ell_0)^p} \prod_{\ell=1, \ell \neq \ell_0}^{m} \left(\frac{\ell_0 - \ell}{z - \ell}\right)^p$$

est entière et $S(\ell_0) = R^{(p)}(\ell_0) = \log(\alpha)^p \cdot \delta$. Comme de plus

$$S(\ell_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=m(1+p/q)} \frac{S(z)}{z-\ell_0} dz,$$

on en déduit que

$$|\delta| \leq c_4^p p^{\frac{(3-m)p}{2}}.$$

Conclusion. On a

$$c_2^{-p} \leq |N_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}}(\delta)| \leq |\delta| \cdot \overline{|\delta|}^{h-1} \leq c_4^p c_3^{p(h-1)} p^{(\frac{3-m}{2}+h-1)p} \leq c_5^{hp} p^{-p/2}$$

car $m = 2h+2$. Contradiction pour n, donc p, assez grand.

E-fonctions

Définition 1 (Siegel, 1929)

Une E-fonction est une série entière $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n \in \overline{\mathbb{Q}}[[z]]$ *tq*

(*i*) *f est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients dans* $\overline{\mathbb{Q}}(z)$.

(*ii*) $\forall \varepsilon > 0$, *on a* $|\overline{a_n}| \leq n!^{\varepsilon}$ *pour tout* $n > N(\varepsilon)$.

(*iii*) *Il existe une suite d'entiers* $(D_n)_{n \geq 0}$ *tq* $D_n a_m$ *soit un entier algébrique pour tout* $m \leq n$, *et* $1 \leq |D_n| \leq n!^{\varepsilon}$ *pour tout* $n > N(\varepsilon)$.

• On renforce souvent (*ii*) et (*iii*) en demandant qu'il existe $C > 0$ tq $\forall n \geq 0$ on ait (*ii*)′: $|\overline{a_n}| \leq C^{n+1}$ et (*iii*)′: $|D_n| \leq C^{n+1}$. On parle alors de *E*-fonction *stricte* ou de E^*-fonction.

• Conjecturalement, toute *E*-fonction l'est au sens strict. On sait que (*i*) et (*ii*) impliquent (*ii*)'. Le problème restant est (*iii*)′.

• Les *E*-fonctions (strictes) forment un sous-anneau de $\overline{\mathbb{Q}}[[z]]$, stable par $\frac{d}{dz}$ et $\int_0^z$. Ce sont des fonctions entières.

• Les unités de cet anneau sont $\alpha e^{\beta z}$, $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^*$, $\beta \in \overline{\mathbb{Q}}$.

Exemples de E-fonctions

- Les polynômes de $\overline{\mathbb{Q}}[z]$, e^z, la fonction de Bessel

$$J_0(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z/2)^{2n}}{n!^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \binom{2n}{n}}{4^n} \frac{z^{2n}}{(2n)!},$$

$$\sin(z), \quad \cos(z), \quad \int_0^z \frac{\sin(x)}{x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n)!(2n+1)^2},$$

$$h(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) z^n.$$

- $h(z)$ vérifie $zh'''(z) + 2(1-z)h''(z) + (z-3)h'(z) + h(z) = 0$.

- Les fonctions algébriques sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ non polynomiales, $\log(1-z)$, $\tan(z)$, $J_0(\sqrt{z})$, $(1-z)^{\sqrt{2}}$ ne sont pas des E-fonctions.

Théorème 7 (Siegel-Shidlovskii, 1929-1956)

Soient $Y = {}^t(F_1, \dots, F_m)$ *des E-fonctions et* $A \in M_m(\overline{\mathbb{Q}}(z))$ *tq* $Y' = AY$.
Soit $T \in \overline{\mathbb{Q}}[z] \setminus \{0\}$ *un dénominateur de* $A(z)$, *de degré minimal.*
Alors, $\forall \alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ *tq* $\alpha T(\alpha) \neq 0$,

$$\deg \operatorname{tr}_{\overline{\mathbb{Q}}(z)} \overline{\mathbb{Q}}(z)\big(F_1(z), \dots, F_m(z)\big) = \deg \operatorname{tr}_{\overline{\mathbb{Q}}} \overline{\mathbb{Q}}\big(F_1(\alpha), \dots, F_m(\alpha)\big).$$

Lindemann-Weierstrass : Si $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \overline{\mathbb{Q}}$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, $e^{\alpha_1 z}, \dots, e^{\alpha_n z}$ sont $\overline{\mathbb{Q}}(z)$-algébriquement indépendants. De plus,

$$\frac{d}{dz}\begin{pmatrix} e^{\alpha_1 z} \\ \vdots \\ e^{\alpha_m z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\alpha_1 z} \\ \vdots \\ e^{\alpha_m z} \end{pmatrix}, \qquad T(z) = 1.$$

Siegel : J_0 et J_0' sont $\overline{\mathbb{Q}}(z)$-algébriquement indépendantes et

$$\begin{pmatrix} J_0'(z) \\ J_0''(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_0(z) \\ J_0'(z) \end{pmatrix}, \; T(z) = z.$$

Donc $\forall \alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^*$, $J_0(\alpha)$ et $J_0'(\alpha)$ sont algébriquement indépendants.

Esquisse de preuve du théorème de Siegel-Shidlovskii sur $\mathbb{Q}$

• Soient $F_1, \dots, F_m \in \mathbb{Q}[[z]]$ des E-fonctions vérifiant les hypothèses du théorème de Siegel-Shidlovskii. On suppose que $T \in \mathbb{Z}[z]$ et que $\alpha \in \mathbb{Q}$ est tq $\alpha T(\alpha) \neq 0$.

• Lemme de Siegel : $\forall \varepsilon > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists P_{1,n}, \dots, P_{m,n} \in \mathbb{Z}[z]$ de degré $\leq n$ tq $H(P_{j,n}) \ll n!^{1+\varepsilon}$ et

$$R_n(z) := \sum_{j=1}^{m} P_{j,n}(z) F_j(z) = \sum_{k \geq m(n+1)-\varepsilon n-1} \frac{\rho_{k,n}}{k!} z^k, \qquad |\rho_{k,n}| \ll n! k^{\varepsilon n}.$$

• $\forall k \geq 1$, on définit

$$R_{k,n}(z) := \sum_{j=1}^{m} P_{j,k,n}(z) F_j(z)$$

avec $P_{j,k,n} \in \mathbb{Q}[z]$ par $R_{1,n} := R_n$ et $R_{k,n}(z) := T(z) R'_{k-1,n}(z)$.

• Shidlovskii : Supposons $F_1, \dots, F_m$ $\mathbb{Q}(z)$-linéairement indépendantes. Alors $\exists t \ll \varepsilon n$ tq $\forall k \leq m + t$,

$$|R_{k,n}(\alpha)| \ll \frac{1}{n!^{m-1-3\varepsilon m}}, \qquad |P_{j,k,n}(\alpha)| \ll n!^{1+3\varepsilon m}$$

et la matrice

$$(P_{j,k,n}(\alpha))_{1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq m+t}$$

est de **rang maximal** m.

Proposition 3

Fixons $\varepsilon > 0$ *et* $\alpha \in \mathbb{Q}$ *tq* $\alpha T(\alpha) \neq 0$. *Il existe* m^2 *suites d'entiers* $(q_{j,k,n})_n$ *tq*

$$\left| \sum_{j=1}^{m} q_{j,k,n} F_j(\alpha) \right| \ll \frac{1}{n!^{m-1-\varepsilon}}, \quad |q_{j,k,n}| \ll n!^{1+\varepsilon}, \quad \det\left((q_{j,k,n})_{1 \leq j,k \leq m}\right) \neq 0.$$

• Par le critère d'indépendance linéaire de Siegel, on en déduit le

Théorème 8

$\forall\ \alpha \in \mathbb{Q}$ *tq* $\alpha T(\alpha) \neq 0$, *les nombres* $F_1(\alpha), \ldots, F_m(\alpha)$ *sont* $\mathbb{Q}$*-linéairement indépendants.*

• Si $F_1, \ldots, F_m \in \mathbb{K}[[z]]$, une preuve similaire montre "seulement" que, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ tq $\alpha T(\alpha) \neq 0$, la dimension du $\mathbb{K}$-ev engendré par $F_1(\alpha), \ldots, F_m(\alpha)$ est au moins $m/[\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$.

• Cela suffit à démontrer le théorème de Siegel-Shidlovskii en utilisant le fait que les E-fonctions forment un anneau.

G-fonctions

Définition-Proposition 1 (Siegel, 1929)

Une G-fonction est une série entière $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \overline{\mathbb{Q}}[[z]]$ *tq* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ *est une E-fonction stricte.*

f vérifie automatiquement une équation différentielle linéaire sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$.

• Les *G*-fonctions forment un sous-anneau de $\overline{\mathbb{Q}}[[z]]$, stable par $\frac{d}{dz}$ et $\int_0^z$. Elles sont holomorphes en $z = 0$ mais ne sont pas entières (sauf si polynomiales).

• Si $f(z) \in \mathbb{Z}[[z]]$ est holomorphe en $z = 0$ et vérifie une équation différentielle linéaire sur $\mathbb{C}(z)$, elle est une *G*-fonction.

• L'intersection des *E*-fonctions et *G*-fonctions est $\overline{\mathbb{Q}}[z]$.

Conjecture. $\overline{\mathbb{Q}}$ est l'intersection des valeurs de *E*-fonctions et des valeurs des *G*-fonctions aux points algébriques.

Exemples de G-fonctions

- Les fonctions algébriques sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ holomorphes en $z = 0$,

$$\frac{1}{(1-z)^s} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s(s+1)\cdots(s+n-1)}{n!} z^n \quad (s \in \mathbb{Q}),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n+k}{k} \right) z^n = \frac{1}{\sqrt{1-6z+z^2}}.$$

- G-fonctions transcendantes :

$$\arctan(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n^2 \binom{2n}{n}} = 2 \arcsin\left(\frac{z}{2}\right)^2,$$

$$\log(1-z)^s, \qquad \mathrm{Li}_s(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^s}, \quad s \in \mathbb{N}.$$

Théorèmes de Galochkin et Chudnovsky

- Soient $Y = {}^t(F_1, \ldots, F_m) \in \mathbb{Q}[[z]]^m$ et $A \in M_m(\mathbb{Q}(z))$ tq $Y' = AY$.
- $\forall k \geq 0$, on définit $A_k \in M_m(\mathbb{Q}(z))$ par $Y^{(k)} = A_k Y$.
- **Condition de Galochkin**. Soit $T \in \mathbb{Q}[z] \setminus \{0\}$ de degré minimal tq les coefficients de $T^k A_k$ soient dans $\mathbb{Q}[z]$.

On demande que la suite des dénominateurs communs des coefficients des matrices $\frac{1}{k!} T^k A_k$, $k = 0, .., n$, croisse au plus géométriquement en n.

On dit que A est un G-opérateur.

Proposition 4

Supposons que $F_1, \ldots, F_m$ soient des G-fonctions $\mathbb{Q}(z)$-linéairement indépendantes et que A est un G-opérateur.

Soit $a \neq 0$ un entier. Alors $\exists\ u, v > 0$ et m^2 suites d'entiers $(q_{j,k,n})_n$, $1 \leq j, k \leq m$, (dépendant tous de a) tq

$$\left| \sum_{j=1}^{m} q_{j,k,n} F_j(1/a) \right| \ll u^n, \quad |q_{j,k,n}| \ll v^n, \quad \det\left((q_{j,k,n})_{1 \leq j,k \leq m}\right) \neq 0.$$

Si $|a|$ est assez grand, alors $u < 1$.

Théorème 9 (Galochkin, 1974)

Supposons les G-fonctions $F_1, \ldots, F_m$ $\mathbb{Q}(z)$*-linéairement indépendantes et que* A *est un G-opérateur.*

Alors $\forall a \in \mathbb{Z}$ *tq* $|a| > c(F_1, \ldots, F_m) > 0$*, les nombres*

$$F_1(1/a),\ F_2(1/a),\ \ldots,\ F_m(1/a)$$

sont $\mathbb{Q}$*-linéairement indépendants.*

Théorème 10 (Chudnovsky, 1984)

Supposons les G-fonctions $F_1, \ldots, F_n$ $\mathbb{Q}(z)$*-linéairement indépendantes.*

Alors A *est un G-opérateur.*

- La condition de Galochkin et ces deux résultats se généralisent au cas où $F_1, \ldots, F_n \in \overline{\mathbb{Q}}[[z]]$.

- Un opérateur différentiel $L = \sum_{j=0}^{\mu} a_j(z) \frac{d^j}{dz^j} \in \overline{\mathbb{Q}}(z)[\frac{d}{dz}]$ est dit être un G-opérateur lorsque son système différentiel compagnon est un G-opérateur.

Structure des G-opérateurs

Théorème 11 (Chudnovsky, version alternative)

Soient f une G-fonction et $L \in \overline{\mathbb{Q}}(z)[\frac{d}{dz}] \setminus \{0\}$ tq $Lf(z) = 0$ et d'ordre minimal pour f. Alors L est un G-opérateur.

Théorème 12 (André, Chudnovsky, Katz)

Soit $L \in \overline{\mathbb{Q}}(z)[\frac{d}{dz}]$ un G-opérateur d'ordre μ.

L'équation différentielle $Ly(z) = 0$ admet en $z = \alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \cup \{\infty\}$ une $\mathbb{C}$-base de solutions de la forme

$$\sum_{j=1}^{\mu} \big((z-\alpha)^{e_1} P_{j,1}(\log(z-\alpha)) + \cdots + (z-\alpha)^{e_\mu} P_{j,\mu}(\log(z-\alpha))\big) F_j(z-\alpha).$$

où les $e_j \in \mathbb{Q}$, $P_{j,k}(X) \in \overline{\mathbb{Q}}[X]$ et chaque $F_j(z)$ est une G-fonction. Si $\alpha = \infty$, $z - \alpha$ signifie $1/z$.

E-opérateurs

- Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ une E-fonction stricte, avec $|a_n| \leq C^{n+1}$.
- Transformée de Laplace : pour $\mathrm{Re}\,(z) > C$,

$$g(z) := \int_0^{+\infty} f(x) e^{-xz} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \int_0^{+\infty} x^n e^{-zx} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n+1}}.$$

- $g(z)$ est une G-fonction de la variable $1/z$.
- Transformée de Fourier-Laplace des opérateurs différentiels :

$$\mathcal{F} : \mathbb{C}\left[z, \frac{d}{dz}\right] \to \mathbb{C}\left[z, \frac{d}{dz}\right]$$
$$z \mapsto -\frac{d}{dz}, \quad \frac{d}{dz} \mapsto z.$$

Soit $L \in \overline{\mathbb{Q}}[z, \frac{d}{dz}]$ d'ordre μ tq $Lf(z) = 0$: alors

$$\left(\left(\frac{d}{dz}\right)^{\mu} \circ \mathcal{F}(L)\right) g(z) = 0.$$

Définition-Proposition 2 (André, 2000)

$L \in \overline{\mathbb{Q}}[z, \frac{d}{dz}]$ est un E-opérateur si $\mathcal{F}(L) \in \overline{\mathbb{Q}}[z, \frac{d}{dz}]$ est un G-opérateur. Toute E-fonction stricte est annulée par un E-opérateur.

Structure des E-opérateurs

Théorème 13 (André, 2000)

Soit $L \in \overline{\mathbb{Q}}[z, \frac{d}{dz}]$ un E-opérateur d'ordre μ.

La seule singularité finie possible de L est 0.

En $z = 0$, $Ly(z) = 0$ admet une $\mathbb{C}$-base de solutions locales de la forme

$$\sum_{j=1}^{\mu} \left(z^{e_1} P_{j,1}(\log(z)) + \cdots + z^{e_\mu} P_{j,\mu}(\log(z)) \right) E_j(z).$$

où les $e_j \in \mathbb{Q}$, $P_{j,k}(X) \in \overline{\mathbb{Q}}[X]$ et chaque $E_j(z)$ est une E-fonction.

Ce théorème se déduit de celui sur la structure des G-opérateurs. Il a permis à André de donner une nouvelle preuve du théorème de Siegel-Shidlovskii dans le cas strict.

Propriété cruciale. Si une E-fonction stricte $f(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[[z]]$ s'annule en $z = \alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, alors

$$\frac{f(z)}{z - \alpha}$$

est encore une E-fonction. (André 2000 sur $\mathbb{Q}$, Beukers 2006 sur $\overline{\mathbb{Q}}$.)

Théorème 14 (Théorème de relèvement de Beukers, 2006)

Soient $Y = {}^t(F_1, \ldots, F_m)$ *des E-fonctions strictes et* $A \in M_m(\overline{\mathbb{Q}}(z))$ *tq* $Y' = AY$. *Soit* $T(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[z] \setminus \{0\}$ *un dénominateur de* $A(z)$, *de degré minimal. Soit* $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ *tq* $\alpha T(\alpha) \neq 0$ *et* $P \in \overline{\mathbb{Q}}[X_1, \ldots, X_m]$ *(homogène) en* $X_1, \ldots, X_m$ *tq*

$$P\big(F_1(\alpha), \ldots, F_m(\alpha)\big) = 0.$$

Alors, $\exists\ Q \in \overline{\mathbb{Q}}[Z, X_1, \ldots, X_m]$ *(homogène en* $X_1, \ldots, X_m$ *si* P *l'est) tq*

$$Q\big(z, F_1(z), \ldots, F_m(z)\big) = 0 \quad \text{et} \quad Q(\alpha, X_1, \ldots, X_m) = P(X_1, \ldots, X_n).$$

Corollaire 2 (Beukers, 2006)

Supposons que $F_1(z), \ldots, F_m(z)$ *soient* $\overline{\mathbb{Q}}(z)$*-linéairement indépendantes. Alors* $\forall\ \alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ *tq* $\alpha T(\alpha) \neq 0$, *les nombres*

$$F_1(\alpha), \ldots, F_m(\alpha)$$

sont $\overline{\mathbb{Q}}$*-linéairement indépendants.*

Valeurs algébriques exceptionnelles de E-fonctions

• Soit F_1 une E-fonction. Injectons F_1 dans $Y = {}^t(F_1, \dots, F_m)$ vérifiant $Y' = AY$. Soit $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ tq $\alpha T(\alpha) \neq 0$.

1) Si $F_1, \dots, F_m$ sont $\overline{\mathbb{Q}}(z)$-algébriquement indépendantes, alors $F_1(\alpha) \notin \overline{\mathbb{Q}}$.

Si $k := \deg \mathrm{tr}_{\overline{\mathbb{Q}}(z)}\overline{\mathbb{Q}}(z)(F_1(z), \dots, F_m(z)) < m$, alors il existe k nombres transcendants parmi les m nombres $F_1(\alpha), \dots, F_m(\alpha)$. Est-ce que $F_1(\alpha) \notin \overline{\mathbb{Q}}$?

2) On a toujours que $F_1(0) \in \overline{\mathbb{Q}}$. Que se passe-t-il si $T(\alpha) = 0$?

Théorème 15 (Adamczewski-R., 2018)

Il existe un algorithme qui réalise les tâches suivantes.

Étant donnée une E-fonction stricte f en entrée, il détermine si f est transcendante sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ ou pas. Si elle ne l'est pas, il affiche le polynôme f.

Si elle l'est, il affiche la liste finie $\mathrm{Exc}(f)$ *des $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^*$ tq $f(\alpha) \in \overline{\mathbb{Q}}$, et la liste correspondante des valeurs $f(\alpha)$.*

• Par exemple, $\mathrm{Exc}(J_0^{(k)}) = \emptyset$ pour $k = 0, 1, 2, 3$ mais $\mathrm{Exc}(J_0^{(4)}) = \{\pm\sqrt{3}\}$. On a en effet $J_0^{(4)}(\pm\sqrt{3}) = 0$ (Lorch-Muldoon, 1995) et

$$J_0^{(4)}(z) = \frac{3 - z^2}{z^2} J_2(z), \quad \mathrm{Exc}(J_2) = \emptyset$$

(Bostan-R.-Salvy, 2024), en accord avec le théorème de relèvement de Beukers.

Résultats quantitatifs

Théorème 16 (Shidlovskii)

Soit $Y = {}^t(F_1, \dots, F_m) \in \mathbb{Q}[[z]]^m$ *des E-fonctions tq* $Y' = AY$ *avec* $A \in M_m(\mathbb{Q}(z))$. *Supposons* $F_1, \dots, F_m$ $\mathbb{Q}(z)$*-linéairement indépendantes et* $\alpha \in \mathbb{Q}^*$ *non singularité de* A.

Alors $\forall \varepsilon > 0$, $\exists c > 0$ *tq* $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{Z}$ *non tous nuls, on ait*

$$\left| \sum_{j=1}^{m} \lambda_j F_j(\alpha) \right| > \frac{c}{H^{m-1+\varepsilon}} \qquad \text{où } H := \max_{1 \le j \le N} |\lambda_j|.$$

Théorème 17 (Fischler-R., 2024)

Soient $\mathbb{K}$ *un cdn de degré* d *sur* $\mathbb{Q}$, $\alpha \in \mathbb{K}$, *et* $Y = {}^t(F_1, \dots, F_m) \in \mathbb{K}[[z]]^m$ *des E-fonctions tq* $Y' = AY$ *avec* $A \in M_m(\mathbb{K}(z))$.

Alors $\forall \varepsilon > 0$, $\exists c > 0$ *tq* $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ *non tous nuls,*

$$\text{soit } \Lambda := \lambda_1 F_1(\alpha) + \dots + \lambda_m F_m(\alpha) = 0, \quad \text{soit } |\Lambda| > \frac{c}{H^{dm^d - 1 + \varepsilon}},$$

où $H := \max_{1 \le j \le N} \overline{|\lambda_j|}$.

Si $F_1, \dots, F_N$ sont $\overline{\mathbb{Q}}(z)$-linéairement indépendantes et $\alpha \neq 0$ n'est pas une singularité de A, alors le théorème de Beukers implique que $\Lambda \neq 0$.

Résultats quantitatifs, suite

Corollaire 3 (Fischler-R., 2024)

(*i*) *Soient* $f \in \mathbb{K}[[z]]$ *une E-fonction et* $\alpha \in \mathbb{K}$ *un cdn de degré* d. *Supposons que* $f(\alpha) \notin \mathbb{Q}$. *Alors* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists c > 0$ *tq* $\forall (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, *on ait*

$$\left| f(\alpha) - \frac{p}{q} \right| > \frac{c}{q^{dm^d + \varepsilon}},$$

où m *est l'ordre de l'équation diff minimale non-nulle vérifiée par* f.

(*ii*) *En particulier,* $f(\alpha)$ *n'est jamais un nombre de Liouville.*

- $\forall \alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^*$,

$$\left| e^{\alpha} - \frac{p}{q} \right| > \frac{c}{q^{d2^d + \varepsilon}} \quad (m = 1), \qquad \left| J_0(\alpha) - \frac{p}{q} \right| > \frac{c}{q^{d3^d + \varepsilon}} \quad (m = 2). \qquad (1)$$

- e^{α} : Lang-Galochkin $4d^2 + 1$, Kappe $4d^2 - 2d$. Eq. (1) est meilleure lorsque $d \in \{2, 3\}$.

- $J_0(\alpha)$: Siegel $123d^3 + 1$ et 3 pour $d = 1$, Lang-Galochkin $16d^3 + 1$ et Zudilin 2 pour $d = 1$. Eq. (1) est meilleure pour $d \in \{2, 3, 4, 5\}$.