VALEURS ALGÉBRIQUES DE E-FONCTIONS AUX POINTS ALGÉBRIQUES

T. RIVOAL

1. Introduction

On s'intéresse dans cette note aux E-fonctions transcendantes sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ qui prennent des valeurs algébriques en des points algébriques non-nuls. Les premiers exemples qui viennent à l'esprit sont les E-fonctions $F(z)$ de la forme

$$F(z) = \alpha + (z - \xi)G(z)$$

où $\xi \in \overline{\mathbb{Q}}^*$, $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ et $G(z)$ est une E-fonction transcendante quelconque. Les résultats plus précis suivants montrent que ce sont les seuls exemples.

Théorème 1. *Soit $F(z)$ une E-fonction transcendante sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ et $\xi \in \overline{\mathbb{Q}}^*$ tels que $F(\xi) \in \overline{\mathbb{Q}}$. Alors il existe un entier $m \geq 0$, un polynôme $P(X) \in \overline{\mathbb{Q}}[X]$ de degré $\leq m$ et une E-fonction $G(z)$ transcendante tels que*

$$F(z) = P(z - \xi) + (z - \xi)^{m+1}G(z) \quad \text{et} \quad G(\xi) \notin \overline{\mathbb{Q}}.$$

Remarque. Soit μ l'ordre d'un E-opérateur annulant $F(z)$. La preuve ci-dessous montre que $\mu \geq 2$ et que $m \leq \mu - 2$.

On peut renforcer le théorème 1 de la manière suivante.

Théorème 2. *Soit $F(z)$ une E-fonction transcendante sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$. Soit $\xi_1, \ldots, \xi_s$ la liste de tous les nombres algébriques non nuls tels que $F(\xi_j) \in \overline{\mathbb{Q}}$, où l'on suppose que $s \geq 1$. Alors il existe des entiers $m_1, \ldots, m_s \geq 0$, un polynôme $Q(X) \in \overline{\mathbb{Q}}[X]$ de degré $\leq m_1 + \cdots + m_s + s - 1$ et une E-fonction $G(z)$ transcendante sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ tels que*

$$F(z) = Q(z) + \Big(\prod_{j=1}^{s}(z - \xi_j)^{m_j+1}\Big)G(z)$$

et quel que soit $\xi \in \overline{\mathbb{Q}}^\times$, $G(\xi) \notin \overline{\mathbb{Q}}$.

Remarque. Une terminologie possible est de dire que la E-fonction $G(z)$ est *purement transcendante* dans le théorème 2. On explique au début de la démonstration du théorème 2 pourquoi il n'y a bien qu'un nombre fini s de nombres algébriques non nuls ξ tels que $F(\xi) \in \overline{\mathbb{Q}}$. Si $s = 0$, le résultat est trivialement vrai avec $Q(z) = 0$ et $G(z) = F(z)$.

Date: 5 novembre 2020.

2. Démonstration du théorème 1

On commence par la remarque suivante. Soit $\mathcal{L}$ un E-opérateur annulant $F(z)$ (il en existe), d'ordre $\mu \geq 1$ disons. Par la théorie d'André [1], $\mathcal{L}$ n'a que $z=0$ comme singularité finie. Si l'on réécrit l'équation $\mathcal{L}F(z)=0$ sous forme de système différentiel, on obtient donc

$$^t\big(F'(z),\ldots,F^{(\mu)}(z)\big) = M(z)\cdot {}^t\big(F(z),\ldots,F^{(\mu-1)}(z)\big)$$

où $M(z)\in M_\mu\big(\overline{\mathbb{Q}}[z,1/z]\big)$. Par le théorème de Siegel-Shidlovskii, on en déduit que pour pour tout $\xi\in\overline{\mathbb{Q}}^*$, on a

$$\mathrm{degtr}_{\overline{\mathbb{Q}}}\overline{\mathbb{Q}}\big(F(\xi),\ldots,F^{(\mu-1)}(\xi)\big) = \mathrm{degtr}_{\overline{\mathbb{Q}}(z)}\overline{\mathbb{Q}}\big(z,F(z),\ldots,F^{(\mu-1)}(z)\big)\geq 1 \qquad (2.1)$$

puisque $F(z)$ est transcendante. ([1])

Supposons maintenant que $\xi\in\overline{\mathbb{Q}}^*$ soit tel que $F(\xi)=\alpha_0\in\overline{\mathbb{Q}}$. (Notons que cela force $\mu\geq 2$ car si $\mu=1$, $F(\xi)\notin\overline{\mathbb{Q}}$ par (2.1).) Par la Proposition 4.1 page 8 de la version arXiv de [2], il existe une E-fonction $F_1(z)$ (forcément transcendante) telle que

$$F(z)=\alpha_0+(z-\xi)F_1(z).$$

Si $F_1(\xi)\notin\overline{\mathbb{Q}}$, le théorème est démontré. Si au contraire $F_1(\xi)=\alpha_1\in\overline{\mathbb{Q}}$, on applique de nouveau la Proposition 4.1 : il existe une E-fonction transcendante $F_2(z)$ telle que $F_1(z)=\alpha_1+(z-\xi)F_2(z)$, c'est-à-dire

$$F(z)=\alpha_0+\alpha_1(z-\xi)+(z-\xi)^2F_2(z).$$

Si $F_2(\xi)\notin\overline{\mathbb{Q}}$, le théorème est démontré. Sinon, on réapplique la Proposition 4.1, etc. Nous allons montrer que ce procédé s'arrête toujours après un nombre fini d'étapes et que l'on a donc la conclusion attendue : il existe un entier $m\geq 0$, un polynôme $P(X)\in\overline{\mathbb{Q}}[X]$ de degré $\leq m$ et une E-fonction transcendante $G(z)$ tels que

$$F(z)=P(z-\xi)+(z-\xi)^{m+1}G(z) \quad \text{et} \quad G(\xi)\notin\overline{\mathbb{Q}}.$$

Pour cela, supposons *a contrario* que le procédé ne s'arrête jamais. Alors quel que soit $m\geq 0$, il existe un polynôme $P_m(X)\in\overline{\mathbb{Q}}[X]$ de degré $\leq m$ et une E-fonction transcendante $F_{m+1}(z)$ tels que

$$F(z)=P_m(z-\xi)+(z-\xi)^{m+1}F_{m+1}(z) \quad \text{et} \quad F_{m+1}(\xi)\in\overline{\mathbb{Q}} \qquad (2.2)$$

et, par construction, $P_m(z-\xi)=P_{m-1}(z-\xi)+\alpha_m(z-\xi)^m$ pour un certain $\alpha_m\in\overline{\mathbb{Q}}$. L'équation (2.2) est donc simplement le développement de Taylor tronqué à l'ordre m de $F(z)$ en $z=\xi$. On en déduit donc que $F^{(m)}(\xi)=m!\alpha_m\in\overline{\mathbb{Q}}$ pour tout $m\geq 0$. Or ceci est impossible par la minoration ≥ 1 du degré de transcendance (2.1) ci-dessus. En fait, cette même minoration montre que le procédé s'arrête pour un $m\leq\mu-2$.

---

1. Dans cet argument, le point essentiel est que $F(z)$ soit solution d'une équation différentielle dont 0 est la seule singularité finie, afin de pouvoir appliquer le théorème de Siegel-Shidlovskii en tout point algébrique non-nul. Un E-opérateur convient mais ce n'est pas forcément la seule possibilité.

Remarque. Dans l'énoncé de la Proposition 4.1 de la version arXiv de [2] (mais c'est aussi le cas dans la version parue), il est supposé que $\xi \in \mathbb{Q}^*$. Il s'agit d'une coquille et il faut lire $\xi \in \overline{\mathbb{Q}}^*$. En effet, dans la preuve de cette proposition, on commence par changer z en ξz pour se ramener à supposer $\xi = 1$. Ce changement de variable marche tout aussi bien en supposant $\xi \in \overline{\mathbb{Q}}^*$ puisque la E-fonction $f(z)$ considérée est à coefficients algébriques pas forcément rationnels.

3. Démonstration du théorème 2

Comme $F(z)$ est transcendante sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$, elle est par définition $\overline{\mathbb{Q}}(z)$-indépendante de la fonction 1. Comme de plus $F(z)$ est holonome sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$, il existe donc un système différentiel sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ vérifié par des E-fonctions $f_1(z) = 1, f_2(z) = F(z), \ldots, f_m(z)$ telles que toutes les $f_j(z)$ sont $\overline{\mathbb{Q}}(z)$-indépendantes. Alors, par le Corollary 1.4 de [2], pour tout $\xi \in \overline{\mathbb{Q}}$, sauf 0 et éventuellement les singularités du système, les nombres $f_1(\xi) = 1, f_2(\xi) = F(\xi), \ldots, f_m(\xi)$ sont $\overline{\mathbb{Q}}$-indépendants. Il suit en particulier qu'il n'existe qu'un nombre fini de nombres algébriques ξ tels que $F(\xi) \in \overline{\mathbb{Q}}$.

Passons maintenant à la démonstration proprement dire. On commence par appliquer le théorème 1 à $F(z)$ et $\xi = \xi_1$: on obtient

$$F(z) = P_1(z - \xi_1) + (z - \xi_1)^{m_1+1} G_1(z) \tag{3.1}$$

où $P_1(X) \in \overline{\mathbb{Q}}[X]$ est de degré $\leq m_1$, $G_1(z)$ est une E-fonction transcendante telle que si $G_1(\xi) \in \overline{\mathbb{Q}}$ pour un $\xi \in \overline{\mathbb{Q}}^\times$ alors nécessairement $\xi = \xi_j$ pour $j = 2, \ldots, s$. Si $s = 1$, le résultat est démontré.

Si $s \geq 2$, on applique alors le théorème 1 à $G_1(z)$ et $\xi = \xi_2$: on obtient

$$G_1(z) = P_2(z - \xi_2) + (z - \xi_2)^{m_2+1} G_2(z) \tag{3.2}$$

où $P_2(X) \in \overline{\mathbb{Q}}[X]$ est de degré $\leq m_2$, $G_2(z)$ est une E-fonction transcendante telle que si $G_2(\xi) \in \overline{\mathbb{Q}}$ pour un $\xi \in \overline{\mathbb{Q}}^\times$ alors nécessairement $\xi = \xi_j$ pour $j = 3, \ldots, s$. En reportant (3.2) dans (3.1), on obtient que

$$F(z) = P_1(z - \xi_1) + (z - \xi_1)^{m_1+1} P_2(z - \xi_2) + (z - \xi_1)^{m_1+1} (z - \xi_2)^{m_2+1} G_2(z)$$

ce qui démontre le résultat si $s = 2$.

On itère ce procédé jusqu'à épuisement des ξ_j, pour finalement obtenir

$$\begin{aligned} F(z) = P_1(z - \xi_1) &+ (z - \xi_1)^{m_1+1} P_2(z - \xi_2) + \cdots \\ &+ (z - \xi_1)^{m_1+1} (z - \xi_2)^{m_2+1} \cdots (z - \xi_{s-1})^{m_{s-1}+1} P_s(z - \xi_s) \\ &+ (z - \xi_1)^{m_1+1} (z - \xi_2)^{m_2+1} \cdots (x - \xi_s)^{m_s+1} G_s(z) \end{aligned}$$

où $P_s(X) \in \overline{\mathbb{Q}}[X]$ est de degré $\leq m_s$ et $G_s(z)$ est une E-fonction transcendante telle qu'il n'y a aucun $\xi \in \overline{\mathbb{Q}}^\times$ vérifiant $G_s(\xi) \in \overline{\mathbb{Q}}$. Cela démontre le théorème avec

$$\begin{aligned} Q(z) = P_1(z - \xi_1) &+ (z - \xi_1)^{m_1+1} P_2(z - \xi_2) + \cdots \\ &+ (z - \xi_1)^{m_1+1} (z - \xi_2)^{m_2+1} \cdots (z - \xi_{s-1})^{m_{s-1}+1} P_s(z - \xi_s) \end{aligned}$$

et $G(z) = G_s(z)$.

Bibliographie

[1] Y. André, *Séries Gevrey de type arithmétique I. Théorèmes de pureté et de dualité*, Annals of Math. **151** (2000), 705–740.

[2] F. Beukers, *A refined version of the Siegel-Shidlovskii theorem*, Annals of Math. **163** (2006), no. 1, 369–379. http://arxiv.org/pdf/math/0405549.pdf

T. Rivoal, Institut Fourier, Université Grenoble 1, CNRS UMR 5582, 100 rue des Maths, BP 74, 38402 Saint-Martin d'Hères cedex, France.
Tanguy.Rivoal@univ-grenoble-alpes.fr