

Travail d'études et de recherche

Représentation conforme : théorème de Riemann et applications de Schwarz-Christoffel

Julien THIÉBAUT

Encadré par : Tanguy RIVOAL
MASTER 1 DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES
INSTITUT JOSEPH FOURIER
UNIVERSITÉ GRENOBLE-ALPES

Année 2025-2026

Table des matières

1 Définitions	3
1.1 Transformations conformes	3
1.2 Ouvert simplement connexe	5
1.3 Théorème de Montel	6
2 Théorème de représentation conforme de Riemann	6
2.1 Deux lemmes préliminaires	7
2.2 Démonstration du théorème de représentation conforme	8
2.3 Comportement au bord	9
3 Applications de Schwarz-Christoffel	9
3.1 Formule de Schwarz-Christoffel sur le demi-plan	9
3.2 Formule de Schwarz-Christoffel sur le disque	17
3.3 Exemples d'applications de Schwarz-Christoffel	18
4 Ouverts doublement connexes	22
4.1 Équivalence conforme entre ouverts doublement connexes	22
4.2 Formule de Schwarz-Christoffel généralisée	24
A Rappels d'analyse complexe	27

Introduction

L'objectif de ce rapport est l'étude des *transformations conformes*, des applications holomorphes qui ont la propriété de "préservé les angles". Nous verrons d'une part le début de la *classification des ouverts connexes de \mathbb{C}* , à transformation conforme bijective près (c'est-à-dire à biholomorphisme près). D'autre part, nous étudierons les *applications de Schwarz-Christoffel* qui donnent des formules pour envoyer un ouvert avec un bord composé de lignes polygonales sur un ouvert de référence, via une transformation conforme bijective.

Une application courante de ces résultats est la résolution de l'équation de Laplace $\Delta h = 0$, où $h : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction \mathcal{C}^2 sur un ouvert U et $\Delta := \partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2$, à laquelle on rajoute des conditions au bord. On appelle fonction harmonique une solution de cette équation. Par exemple, étant donné U un ouvert de $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ et ϕ une fonction continue sur ∂U le bord de U , le *problème de Dirichlet* consiste à chercher une fonction h vérifiant

1. h est harmonique sur U ,
2. h est continue sur $U \cup \partial U$,
3. $h = \phi$ sur ∂U .

Selon [Hen86, p. 224], ce problème admet une unique solution pour U étant le disque unité ou une couronne $\{z \in \mathbb{C} \mid \mu < z < 1\}$ et ϕ quelconque. De plus, cette solution est explicite. Pour résoudre un tel problème sur un ouvert V , une méthode générale consiste à le résoudre sur un ouvert simple U (disque ou couronne par exemple) et de se ramener au cas précédent en utilisant une fonction holomorphe f qui envoie V sur l'ouvert U pour lequel le problème est résolu. En effet, si $\Delta h = 0$, alors $\Delta(h \circ f) = 0$. On voit $f : (x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$ comme une fonction de \mathbb{R}^2 dans lui-même. On note $u_x := \partial_x u$ pour la dérivée de u par rapport à x . L'application f est holomorphe donc d'après les équations de Cauchy-Riemann, $v_y = u_x$ et $v_x = -u_y$ et donc $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$. On calcule alors

$$\begin{aligned}\partial_{xx}^2(h(u, v)) &= u_{xx}h_x + u_x^2h_{xx} - u_xu_yh_{xy} - u_{xy}h_y - u_xu_yh_{xy} + u_y^2h_{yy}, \\ \partial_{yy}^2(h(u, v)) &= u_{yy}h_x + u_y^2h_{xx} + u_xu_yh_{xy} + u_{xy}h_y + u_xu_yh_{xy} + u_x^2h_{yy}, \\ \text{d'où} \quad \Delta(h(u, v)) &= (u_{xx} + u_{yy})h_x + (u_x^2 + u_y^2)(h_{xx} + h_{yy}) = 0.\end{aligned}$$

Pour "transporter" le reste du problème, il s'agit alors d'imposer des conditions sur f , comme par exemple la continuité sur l'adhérence de V dans le cas du problème de Dirichlet.

La section 1 a pour but de définir les notions de base utiles aux sections suivantes. Nous commencerons par définir la notion de transformation conforme, puis celle d'ouvert simplement connexe. Nous énoncerons ensuite le théorème de Montel, qui intervient dans la démonstration du théorème de la section suivante. La section 2 est dédiée au théorème de représentation conforme de Riemann. Nous étudierons d'abord deux lemmes préliminaires, avant de démontrer ce théorème, puis nous nous intéresserons au comportement au bord d'une transformation conforme bijective entre deux ouverts simplement connexes. Nous nous pencherons alors dans la section 3 sur les applications de Schwarz-Christoffel, formules explicites pour envoyer le demi-plan supérieur ou le disque unité sur un polygone simple. Nous donnerons une démonstration du théorème de Schwarz-Christoffel

en nous appuyant sur le principe de réflexion de Schwarz, et nous exposerons un panel d'exemples. Finalement, nous généraliserons ce qui aura été fait auparavant, à des ouverts doublements connexes, dans la section 4. Nous énoncerons un théorème analogue au théorème de Riemann et évoquerons le cas d'un ouvert multiplement connexe. Nous parlerons alors d'une généralisation de la formule de Schwarz-Christoffel pour un ouvert doublement connexe bordé par des polygones. On trouvera en annexe un recueil de théorèmes classiques d'analyse complexe, utilisés dans ce rapport.

1 Définitions

Dans cette section, nous commençons par introduire les notions de transformation conforme, d'ouvert simplement connexe et énonçons le théorème de Montel.

1.1 Transformations conformes

On considère U un ouvert de \mathbb{C} . On note $\mathcal{H}(U)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur U . On trouve les définitions suivantes dans [Rud87, p. 278, Definition 14.1].

Définition 1.1. Soit $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Alors z définit une direction par rapport à l'origine :

$$A[z] := \frac{z}{|z|}.$$

Soit $z_0 \in U$ et $f \in \mathcal{H}(U)$ non constante, avec U connexe, on dit que f préserve les angles en z_0 si la quantité

$$e^{-i\theta} A[f(z_0 + re^{i\theta}) - f(z_0)] = A \left[\frac{f(z_0 + re^{i\theta}) - f(z_0)}{re^{i\theta}} \right]$$

admet une limite quand r tend vers 0, qui ne dépend pas de θ .

Remarque 1.2.

1. De manière qualitative, f préserve les angles en z_0 si la direction de l'accroissement de f selon le vecteur $e^{i\theta}$, en z_0 , ne dépend pas du vecteur $e^{i\theta}$.
2. Si $f \in \mathcal{H}(U)$ non constante, avec U connexe, alors par le théorème des zéros isolés (théorème A.5), f admet un voisinage V de z_0 tel que $\forall z \in V, f(z) \neq f(z_0)$, et donc $A[f(z_0 + re^{i\theta}) - f(z_0)]$ est bien définie pour $r > 0$ proche de 0.

Proposition 1.3. Soit $f \in \mathcal{H}(U)$ non constante, avec U connexe. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f préserve les angles en z_0 ;
2. $f'(z_0) \neq 0$.

Démonstration. On pose $m := \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid f^{(n)}(z_0) \neq 0\}$, et $a_m := \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}$. Alors m est

fini car f est non constante. Comme f est holomorphe, on a

$$\begin{aligned}
f(z_0 + h) - f(z_0) &\underset{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{C}}}{\sim} a_m h^m, \\
\text{donc } A[f(z_0 + h) - f(z_0)] &\underset{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{C}}}{\sim} A[a_m]A[h]^m, \\
\text{donc } e^{-i\theta} A[f(z_0 + re^{i\theta}) - f(z_0)] &\underset{\substack{r \rightarrow 0 \\ r > 0}}{\sim} e^{-i\theta} A[a_m](e^{i\theta})^m, \\
\text{donc } e^{-i\theta} A[f(z_0 + re^{i\theta}) - f(z_0)] &\underset{\substack{r \rightarrow 0 \\ r > 0}}{\rightarrow} A[a_m]e^{i\theta(m-1)}.
\end{aligned}$$

Ainsi, f préserve les angles en $z_0 \iff A[a_m]e^{i\theta(m-1)}$ ne dépend pas de $\theta \iff m = 1 \iff f'(z_0) \neq 0$. \square

Définition 1.4. On dit que $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ est une transformation conforme si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

1. U est un ouvert connexe (domaine),
2. $f \in \mathcal{H}(U)$,
3. f' ne s'annule pas sur U .

Remarque 1.5. Une fonction holomorphe injective sur un domaine est une transformation conforme. En effet, soit $z_0 \in U$, par le théorème de l'application ouverte (théorème A.8), si $m := \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid f^{(n)}(z_0) \neq 0\}$, alors on peut conjuguer $g := f - f(z_0)$, au voisinage de z_0 , à $\phi_m : z \mapsto z^m$: soit V un voisinage de z_0 , $\psi_1 : V \rightarrow \psi_1(V)$ et $\psi_2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ deux biholomorphismes, tels que $g = \psi_2^{-1} \circ \phi_m \circ \psi_1$. Alors $\phi_m = \psi_2 \circ g \circ \psi_1^{-1}$ est injective, donc $m = 1$ (car le polynôme $X^m - 1$ est scindé à racines simples dans \mathbb{C}), donc $f'(z_0) \neq 0$.

Pour certains auteurs, l'injectivité fait partie de la définition de transformation conforme.

Définition 1.6. Soient D_1, D_2 des domaines de \mathbb{C} . On dit que D_1 et D_2 sont conformellement équivalents s'il existe $f : D_1 \rightarrow D_2$ une transformation conforme bijective. On appelle cette relation la relation d'équivalence conforme.

Remarque 1.7. Ceci définit bien une relation d'équivalence, car alors f est un biholomorphisme.

Exemple 1.8. Parmi les premiers exemples de transformations conformes bijectives, mentionnons les transformations de Möbius, qui sont les fonctions de la forme $f : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, avec $ad - bc \neq 0$. Ces fonctions sont des transformations conformes bijectives de $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ dans lui-même (au sens où f est méromorphe sur $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\}$ et $z \mapsto f(1/z)$ est méromorphe sur $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$, et par convention $1/\infty = 0$ et $1/0 = \infty$). Elles ont la propriété d'envoyer les cercles et les droites sur des cercles ou des droites. En particulier, la transformation de Möbius $\varphi : z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ envoie la droite réelle sur le cercle unité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |\varphi(x)| = \left| \frac{x+i}{x-i} \right| = \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = 1$$

et $\varphi(i) = 0$. Ainsi, φ envoie la composante connexe de i dans $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \widehat{\mathbb{R}}$ sur celle de 0 dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$, donc le demi-plan $\mathbb{H} := \{x + iy \mid x \in \mathbb{R}, y > 0\}$ sur $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, et φ est

holomorphe au sens usuel sur \mathbb{H} . La transformation φ fournit donc un exemple explicite du théorème de représentation conforme de Riemann, où \mathbb{H} est conformellement équivalent à \mathbb{D} . Henrici étudie en détail les transformations de Möbius dans [Hen74, Sections 5.2-4].

1.2 Ouvert simplement connexe

On définit la notion d'ouvert simplement connexe dont on peut penser comme un ouvert "sans trou".

Définition 1.9. Soit U un ouvert connexe de \mathbb{C} . On dit que U est simplement connexe si tout lacet $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ est homotope à un point p_0 , c'est-à-dire qu'il existe $G : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow U$ continue telle que

1. $\forall t \in [a, b], G(0, t) = \gamma(t)$ et $G(1, t) = p_0$,
2. $\forall s \in [0, 1], t \mapsto G(s, t)$ est un lacet.

Exemple 1.10. Soit U un ouvert. On dit que U est étoilé s'il existe $z_0 \in U$ tel que pour tout $z \in U$, on a $[z, z_0] \subset U$. On dit que z_0 est un centre de U . Un ouvert étoilé est simplement connexe, car tout lacet est homotope à un centre de l'étoile par homotopie convexe (voir figure 1). En effet, soit U est un ouvert étoilé, z_0 un centre de U et $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ un lacet. Alors l'application $G : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow U$ définie par $\forall (s, t) \in [0, 1] \times [a, b], G(s, t) := (1 - s) \cdot \gamma(t) + s \cdot z_0$, est une homotopie entre γ et le lacet constant z_0 , à valeur dans U .

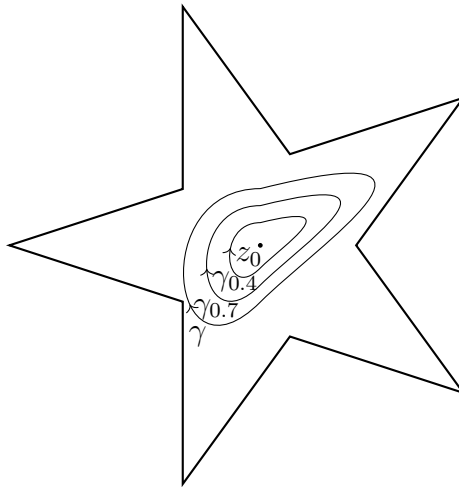


FIGURE 1 – Visualisation de l'homotopie $G \simeq (G(s, \cdot))_{s \in [0, 1]} =: (\gamma_s)_{s \in [0, 1]}$ entre un lacet $\gamma = \gamma_0$ et un lacet constant $z_0 = \gamma_1$.

En revanche, une couronne $C(a, b) := \{z \in \mathbb{C} \mid a < |z| < b\}$, avec $0 < a < b$, n'est pas simplement connexe. En effet, si le lacet défini par $\forall t \in [0, 2\pi], \gamma(t) = \frac{a+b}{2} e^{it} \in C(a, b)$, était homotope à un point $p_0 \in C(a, b)$, alors on aurait $\text{Ind}_\gamma(0) = 1 \neq 0 = \text{Ind}_{p_0}(0)$, où $\text{Ind}_\gamma(0) \in \mathbb{Z}$ est le nombre de tour que fait γ autour de 0 dans le sens trigonométrique. Mais

$$\text{Ind}_\gamma(0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z}$$

et $z \mapsto \frac{1}{z}$ est holomorphe sur $C(a, b)$, donc l'indice est invariant pour deux lacets homotopes dans $C(a, b)$. Donc $\text{Ind}_\gamma(0) = \text{Ind}_{p_0}(0)$, ce qui est absurde.

1.3 Théorème de Montel

On introduit le théorème de Montel, qui est une généralisation partielle du fait qu'une partie fermée bornée d'un espace de dimension finie est un compact.

Définition 1.11. Soit \mathcal{F} une famille de $\mathcal{H}(U)$.

1. On dit que \mathcal{F} est une famille uniformément bornée sur les compacts de U si pour tout compact K de U , il existe $M_K > 0$, tel que pour tout $f \in \mathcal{F}$, $\sup_K |f| \leq M_K$.
2. On dit que \mathcal{F} est une famille normale si de toute suite de \mathcal{F} , on peut extraire une sous-suite qui converge uniformément sur les compacts de U .

Théorème 1.12 (Montel). Si $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(U)$ est une famille uniformément bornée sur les compacts de U , alors \mathcal{F} est une famille normale de $\mathcal{H}(U)$.

On peut trouver une démonstration de ce théorème dans [Rud87, p. 282, Theorem 14.6].

2 Théorème de représentation conforme de Riemann

Le but de cette section est de montrer le théorème fondamental suivant (théorème 2.1), énoncé par Riemann en 1851 et dont une preuve rigoureuse a été donnée pour la première fois par Carathéodory en 1912. On suivra la preuve donnée dans [Rud87, p. 283, Theorem 14.8].

Théorème 2.1 (Représentation conforme). Tout ouvert simplement connexe de \mathbb{C} est soit le plan complexe \mathbb{C} , soit conformellement équivalent au disque unité ouvert $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

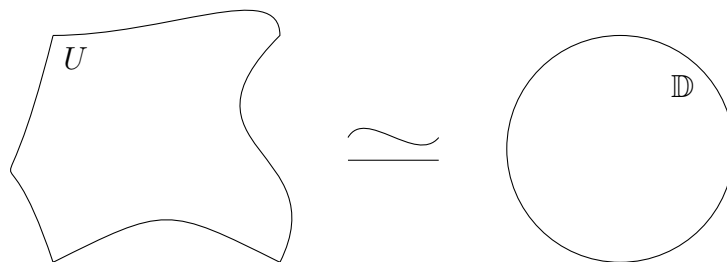


FIGURE 2 – Illustration du théorème 2.1.

Remarque 2.2. Le plan complexe \mathbb{C} ne peut pas être conformellement équivalent au disque unité ouvert \mathbb{D} , car si f est une fonction holomorphe sur \mathbb{C} et est à valeurs dans \mathbb{D} , alors f est bornée donc constante par le théorème de Liouville (théorème A.7).

2.1 Deux lemmes préliminaires

Lemme 2.3. *Si U est un ouvert simplement connexe de \mathbb{C} , alors toute fonction holomorphe $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, qui ne s'annule pas, admet une racine carrée.*

Démonstration. Supposons que U soit un ouvert simplement connexe. Soit $g \in \mathcal{H}(U)$, et soit γ un lacet \mathcal{C}^1 par morceaux à valeur dans U , γ est homotope au point p_0 et g holomorphe, donc par la proposition A.2 on a

$$\int_{\gamma} g = \int_{p_0} g = 0.$$

Ainsi, par la proposition A.1, toute fonction holomorphe sur U admet une primitive. Soit f holomorphe sur U et qui ne s'annule pas. On pose $g := f'/f$. D'après ce qui précède, g admet une primitive G sur U . Pour $z \in U$,

$$(f(z) \exp(-G(z)))' = f'(z) \exp(-G(z)) - f(z) \frac{f'(z)}{f(z)} \exp(-G(z)) = 0.$$

Or U est connexe, donc d'après la proposition A.10, l'application $f \times \exp(-G)$ est constante. De plus, cette fonction ne s'annule pas donc on peut écrire cette constante $\exp(A)$, de sorte que $\exists A \in \mathbb{C}, \forall z \in U, f(z) = \exp(G(z) + A)$. Et donc l'application $z \mapsto \exp(\frac{1}{2}(G(z) + A))$ est une racine carrée de f . \square

Remarque 2.4. Réciproquement, si toute fonction holomorphe $f : U \rightarrow \mathbb{C}^*$ admet une racine carrée, alors U est un ouvert simplement connexe de \mathbb{C} . [Rud87, p. 274, Theorem 13.11].

Lemme 2.5. *Soit U un ouvert simplement connexe de \mathbb{C} , $z_0 \in U$ et f holomorphe sur U , injective et à valeur dans \mathbb{D} . Si f n'est pas surjective, alors il existe g holomorphe sur U , injective et à valeur dans \mathbb{D} , telle que $|g'(z_0)| > |f'(z_0)|$.*

Démonstration. On commence par définir la transformation de Möbius φ_{α} , pour $\alpha \in \mathbb{D}$, par

$$\varphi_{\alpha}(z) := \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}.$$

La fonction φ_{α} est bien définie sur \mathbb{D} et bijective sur son image, d'inverse $\varphi_{-\alpha}$. De plus, par principe du maximum (proposition A.6),

$$\forall z \in \mathbb{D}, |\varphi_{\alpha}(z)| \leq \sup_{|w|=1} |\varphi_{\alpha}(w)| = 1.$$

Donc φ_{α} est un automorphisme de \mathbb{D} .

La fonction f définie dans l'énoncé du lemme n'est pas surjective de U dans \mathbb{D} , donc il existe $\alpha \in \mathbb{D}$ tel que $\alpha \notin f(U)$. Ainsi, la fonction $\varphi_{\alpha} \circ f$ est holomorphe injective de U dans \mathbb{D} et ne s'annule pas, donc admet une racine carrée holomorphe r , qui est injective. On pose $c : z \mapsto z^2$, de sorte que $\varphi_{\alpha} \circ f = c \circ r$. On pose $\beta := r(z_0)$, $F := \varphi_{-\alpha} \circ c \circ \varphi_{-\beta}$ et $g := \varphi_{\beta} \circ r$. De sorte que $f = F \circ g$. Les fonctions F et g sont holomorphes par composition, donc

$$|f'(z_0)| = |F'(g(z_0))| \cdot |g'(z_0)|.$$

La fonction g s'annule en z_0 et est injective. De plus, f est injective donc $|f'(z_0)| > 0$. Donc il suffit de montrer que $|F'(z_0)| < 1$.

La fonction F n'est pas injective sur \mathbb{D} car s ne l'est pas et $\varphi_{-\alpha}$ et $\varphi_{-\beta}$ sont bijectives. On considère $\gamma = F(0)$ de sorte que $\varphi_\gamma \circ F$ soit une fonction holomorphe de \mathbb{D} dans \mathbb{D} qui s'annule en 0 et n'est pas injective. Ainsi, par lemme de Schwarz (lemme A.9), $|(\varphi_\gamma \circ F)'(0)| \leq 1$, et l'inégalité est stricte car sinon $(\varphi_\gamma \circ F)(z) = \lambda z$, où $|\lambda| = 1$, et donc $\varphi_\gamma \circ F$ serait injective. Donc, $1 > |(\varphi_\gamma \circ F)'(0)| = |\varphi'_\gamma(\gamma)| \cdot |F'(0)| = \frac{|F'(0)|}{1-|\gamma|^2}$, d'où $|F'(0)| < 1 - |\gamma|^2 \leq 1$.

La fonction g convient donc en tant que fonction holomorphe injective de U dans \mathbb{D} telle que $|g'(z_0)| > |f'(z_0)|$. □

2.2 Démonstration du théorème de représentation conforme

Soit U un ouvert simplement connexe de \mathbb{C} . On suppose que $U \neq \mathbb{C}$ et on montre que U est conformellement équivalent à \mathbb{D} . On considère $\mathcal{F} := \{f \in \mathcal{H}(U) \mid f(U) \subset \mathbb{D}, f \text{ injective}\}$ et $z_0 \in U$. On va montrer que \mathcal{F} contient une fonction surjective. Pour cela, on considère $s := \sup\{|f'(z_0)| \mid f \in \mathcal{F}\}$, et on montre que s est atteint en $g \in \mathcal{F}$, car d'après le lemme 2.5, g sera holomorphe sur U , injective, à valeur dans \mathbb{D} et surjective. Donc, g transformera conformellement U et \mathbb{D} .

Montrons dans un premier temps que $s > 0$. Pour cela, montrons que \mathcal{F} est non vide, et comme une fonction f holomorphe et injective est telle que $f'(z_0) \neq 0$, on aura $s > 0$. En effet, $\mathbb{C} \setminus U$ est non vide donc contient un certain w . La fonction holomorphe $z \mapsto z - w$ ne s'annule pas sur U , donc par le lemme 2.3, il existe $f \in \mathcal{H}(U)$ telle que $\forall z \in U, f(z)^2 = z - w$. La fonction f est injective car si $f(z_1) = f(z_2)$, alors en élevant au carré, $z_1 - w = z_2 - w$. De plus, f est ouverte donc $f(U)$ contient un disque ouvert de centre a et rayon r , noté $D(a, r)$, avec $0 < r < |a|$, de sorte que $0 \notin D(a, r)$. Ainsi, $D(-a, r)$ n'intersecte pas $f(U)$, car si $z \in D(-a, r) \cap f(U)$, alors $z = f(z_1), z_1 \in U$ et $-z \in D(a, r)$ donc $z = -f(z_2), z_2 \in U$, donc $f(z_1) = -f(z_2)$. Pour la même raison que ce qui précède, $z_1 = z_2$, donc $z = f(z_1) = -f(z_1)$, donc $z = 0 \notin D(-a, r)$, ce qui est absurde. Ainsi, $\forall z \in U, |f(z) + a| > r$, donc la fonction $g : z \mapsto \frac{r}{f(z)+a}$, est bien définie, holomorphe sur U , injective, et à valeurs dans \mathbb{D} . D'où $g \in \mathcal{F}$, et donc $s > 0$.

Montrons maintenant que s est fini. En effet, il existe $r > 0$ tel que $D(z_0, r) \subset U$, donc pour tout $f \in \mathcal{F}$, par l'inégalité de Cauchy (théorème A.12) :

$$|f'(z_0)| \leq \frac{\sup\{|f(z)|, z \in \partial D(z_0, r)\}}{r} \leq \frac{1}{r}.$$

Ainsi, $0 < s \leq 1/r$, donc il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de \mathcal{F} , telle que $f'_n(z_0) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} s$. Or, \mathcal{F} est uniformément bornée par 1, donc par le théorème de Montel (théorème 1.12), \mathcal{F} est une famille normale. On peut donc extraire une sous-suite $(f_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, qui converge uniformément sur les compacts de U vers $f \in \overline{\mathcal{F}}$. Par le théorème de Weierstrass (théorème A.14), f est holomorphe sur U et $(f'_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur les compacts de U vers f' . En particulier, $\forall z \in U, f_{\varphi(n)}(z) \leq 1$ donc $f(z) \leq 1$, et $|f'(z_0)| = s$. Par le théorème de Hurwitz (théorème A.4), les fonctions $f_{\varphi(n)}$ sont holomorphes et injectives, donc f est injective ou constante. Mais, $|f'(z_0)| = s > 0$, donc f n'est pas constante. Finalement, $f \in \mathcal{F}$ et réalise le sup qui définit s . Donc f est une transformation conforme bijective entre U et \mathbb{D} .

2.3 Comportement au bord

D'après le théorème de représentation conforme de Riemann, tout ouvert simplement connexe est conformellement équivalent au disque unité. Un tel ouvert peut avoir un bord très compliqué (fractal par exemple). Il existe cependant une condition nécessaire et suffisante pour qu'un biholomorphisme, du disque unité vers un ouvert simplement connexe, s'étende en une fonction continue sur l'adhérence du disque unité.

Théorème 2.6. *Soit U un ouvert simplement connexe de \mathbb{C} et $f : \mathbb{D} \rightarrow U$ un biholomorphisme. Alors, f s'étend en une application continue de $\overline{\mathbb{D}}$ vers \overline{U} si et seulement si le bord ∂U de U est localement connexe (tout point de ∂U admet un voisinage connexe).*

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une telle extension soit injective a été démontrée par Carathéodory en 1913.

Théorème 2.7 (Carathéodory). *Soit U un ouvert simplement connexe de \mathbb{C} et $f : \mathbb{D} \rightarrow U$ un biholomorphisme. Alors, f s'étend en une application continue injective de $\overline{\mathbb{D}}$ vers \overline{U} si et seulement si le bord ∂U de U peut être paramétré par un chemin continu fermé simple (on dit que ∂U est une courbe de Jordan).*

On peut trouver une démonstration de ces théorèmes dans [Pom92, p. 18], dont l'objet est d'étudier le comportement au bord des applications conformes.

3 Applications de Schwarz-Christoffel

Le but de cette section est d'étudier les applications de Schwarz-Christoffel, qui donnent des formules explicites pour transformer conformellement le demi-plan supérieur ou le disque unité en un polygone. Par la suite, un polygone désignera aussi bien l'intérieur que le bord d'une ligne polygonale. On s'appuiera sur le livre de Driscoll et Trefethen [DT02], qui a pour but de résoudre le problème de représentation de Riemann d'un point de vue numérique. On s'appuiera aussi sur les ouvrages de Nehari [Neh75], de Henrici [Hen86], de Stein [SS03] et de Agarwal [APP11].

3.1 Formule de Schwarz-Christoffel sur le demi-plan

On commence par démontrer un résultat préliminaire qui a été démontré par Schwarz dans le but de démontrer la formule de Schwarz-Christoffel. On s'appuiera sur la preuve donnée dans [SS03, p. 60, Theorem 5.6].

Théorème 3.1 (Principe de réflexion de Schwarz). *Soit U un domaine de \mathbb{C} symétrique par rapport à l'axe des abscisses, $U_+ := U \cap \mathbb{H}$, $F := U \cap \overline{\mathbb{H}}$ et $f : F \rightarrow \mathbb{C}$. On suppose que :*

1. f est holomorphe sur U_+ ,
2. f est continue sur F ,
3. $f(F \cap \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.

Alors, il existe $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe telle que $\forall z \in U_+$, $g(z) = f(z)$.

Démonstration. Pour $z \in U$, on pose $g(z) = f(z)$ si $z \in F$ et $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ sinon. On montre d'abord que g est continue, dans l'optique d'appliquer le théorème de Morera (théorème A.13). On considère F_- la partie de U dans le demi-plan inférieur, et U_- la partie stricte. Ainsi, $F_- := U \setminus U_+$ et $U_- := U \setminus F$. On note alors par commodité $F_+ := F$. La fonction g est continue sur F_+ car f l'est. Comme $f(F_+ \cap \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ et $F_+ \cap \mathbb{R} = F_- \cap \mathbb{R}$, $\forall z \in F_- \cap \mathbb{R}$, $f(z) = \overline{f(\bar{z})}$ donc g est continue sur F_- . De plus, U_\pm sont des ouverts d'adhérence relative F_\pm dans U , donc g est continue sur $F_+ \cup F_- = U$.

Soit maintenant un triangle (convexe fermé) Δ inclus dans U . Premier cas : $\Delta \subset F_+$, la fonction g coïncide avec f sur F_+ et f est holomorphe sur U_+ et continue sur F_+ , donc par le théorème de Goursat (A.11) $\int_{\partial\Delta} g = 0$. Deuxième cas : $\Delta \subset F_-$. On note $\bar{\Delta}$ la réflexion par rapport à la droite réelle du triangle Δ . Ainsi, $\bar{\Delta} \subset F_+$, et on se ramène au cas précédent de la manière suivante :

$$\int_{\partial\Delta} \overline{f(\bar{z})} dz = \overline{\int_{\partial\Delta} f(\bar{z}) dz} = \overline{\int_{\partial\bar{\Delta}} f(z) dz} = 0.$$

Dernier cas : Δ intersecte U_+ et U_- . On coupe alors le triangle en trois autres (qu'on note Δ_i), afin de se ramener aux cas précédents, comme sur la figure 3. Il s'agit de rajouter des segments parcourus dans les deux sens (on note ces lacets S_1 et S_2), ce qui rajoute une contribution nulle à l'intégrale :

$$\int_{\partial\Delta} f = \int_{\partial\Delta} f + \int_{S_1} f + \int_{S_2} f = \int_{\partial\Delta_1} f + \int_{\partial\Delta_2} f + \int_{\partial\Delta_3} f = 0.$$

Ainsi, g vérifie les hypothèses du théorème de Morera et est donc holomorphe.

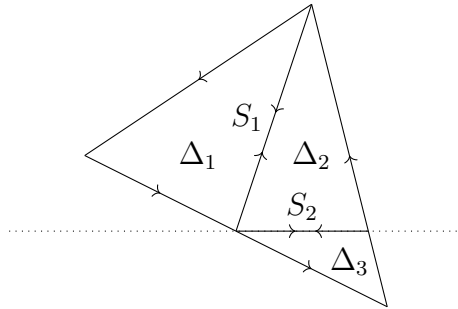


FIGURE 3 – Découpe du triangle entre les deux demi-plans.

Cela conclut la preuve du théorème 3.1. □

Remarque 3.2. Ce théorème se généralise à tout ouvert symétrique par rapport à une droite D quelconque et où $f(F \cap D)$ est inclus dans une droite. Il suffit de conjuguer par des transformations de Möbius qui envoient ces droites sur la droite réelle.

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}_{<0}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit $\log_{-\pi/2}(z) := \text{Log}(-iz) + i\pi/2$, où Log est la détermination principale du logarithme. On définit alors $z^\beta := \exp(\beta \log_{-\pi/2}(z))$.

Théorème 3.3 (Formule de Schwarz-Christoffel sur \mathbb{H}). *Soit $a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} \in \mathbb{R}$ et $\beta_1, \dots, \beta_n \in]0, 1[$ tels que $\sum_{j=1}^n \beta_j = 2$. On définit l'application S à constante près par*

$$S(z) := \int \frac{dz}{(z - a_1)^{\beta_1} \dots (z - a_{n-1})^{\beta_{n-1}}}$$

Alors, l'application S réalise une transformation conforme bijective du demi-plan \mathbb{H}

vers l'intérieur du polygone convexe dont les sommets sont $b_j := S(a_j)$ pour $j \in \{1, \dots, n-1\}$ et $b_n = S(\infty)$, et les angles intérieurs aux sommets b_j sont $\pi(1 - \beta_j)$. De plus, l'application S est un homéomorphisme de $\mathbb{H} \cup \widehat{\mathbb{R}}$ vers le polygone fermé $b_1 b_2 \dots b_n$, qui est convexe.

Réciproquement, soit f une application bijective qui transforme conformellement le demi-plan \mathbb{H} vers l'intérieur d'un polygone à n sommets, pas nécessairement convexe, dont les angles intérieurs aux sommets sont $\pi(1 - \beta_j)$, où $\beta_j \in]-1, 1[$. Alors, il existe $a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que f est de la forme

$$f(z) = C \int \frac{dz}{(z - a_1)^{\beta_1} \dots (z - a_{n-1})^{\beta_{n-1}}}$$

où C est une constante complexe non nulle.

3.1.1 Démonstration du sens direct

On s'appuiera sur [Ser24] pour compléter les démonstrations données dans [Neh75, p. 189] et [APP11, p. 275].

Démonstration. L'application S est bien définie et est une transformation conforme sur \mathbb{H} en tant que primitive d'une fonction holomorphe qui ne s'annule pas sur un ouvert simplement connexe (définition 1.4). De plus, $\beta_j < 1$ pour $1 \leq j \leq n-1$, donc S est continue en les a_j , et donc sur $\mathbb{H} \cup \mathbb{R}$. On va montrer la continuité en ∞ (c'est-à-dire la continuité de $z \mapsto S(1/z)$ en 0). Un raisonnement similaire permettrait de justifier la continuité en les a_j . On remarque d'abord que pour $z \in \mathbb{H} \cup \mathbb{R} \setminus \{a_1, \dots, a_{n-1}\}$, on a

$$\frac{1}{(z - a_1)^{\beta_1} \dots (z - a_{n-1})^{\beta_{n-1}}} = z^{-\sum_{j=1}^{n-1} \beta_j} \frac{1}{(1 - \frac{a_1}{z})^{\beta_1} \dots (1 - \frac{a_{n-1}}{z})^{\beta_{n-1}}}.$$

Or $\sum_{j=1}^{n-1} \beta_j = 2 - \beta_n$ et de plus,

$$\frac{1}{(1 - \frac{a_1}{z})^{\beta_1} \dots (1 - \frac{a_{n-1}}{z})^{\beta_{n-1}}} \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 1.$$

Donc il existe $R > 0$ tel que

$$\forall |z| \geq R, \quad \left| \frac{1}{(z - a_1)^{\beta_1} \dots (z - a_{n-1})^{\beta_{n-1}}} \right| \leq \frac{2}{|z|^{2-\beta_n}}. \quad (1)$$

Soit maintenant $z_1, z_2 \in \mathbb{H} \cup \mathbb{R}$ tels que $|z_1|, |z_2| \geq R$, en prenant R tel que $z_1, z_2 \notin \{a_1, \dots, a_{n-1}\}$. On considère γ un chemin continu et \mathcal{C}^1 par morceaux reliant z_1 à z_2 , à valeurs dans $\mathbb{H} \cup \mathbb{R} \setminus D(0, R)$. D'après le théorème de Cauchy-Goursat (théorème A.3), l'intégrale suivante ne dépend pas du chemin choisi. On obtient alors l'estimation suivante :

$$|S(z_1) - S(z_2)| = \left| \int_{\gamma} \frac{dz}{(z - a_1)^{\beta_1} \dots (z - a_{n-1})^{\beta_{n-1}}} \right| \leq 2 \int_{\gamma} \frac{|dz|}{|z|^{2-\beta_n}}.$$

On choisit γ le chemin continu constitué de trois morceaux \mathcal{C}^1 γ_1, γ_2 et γ_3 (voir figure 4). Le chemin $\gamma_1 : [R, |z_1|] \rightarrow \mathbb{H} \cup \mathbb{R} \setminus D(0, R)$ relie le cercle de centre 0 et de rayon R à z_1 , en ligne de droite dirigée vers 0 : $\gamma_1(t) = t \frac{z_1}{|z_1|}$. Le chemin $\gamma_2 : [R, |z_2|] \rightarrow \mathbb{H} \cup \mathbb{R} \setminus D(0, R)$ relie le cercle de centre 0 et de rayon R à z_2 , de la même manière : $\gamma_2(t) = t \frac{z_2}{|z_2|}$. On

note $\theta_k := \text{Arg}(z_k) \in]-\pi, 0[$ l'argument de z_k , et on suppose $\theta_1 < \theta_2$. Le chemin $\gamma_3 : [\theta_1, \theta_2] \rightarrow \mathbb{H} \cup \mathbb{R} \setminus D(0, R)$ est l'arc de cercle : $\gamma_3(t) = Re^{it}$. Avec des notations succinctes $\gamma := \widehat{\gamma}_1 * \gamma_3 * \gamma_2$.

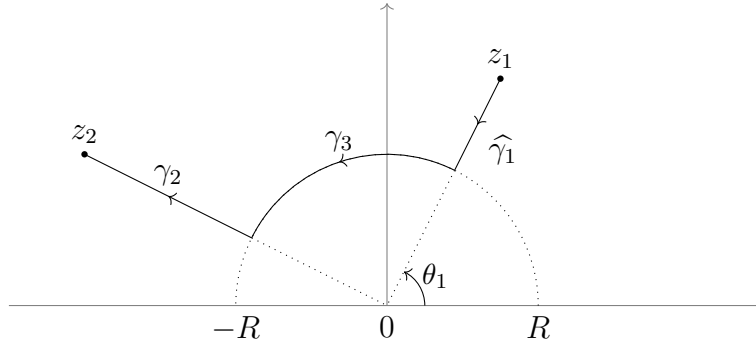


FIGURE 4 – Image du chemin $\gamma := \widehat{\gamma}_1 * \gamma_3 * \gamma_2$ joignant z_1 à z_2 .

On a alors :

$$\int_{\gamma_1} \frac{|dz|}{|z|^{2-\beta_n}} = \int_R^{|z_1|} \frac{\left| \frac{z_1}{|z_1|} \right|}{\left| t \frac{z_1}{|z_1|} \right|^{2-\beta_n}} dt = \left[\frac{t^{\beta_n-1}}{\beta_n-1} \right]_R^{|z_1|} = \frac{1}{(1-\beta_n)} (R^{\beta_n-1} - |z_1|^{\beta_n-1}).$$

Donc,

$$\int_{\gamma_1} \frac{|dz|}{|z|^{2-\beta_n}} \leq \frac{1}{(1-\beta_n)} R^{\beta_n-1}.$$

De même,

$$\int_{\gamma_2} \frac{|dz|}{|z|^{2-\beta_n}} \leq \frac{1}{(1-\beta_n)} R^{\beta_n-1}.$$

Finalement,

$$\int_{\gamma_3} \frac{|dz|}{|z|^{2-\beta_n}} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{|iRe^{it}|}{|Re^{it}|^{2-\beta_n}} dt = (\theta_2 - \theta_1) R^{\beta_n-1}.$$

Ainsi,

$$|S(z_1) - S(z_2)| \leq c \cdot R^{\beta_n-1}$$

où $c > 0$ et $\beta_n - 1 < 0$. Donc par le critère de Cauchy, S admet une limite finie en ∞ , qu'on notera $S(\infty)$. On note $a_n := +\infty$ et $a_0 := -\infty$, afin de noter $a_0 \leq t \leq a_1$ pour désigner $t \leq a_1$, et $a_{n-1} \leq t \leq a_n$ pour désigner $a_{n-1} \leq t$. Précisons que dans notre contexte $\infty = +\infty = -\infty$, et qu'on utilise $\pm\infty$ uniquement pour simplifier les notations.

Nous allons montrer que S envoie bijectivement $\widehat{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ sur le bord du polygone dont les sommets sont b_1, \dots, b_n et les angles intérieurs sont $\pi(1-\beta_1), \dots, \pi(1-\beta_n)$. Pour commencer, soit $k \in \{0, \dots, n-1\}$ et $a_k \leq t \leq a_{k+1}$. Montrons que

$$S(t) - S(a_k) = e^{-i\pi \sum_{j=k+1}^{n-1} \beta_j} |S(t) - S(a_k)|.$$

En effet, pour $s \in \mathbb{R}$ tel que $a_k \leq s \leq t (\leq a_{k+1})$, on a

$$\text{Arg}((s - a_1)^{\beta_1} \dots (s - a_{n-1})^{\beta_{n-1}}) = \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j \text{Arg}(s - a_j) \pmod{2\pi}$$

où Arg est la détermination principale de l'argument (à valeur dans $] -\pi, \pi[$). Par ailleurs, $\text{Arg}(s - a_j) = 0$ si $s \geq a_j$ et $\text{Arg}(s - a_j) = \pi$ sinon. Donc,

$$\text{Arg}((s - a_1)^{\beta_1} \dots (s - a_{n-1})^{\beta_{n-1}}) = \pi \sum_{j=k+1}^{n-1} \beta_j \pmod{2\pi}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} S(t) - S(a_k) &= \int_{a_k}^t \frac{ds}{(s - a_1)^{\beta_1} \dots (s - a_{n-1})^{\beta_{n-1}}} \\ &= e^{-i\pi \sum_{j=k+1}^{n-1} \beta_j} \int_{a_k}^t \frac{ds}{|s - a_1|^{\beta_1} \dots |s - a_{n-1}|^{\beta_{n-1}}} \\ &= e^{-i\pi \sum_{j=k+1}^{n-1} \beta_j} |S(t) - S(a_k)|. \end{aligned}$$

Donc si on note $b_0 := b_n = S(\infty)$, alors pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, $b_k \neq b_{k+1}$ (intégrale d'une fonction continue positive non nulle). De plus, on peut composer S avec une similitude, de sorte que ce soit une fonction continue à valeurs réelles sur $[a_k, a_{k+1}]$. Or S est \mathcal{C}^1 sur $]a_k, a_{k+1}[$ et sa dérivée ne s'annule pas. Donc S envoie bijectivement le segment $[a_k, a_{k+1}]$ sur le segment $[b_k, b_{k+1}]$. Pour $t = a_{k+1}$ on observe que le segment $[b_k, b_{k+1}]$ forme un angle $-\pi \sum_{j=k+1}^{n-1} \beta_j$ avec la demi-droite $\mathbb{R}_{\geq 0}$, si on mesure l'angle par rapport au vecteur $b_{k+1} - b_k$. En particulier pour $k = 0$, le segment $[b_0, b_1]$ est horizontal. On en déduit que pour $k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, l'angle entre les vecteurs $b_{k+1} - b_k$ et $b_{k+2} - b_{k+1}$ est $-\pi\beta_{k+1}$. Or cet angle correspond à l'angle extérieur du sommet b_{k+1} du polygone $b_1 b_2 \dots b_n$, c'est-à-dire à π moins l'angle intérieur de b_{k+1} (voir figure). Ainsi, l'image de $\widehat{\mathbb{R}}$ par S est le bord du polygone $b_1 b_2 \dots b_n$ dont les angles intérieurs sont $\pi(1 - \beta_1), \dots, \pi(1 - \beta_n)$.

Ce polygone est convexe car ses angles intérieurs sont entre 0 et π strictement. En outre, les angles $-\pi \sum_{j=k+1}^{n-1} \beta_j$ sont deux à deux distincts pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$. Donc si $k_1 \neq k_2$, les droites portées par les segments $[b_{k_1}, b_{k_1+1}]$ et $[b_{k_2}, b_{k_2+1}]$ se croisent en au plus un point. Si $k_1 = k_2 + 1$ ou $k_2 = k_1 + 1 \pmod{n}$, alors le point de croisement est le sommet commun aux deux segments. Sinon, si le point de croisement existe alors c'est un point extérieur au polygone car celui-ci est convexe. Ainsi, comme on a vu que S envoie bijectivement les segments $[a_k, a_{k+1}]$ sur les segments $[b_k, b_{k+1}]$, on en conclut que S envoie bijectivement $\widehat{\mathbb{R}}$ sur le polygone $b_1 b_2 \dots b_n$.

Montrons que S est injective sur \mathbb{H} . Soit $p \in \mathbb{C} \setminus S(\widehat{\mathbb{R}})$, montrons que le nombre d'antécédents de p par S dans \mathbb{H} est 1. On note ce nombre $a := \text{Card}(S^{-1}\{p\})$. Tout d'abord, considérons la quantité $\text{Ind}_{S(\widehat{\mathbb{R}})}(p)$, où $S(\widehat{\mathbb{R}})$ désigne le chemin $\sigma : \widehat{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{C}$ défini par $\sigma(t) := S(t)$. D'après ce qui précède, le chemin σ est une courbe de Jordan \mathcal{C}^1 par morceaux qui parcourt $S(\widehat{\mathbb{R}})$, le bord d'un polygone convexe, dans le sens trigonométrique. On a donc

$$\text{Ind}_{S(\widehat{\mathbb{R}})}(p) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\sigma} \frac{dw}{w - p} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\widehat{\mathbb{R}}} \frac{S'(z)}{S(z) - p} dz.$$

Supposons que le terme de droite vaille a . On en déduit que $a = \text{Ind}_{S(\widehat{\mathbb{R}})}(p)$, et donc que a vaut 1 si p est à l'intérieur du polygone délimité par $S(\widehat{\mathbb{R}})$ et 0 sinon. Or $a \geq 1$ se traduit de la façon suivante : p admet un antécédent par S dans \mathbb{H} . Donc si $p \in S(\mathbb{H})$ alors $a = 1$, et p est à l'intérieur du polygone délimité par $S(\widehat{\mathbb{R}})$. D'où S est bijective de \mathbb{H} vers l'intérieur du polygone $b_1 b_2 \dots b_n$.

Il reste donc à montrer que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\widehat{\mathbb{R}}} \frac{S'(z)}{S(z) - p} dz = a. \quad (2)$$

Pour démontrer cela, nous allons utiliser le principe de l'argument (théorème A.15), que l'on ne peut néanmoins pas utiliser directement car le "lacet" $\widehat{\mathbb{R}}$ est à valeurs dans $\widehat{\mathbb{C}}$. Pour généraliser le principe de l'argument, il faudrait généraliser le théorème de Cauchy-Goursat (théorème A.3) au cas d'une fonction continue par morceaux et intégrable sur le bord (si le bord est l'image d'un lacet). Selon Walsh [Wal33], le théorème de Cauchy-Goursat s'étend au cas d'une fonction continue au bord, mais ce n'est pas suffisant dans notre contexte. En l'absence d'une généralisation suffisante, nous allons appliquer le principe de l'argument à un contour qui s'approche de $\widehat{\mathbb{R}}$, qui peut se trouver sur $\widehat{\mathbb{R}}$ là où $S'/(S-p)$ est continue, et donc auquel on peut appliquer le "théorème de Cauchy-Goursat" de Walsh.

Soit $\varepsilon > 0$ plus petit que la distance entre les a_k et que le module des $1/a_k$. On considère un lacet γ_ε constitué de demi-cercles autour des a_k , pour $k \in \{1, \dots, n-1\}$, reliés en ligne droite sur \mathbb{R} , ainsi que d'un demi-cercle de centre 0 et rayon $1/\varepsilon$ (voir figure 5). De la sorte, γ_ε est parcouru dans le sens trigonométrique, est à valeurs dans \mathbb{H} et converge simplement vers $\widehat{\mathbb{R}}$.

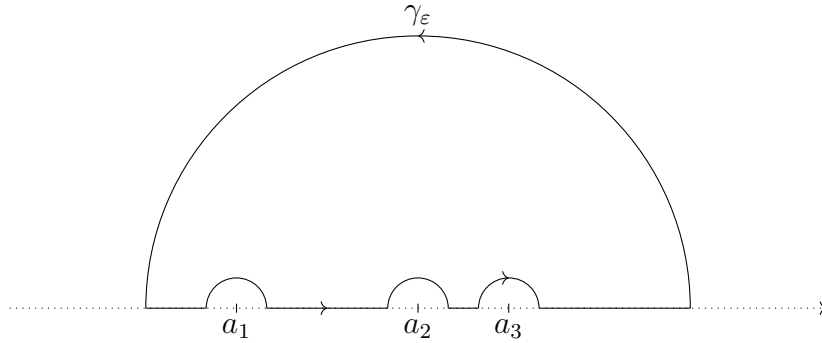


FIGURE 5 – Image du chemin γ_ε pour $a_1 := -2$, $a_2 := 0$, $a_3 := 1$ et $\varepsilon := 1/3$.

Comme $S(\widehat{\mathbb{R}})$ est fermée, on pose $M := d(p, S(\widehat{\mathbb{R}})) > 0$. De plus, S est continue en les a_k et ∞ , donc on peut, quitte à le réduire, supposer ε tel que pour tout z vérifiant $|z - a_k| \leq \varepsilon$ ou $|z| \geq 1/\varepsilon$, on a

$$|S(z) - p| \geq |S(a_k) - p| - |S(a_k) - S(z)| \geq M - M/2 = M/2,$$

où $a_k = \infty$ si $|z| \geq 1/\varepsilon$. Ainsi, pour tout z dans l'image de γ_ε , on a $|S(z) - p| \geq M/2$. Finalement,

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \left| \frac{S'(z)}{S(z) - p} dz \right| \leq \frac{2}{M} \int_{\gamma_\varepsilon} |S'(z) dz|.$$

Quitte à considérer des ε_k pour les faire tendre un à un vers 0, on peut fixer les demi-cercles autour des a_k et faire grandir le grand demi-cercle de rayon $1/\varepsilon$. D'après la majoration (1) du début de la preuve, on peut majorer $|S'(z)|$ pour z dans l'image de γ_ε , indépendamment de ε par une fonction intégrable. Ainsi, le théorème de convergence dominée s'applique. On procède alors de même pour contrôler le comportement sur les demi-cercles restants, de sorte que

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{S'(z)}{S(z) - p} dz \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\widehat{\mathbb{R}}} \frac{S'(z)}{S(z) - p} dz.$$

Par ailleurs, le principe de l'argument permet d'obtenir l'égalité

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{S'(z)}{S(z) - p} dz = \text{Card}(S_{|A_\varepsilon}^{-1}\{p\}) =: a_\varepsilon,$$

où A_ε est la composante bornée délimitée par la courbe de Jordan γ_ε . Or le nombre $a_\varepsilon \in \mathbb{N}$ d'antécédents de p par S dans A_ε croît quand ε tend vers 0 donc converge vers a , le nombre d'antécédents de p par S dans $\mathbb{H} = \bigcup_{\varepsilon > 0} A_\varepsilon$. Par unicité de la limite on obtient donc l'égalité (2).

On a ainsi démontré que S réalise une transformation conforme bijective de \mathbb{H} vers l'intérieur du polygone $b_1 b_2 \dots b_n$, et bijective et continue sur leurs bords. Finalement, le théorème de Carathéodory (théorème 2.7) assure que S est bijective continue de $\mathbb{H} \cup \widehat{\mathbb{R}}$ vers le polygone fermé $b_1 b_2 \dots b_n$. \square

3.1.2 Démonstration du sens indirect

On s'appuiera sur les démonstrations données dans [DT02, p. 10], [Hen74, p. 397] et [SS03, p. 241].

Démonstration. Soit f une application bijective qui transforme conformellement le demi-plan \mathbb{H} vers l'intérieur P d'un polygone de sommets b_1, \dots, b_n et d'angles intérieurs $\pi(1 - \beta_j)$, où $\beta_j \in]-1, 1[$. D'après le théorème de Carathéodory (théorème 2.7), f s'étend en un homéomorphisme de $\overline{\mathbb{H}}$ vers \overline{P} , parce que le bord d'un ouvert simplement connexe à bord polygonal avec des angles intérieurs dans $]0, 2\pi[$ est une courbe de Jordan et que le biholomorphisme de l'exemple 1.8 $\varphi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D}$ s'étend en un homéomorphisme $\varphi : \overline{\mathbb{H}} \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$. On note alors $a_k := f^{-1}(b_k) \in \widehat{\mathbb{R}}$, pour $k \in \{1, \dots, n\}$. On considère $\phi : w \mapsto e^{i\theta} w$ un biholomorphisme de \mathbb{D} , qui agit par rotation d'angle θ par rapport à 0. Alors pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$, le biholomorphisme $\varphi \circ \phi \circ \varphi^{-1}$ envoie a_1, \dots, a_n sur des réels finis. On peut donc supposer les a_k finis.

Soit $k \in \{1, \dots, n\}$, la fonction $z \mapsto f(z) - b_k$ est holomorphe sur l'ouvert simplement connexe \mathbb{H} et ne s'annule pas, car f est injective, donc admet un logarithme, ce qui permet définir la fonction suivante.

$$g_k(z) := (f(z) - b_k)^{\frac{1}{\alpha_k}}.$$

L'application f est continue sur $\overline{\mathbb{H}}$ et $1/\alpha_k > 0$ donc g_k s'étend par continuité sur $\overline{\mathbb{H}}$ et vaut 0 en a_k . De plus, en notant $a_0 := -\infty$ et $a_{n+1} := +\infty$, l'application f envoie les segments $[a_{k-1}, a_k]$ et $[a_k, a_{k+1}]$ sur des segments formant un angle

$$\pi\beta_k = \frac{f(a_{k+1}) - f(a_k)}{f(a_k) - f(a_{k-1})}.$$

Par ailleurs, soit $x \in [f(a_{k-1}), f(a_k)]$ alors $e^{i\pi(1-\beta_k)} x \in [f(a_k), f(a_{k+1})]$ et $g_k(e^{i\pi(1-\beta_k)} x) = (e^{i\pi\alpha_k} x)^{1/\alpha_k} = -x$. Donc g_k envoie les segments $[a_{k-1}, a_k]$ et $[a_k, a_{k+1}]$ sur des segments dirigés selon une même droite et ayant un point commun en 0, c'est-à-dire que g_k envoie le segment $[a_{k-1}, a_{k+1}]$ sur un segment. Ainsi, le principe de réflexion de Schwarz (théorème 3.1) permet d'étendre g_k en une fonction holomorphe sur $A_k := (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) \cup]a_{k-1}, a_{k+1}[$, et si z est dans le demi-plan inférieur, on a la formule

$$g_k(z) = \overline{g_k(\bar{z})}. \quad (3)$$

Montrons que la dérivée de g_k ne s'annule pas. Sur A_k , on a

$$g'_k(z) = \frac{1}{\alpha_k} f'(z)(f(z) - b_k)^{\frac{1-\alpha_k}{\alpha_k}}. \quad (4)$$

Comme f est conforme, f' ne s'annule pas sur \mathbb{H} et donc g'_k non plus. Par (3), g'_k ne s'annule pas non plus sur le demi-plan inférieur. De surcroît, f est injective sur \mathbb{H} donc g_k aussi, donc d'après (3), les points de $x \in]a_{k-1}, a_{k+1}[$ sont de multiplicité 1 dans A_k pour g_k (c'est-à-dire $\text{Card}\{z \in A_k \mid g_k(z) = g_k(x)\} = 1$) donc d'après la remarque 1.5, $g'_k(x) \neq 0$. D'où g_k ne s'annule pas sur A_k .

D'après (4) et le fait que g_k ne s'annule pas sur A_k , on a

$$\begin{aligned} f' &= \alpha_k g'_k g_k^{-\beta_k}, \\ \text{donc} \quad f'' &= \alpha_k g''_k g_k^{-\beta_k} - \alpha_k \beta_k (g'_k)^2 g_k^{-\beta_k - 1}, \\ \text{d'où} \quad \frac{f''}{f'} &= \frac{g''_k}{g'_k} - \beta_k \frac{g'_k}{g_k}. \end{aligned}$$

Or g_k est analytique en a_k , avec $g_k(a_k) = 0$ et $g'_k(a_k) \neq 0$. Donc en développant g_k en série entière et en remarquant que g''_k/g'_k est holomorphe, on obtient que l'application $z \mapsto \frac{f''(z)}{f'(z)} + \frac{\beta_k}{z - a_k}$ est holomorphe sur A_k . Ainsi, comme les A_k sont deux à deux d'intersection connexe et que les intersections recouvrent \mathbb{C} , par prolongement analytique, la fonction

$$z \mapsto \frac{f''(z)}{f'(z)} + \sum_{k=1}^n \frac{\beta_k}{z - a_k} \quad (5)$$

est entière (c'est-à-dire holomorphe sur \mathbb{C}). Par ailleurs, $f(\mathbb{H})$ est un polygone borné et pour $R > 0$ assez-grand, $f([-R, R])$ est inclus dans une droite car les a_k sont finis. Donc d'après le principe de réflexion de Schwarz (théorème 3.1), f s'étend en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus [-R, R]$ qui est bornée. Donc f est analytique à l'infini (c'est-à-dire $z \mapsto f(1/z)$ est analytique en 0), et on note

$$f(z) = c_0 + c_1 z + \frac{c_2}{2!} z^2 + \dots$$

le développement en série entière de f à l'infini. Ainsi, f''/f' tend vers 0 à l'infini. Donc d'après le théorème de Liouville (théorème A.7), la fonction entière (5) est constante et vaut 0 d'après la précédente limite. D'où

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = \sum_{k=1}^n \frac{-\beta_k}{z - a_k}.$$

Comme \mathbb{H} est simplement connexe et que f' ne s'annule pas sur \mathbb{H} , f' admet un logarithme noté $\log f'$. On remarque alors que

$$(\log f')' = f''/f' = \sum_{k=1}^n \frac{-\beta_k}{z - a_k}.$$

Par connexité de \mathbb{H} , il existe une constante C_0 telle que pour tout $z \in \mathbb{H}$,

$$\log(f'(z)) = C_0 + \sum_{k=1}^n \log_{-\pi/2}((z - a_k)^{-\beta_k}). \quad (6)$$

Donc,

$$\begin{aligned} f'(z) &= \exp(C_0) \exp\left(\sum_{k=1}^n \log_{-\pi/2}((z - a_k)^{-\beta_k})\right) \\ &= \exp(C_0) \prod_{k=1}^n \exp(\log_{-\pi/2}((z - a_k)^{-\beta_k})) \\ &= \exp(C_0) \prod_{k=1}^n (z - a_k)^{-\beta_k} \end{aligned}$$

D'où, en posant $C := \exp(C_0)$,

$$f(z) = C \int \frac{dz}{(z - a_1)^{\beta_1} \dots (z - a_n)^{\beta_n}}.$$

Pour se ramener au cas où ∞ est envoyé sur un sommet du polygone, on se réfère à la preuve donnée dans [SS03, p. 245]. \square

Remarque 3.4. Dans la réciproque du théorème de Schwarz-Christoffel (théorème 3.3), les angles intérieurs peuvent avoir une mesure dans $]0, 2\pi[$ exclus, c'est-à-dire que le polygone n'est pas forcément convexe. La mesure d'angle π est le cas où l'exposant est nul et le polygone admet un angle plat, donc pas de sommet. On verra dans la section 3.3 qu'en fait, cette formule fonctionne pour une mesure d'angle 2π , donnant un ouvert de la forme d'un peigne (le bord du polygone "rebrousse chemin"), et même pour une mesure d'angle dans $[-2\pi, 0]$, donnant un polygone non borné.

Par ailleurs, il est difficile de trouver les bons a_1, \dots, a_{n-1} qui forment un polygone dont les longueurs des côtés sont désirées (et qui soit d'intérieur simplement connexe). C'est l'objet du livre [DT02] entre autres.

3.2 Formule de Schwarz-Christoffel sur le disque

On vient d'étudier une formule qui permet de transformer conformellement le demi-plan \mathbb{H} en un ouvert simplement connexe bordé par un polygone. On peut vouloir se ramener au cadre du théorème de représentation conforme (théorème 2.1) et partir du disque \mathbb{D} . Pour cela, on peut composer par la bijection conforme de l'exemple 1.8, ce qui donne le théorème suivant, dont on peut trouver une démonstration dans [Neh75, p. 192].

Théorème 3.5 (Formule de Schwarz-Christoffel sur \mathbb{D}). *Soit $|a_1| = |a_2| = \dots = |a_n| = 1$ des complexes ordonnés sur le cercle unité et $\beta_1, \dots, \beta_n \in]0, 1[$ tels que $\sum_{j=1}^n \beta_j = 2$. On définit l'application S à constante près par*

$$S(z) := \int \frac{dz}{(1 - \bar{a}_1 z)^{\beta_1} \dots (1 - \bar{a}_n z)^{\beta_n}}$$

Alors, l'application S réalise une transformation conforme bijective du disque \mathbb{D} vers l'intérieur du polygone convexe dont les sommets sont $b_j := S(a_j)$ pour $j \in \{1, \dots, n\}$,

et les angles intérieurs aux sommets b_j sont $\pi(1 - \beta_j)$. De plus, l'application S est un homéomorphisme de \mathbb{D} vers le polygone fermé $b_1b_2 \dots b_n$, qui est convexe.

Réciproquement, soit f une application bijective qui transforme conformellement le disque \mathbb{D} vers l'intérieur d'un polygone à n sommets, pas nécessairement convexe, dont les angles intérieurs aux sommets sont $\pi(1 - \beta_j)$, où $\beta_j \in]-1, 1[$. Alors, il existe $|a_1| = |a_2| = \dots = |a_n| = 1$ tels que f est de la forme

$$f(z) = C \int \frac{dz}{(1 - \bar{a}_1 z)^{\beta_1} \dots (1 - \bar{a}_n z)^{\beta_n}}$$

où C est une constante complexe non nulle.

Remarque 3.6. On définit cette fois-ci la fonction puissance par $z^\beta := \exp(\beta \text{Log}(z))$.

3.3 Exemples d'applications de Schwarz-Christoffel

Selon [DT02, p. 1], la plupart des transformations conformes dont on connaît le développement analytique sont des applications de Schwarz-Christoffel ou des analogues. On s'appuiera notamment sur des exemples donnés dans [DT02] et [BM86].

Exemple 3.7. L'application suivante réalise une transformation conforme bijective de \mathbb{D} dans l'intérieur d'un polygone régulier à n côtés (voir figure 6) :

$$f_n(z) = \int_0^z (1 - \zeta^n)^{-2/n} d\zeta.$$

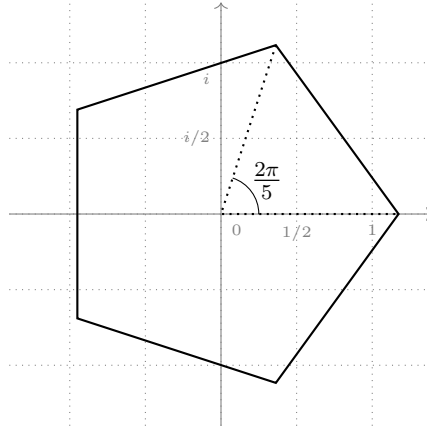


FIGURE 6 – L'image de \mathbb{D} par f_5 est un pentagone régulier de grand rayon $R = \frac{1}{5}B(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}) \simeq 1,17445\dots$

En effet, en notant $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}$ les racines n -ième de l'unité ($\zeta_k := e^{2ik\pi/n}$), on a

$$\begin{aligned} f_n(z) &= \int_0^z [-(\zeta - \zeta_0) \dots (\zeta - \zeta_{n-1})]^{-2/n} d\zeta \\ &= (\zeta_0 \dots \zeta_{n-1})^{-2/n} \int_0^z (1 - \bar{\zeta}_0 \zeta)^{-2/n} \dots (1 - \bar{\zeta}_{n-1} \zeta)^{-2/n} d\zeta \end{aligned}$$

avec $\sum_{j=0}^{n-1} 2/n = 2$ et $\zeta_0 \dots \zeta_{n-1} = 1$. Ainsi, l'image du disque unité par f_n est un polygone à n sommets dont les angles intérieurs sont égaux. On remarque que f_n présente une

symétrie par rotation d'angle $2\pi/n$ car $\zeta_1^n = 1$ (changement de variable $\zeta \mapsto \zeta_1\zeta$) :

$$f_n(\zeta_1 z) = \int_0^z (1 - (\zeta_1\zeta)^n)^{-2/n} d(\zeta_1\zeta) = \zeta_1 f_n(z).$$

Donc $f_n(\mathbb{D})$ est un polygone régulier. On calcule le grand rayon grâce au changement de variable $u = 1 - x^n$:

$$R = \int_0^1 (1 - x^n)^{-\frac{2}{n}} dx = -\frac{1}{n} \int_1^0 u^{-\frac{2}{n}} (1 - u)^{\frac{1}{n}-1} du = \frac{1}{n} \int_0^1 u^{(1-\frac{2}{n})-1} (1 - u)^{\frac{1}{n}-1} du.$$

On rappelle les fonctions Gamma et Bêta définies (au moins) pour α et β de partie réelle strictement positive. Ces fonctions sont étudiées dans [BM86, p. 193],

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt,$$

$$B(\alpha, \beta) := \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

On peut alors écrire que

$$R = \frac{1}{n} B\left(1 - \frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \frac{\Gamma(\frac{1}{n})\Gamma(1 - \frac{2}{n})}{\Gamma(1 - \frac{1}{n})}.$$

On trouve la longueur d'un côté du polygone régulier par un argument de géométrie :

$$L = 2R \sin\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Il reste à utiliser la formule des compléments :

$$\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha),$$

pour obtenir que

$$L = \frac{2\pi}{n} \frac{\Gamma(1 - \frac{2}{n})}{\Gamma(1 - \frac{1}{n})^2}.$$

Exemple 3.8. L'application suivante s réalise une transformation conforme de \mathbb{D} dans l'intérieur d'une étoile à cinq branches (voir figure 7). Le théorème 3.5 n'assure par contre pas l'injectivité de s .

$$s(z) = \int_0^z \frac{(1 - \zeta^5)^{2/5}}{(1 + \zeta^5)^{4/5}} d\zeta.$$

En effet, les pré-images des sommets (pré-sommets) sont les racines 10èmes de l'unité ζ_0, \dots, ζ_9 associées successivement à un angle intérieur $\pi(1 - (-\frac{2}{5})) = \frac{7\pi}{5}$ puis $\pi(1 - \frac{4}{5}) = \frac{\pi}{5}$. L'application s présente de plus une symétrie par rotation d'angle $\frac{\pi}{5}$, car $\zeta_2^5 = 1$. Donc $s(\mathbb{D})$ est une étoile régulière à 5 branches. On peut calculer les rayons des cercles inscrit (R_i) et circonscrit (R_c).

$$R_i := \int_0^1 \frac{(1 - x^5)^{2/5}}{(1 + x^5)^{4/5}} dx,$$

$$R_c := \int_0^{\zeta_1} \frac{(1 - x^5)^{2/5}}{(1 + x^5)^{4/5}} dx = \int_0^1 \frac{(1 + x^5)^{2/5}}{(1 - x^5)^{4/5}} dx.$$

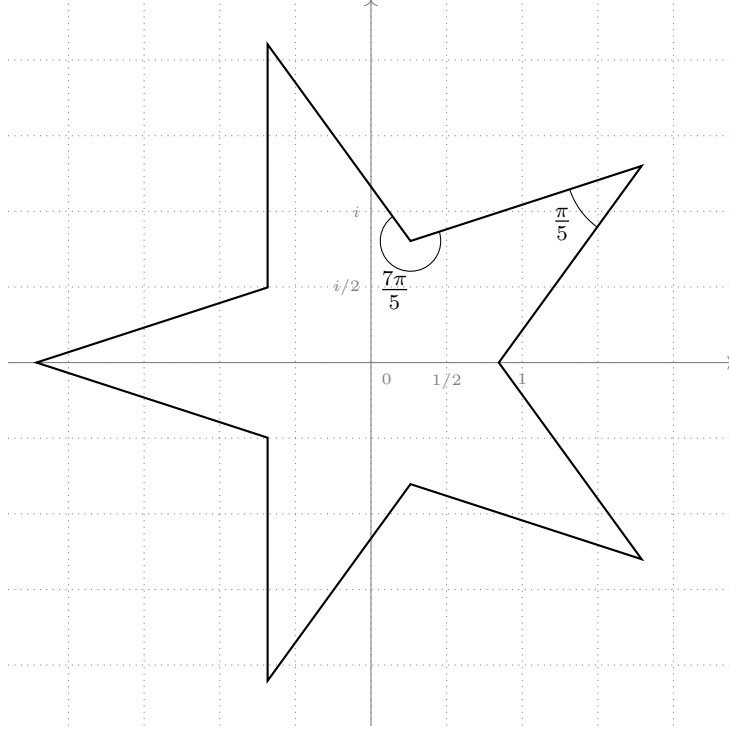


FIGURE 7 – L'image de \mathbb{D} par s est une étoile régulière de rayons $R_i \simeq 0,845\dots$ et $R_c \simeq 2,212\dots$

Pour le cercle inscrit, on pose le changement de variable $u = \left(\frac{1-x^5}{1+x^5}\right)^2 \Leftrightarrow x = \left(\frac{1-\sqrt{u}}{1+\sqrt{u}}\right)^{1/5}$,

$$1 + x^5 = \frac{2}{1 + \sqrt{u}} \quad \text{et} \quad 1 - x^5 = \frac{2\sqrt{u}}{1 + \sqrt{u}},$$

$$dx = \frac{1}{5}u^{-1/2}(1 + \sqrt{u})^{-6/5}(1 - \sqrt{u})^{-4/5}du.$$

Ainsi,

$$\frac{(1 - x^5)^{2/5}}{(1 + x^5)^{4/5}}dx = \frac{1}{5 \cdot 2^{2/5}}u^{-3/10}(1 - u)^{-4/5}du.$$

Finalement,

$$R_i = \frac{1}{5 \cdot 2^{2/5}}B\left(\frac{7}{10}, \frac{1}{5}\right).$$

Avec le même changement de variable, on calcule que

$$R_c = \frac{1}{5 \cdot 2^{2/5}}B\left(\frac{1}{10}, \frac{1}{5}\right).$$

Exemple 3.9. L'exemple suivant ne rentre pas stricto sensu dans le cadre du théorème 3.5 car on autorise un angle qui vaut 2π mais en choisissant les bons points de départ, il est quand même possible de définir l'application suivante qui réalise une transformation conforme (a priori non injective) de \mathbb{D} dans l'intérieur d'un "peigne" (voir figure 8) :

$$p(z) = \int_0^z \frac{(1 - \zeta)^{3/2}}{(1 - \zeta^7)^{1/2}}d\zeta.$$

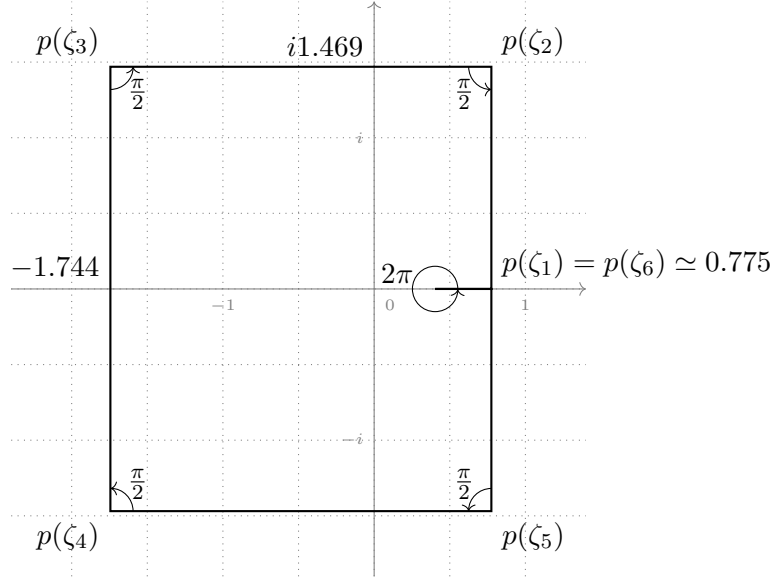


FIGURE 8 – L’image de \mathbb{D} par p est l’intérieur d’un rectangle auquel on a retiré un segment (un “peigne”).

En effet, les pré-images des sommets sont les racines 7èmes de l’unité ζ_0, \dots, ζ_6 . Le pré-sommet $\zeta_0 = 1$ est associé à un angle intérieur $\pi(1 - (1/2 - 3/2)) = 2\pi$, ce qui correspond à rebrousser chemin lorsque l’on parcourt les sommets du bord du polygone. Les autres pré-sommets sont associés à un angle intérieur $\pi/2$. De plus, $z^\beta = \exp(\beta \text{Log}(z))$ et $\text{Log}(\bar{z}) = \overline{\text{Log}(z)}$ donc $\bar{z}^\beta = \overline{z^\beta}$, donc p admet une symétrie par réflexion par rapport à l’axe réel :

$$p(\bar{z}) = \int_0^z \frac{(1 - \bar{\zeta})^{3/2}}{(1 - \bar{\zeta}^7)^{1/2}} d(\bar{\zeta}) = \overline{p(z)}.$$

Il est difficile d’évaluer les valeurs de p aux pré-sommets, c’est d’ailleurs l’un des enjeux du livre [DT02]. Pour se donner une idée de l’image de \mathbb{D} par p , on calcule l’image de certains points du bord $\partial\mathbb{D}$ de \mathbb{D} afin de reconstituer $p(\mathbb{D})$ grâce aux connaissances théoriques (symétrie par rapport à l’axe réel, $p(\partial\mathbb{D})$ est un polygone dont on connaît les angles intérieurs). On calcule avec Maple que $S(\zeta_0) = S(1) \simeq 0,403\dots$ et $S(-1) \simeq -1,744\dots$, avec -1 qui se situe entre ζ_3 et ζ_4 sur $\partial\mathbb{D}$, et on évalue en une valeur entre ζ_2 et ζ_3 et une entre ζ_1 et ζ_2 , afin d’obtenir la figure 8 qui donne une idée de l’image de \mathbb{D} par p .

Même si on peut penser que cette application est bien injective sur \mathbb{D} , elle ne s’étend pas en une fonction injective sur le bord, à cause du chevauchement des segments $[p(1), p(\zeta_1)]$ et $[p(1), p(\zeta_6)]$.

Exemple 3.10. Nous allons étudier un dernier exemple, qui ne rentre pas non plus dans le cadre du théorème de Schwarz-Christoffel sur le demi-plan (théorème 3.3) mais qui illustre bien la portée de la formule de Schwarz-Christoffel et à quel point elle correspond surtout à l’idée de “plier” la droite réelle plutôt qu’à un biholomorphisme entre deux ouverts.

On considère un “triangle” d’angles intérieurs $\pi\alpha_1, \pi\alpha_2, \pi\alpha_3$, avec $\alpha_j \in [-2, 2]$ et $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$. On considère une fonction de la forme du théorème 3.3 que l’on réécrit

$$B(\alpha_1, \alpha_2)[z] := \int z^{\alpha_1-1} (1-z)^{\alpha_2-1} dz.$$

On reconnaît l'intégrande de la fonction Bêta qui justifie la notation $B(\alpha_1, \alpha_2)[z]$. Pour obtenir un "triangle" avec deux sommets à l'infini, par exemple les sommets associés aux angles α_1 et α_3 , on prend $\alpha_1, \alpha_3 \leq 0$ et donc $\alpha_2 = 1 - \alpha_1 - \alpha_3 \geq 1$, ainsi le "triangle" est en fait une bande dont l'un des côtés est plié vers l'extérieur avec un angle α_2 . Selon [DT02, p. 16], l'image de \mathbb{H} par cette fonction ressemble à la figure 9.

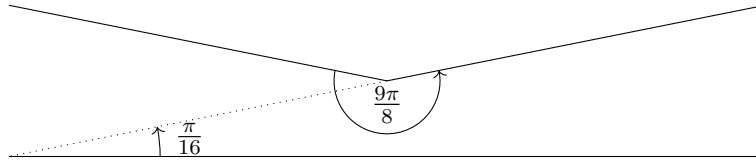


FIGURE 9 – Image de \mathbb{H} par $B\left(\frac{1}{16}, \frac{9}{8}\right)[z]$.

4 Ouverts doublement connexes

Dans cette section, on s'intéresse à généraliser ce qui a été vu dans les sections précédentes à des ouverts doublement connexes (avec un trou), définis ci-après. Nous avons étudié la relation d'équivalence définie sur les ouverts de \mathbb{C} donnée par l'existence d'un biholomorphisme entre deux ouverts. Étant donné qu'un biholomorphisme est un homéomorphisme, si deux ouverts sont équivalents alors ils conservent les mêmes propriétés topologiques (simple ou double connexité). Ainsi, le théorème de représentation conforme (théorème 2.1) affirme que pour les ouverts simplement connexes, il n'y a que deux classes d'équivalence pour l'équivalence conforme : $\{\mathbb{C}\}$ et l'ensemble des autres ouverts simplement connexes. Par ailleurs, la formule de Schwarz-Christoffel donne explicitement le biholomorphisme entre le disque et un polygone. Nous allons voir comment ces résultats s'adaptent au cas des ouverts doublement connexes. On s'appuiera sur les ouvrages [Neh75], [Hen86] et [DT02].

Définition 4.1. Soit U un ouvert connexe de \mathbb{C} . On suppose que le complémentaire de U dans \mathbb{C} admet exactement k composantes connexes bornées B_1, \dots, B_k et on note $\Omega := \mathbb{C} \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_k)$ la partie non bornée ou vide (non nécessairement connexe). On dit alors que U est *multiplement connexe*. Si $k = 1$, on dit que U est *doublement connexe*.

Remarque 4.2. Si $k = 0$, alors U est simplement connexe.

Exemple 4.3. Une couronne $C(r, R) := \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z| < R\}$, avec $0 \leq r < R \leq +\infty$, est un ouvert doublement connexe. Si $0 < r < R < +\infty$, on dit que la couronne $C(r, R)$ est non-dégénérée. On dit de même qu'un ouvert doublement connexe est non dégénéré si la composante bornée du complémentaire n'est pas réduite à un singleton et si Ω est non vide.

4.1 Équivalence conforme entre ouverts doublement connexes

Le théorème de représentation conforme (théorème 2.1) n'est pas vrai pour deux ouverts doublement connexes, car on peut trouver deux couronnes qui ne sont pas conformellement équivalentes. Plus précisément, on a le résultat suivant.

Proposition 4.4. *Soient deux couronnes non dégénérées $C_1 := C(r_1, R_1)$ et $C_2 := C(r_2, R_2)$. Alors C_1 et C_2 sont conformellement équivalentes si et seulement si $r_1/R_1 = r_2/R_2$. On dit alors que R_1/r_1 est le module de conformité de C_1 .*

Démonstration. Supposons $r_1/R_1 = r_2/R_2 =: \mu$. Pour $k \in \{1, 2\}$, l'application $f_k : z \mapsto z/R_k$ transforme conformellement C_k sur $C(\mu, 1)$ et donc $f_2^{-1} \circ f_1$ transforme conformellement C_1 sur C_2 .

Supposons maintenant qu'il existe une application f qui transforme conformellement C_1 sur C_2 . D'après ce qui précède, on peut supposer que $C_1 = C(\mu_1, 1)$ et $C_2 = C(\mu_2, 1)$, et montrer que $\mu_1 = \mu_2$. Nous allons utiliser un lemme, analogue au théorème 3.1, et qui est un cas particulier du théorème démontré dans [Hen74, p. 389, Theorem 5.11b, The reflexion principle].

Lemme 4.5 (Principe de réflexion). *Soit Γ_1, Γ_2 des cercles centrés en 0 de rayons respectifs μ_1, μ_2 . Pour $k \in \{1, 2\}$, on note r_k la réflexion par rapport à Γ_k , donnée par $r_k(z) = \mu_k^2/\bar{z}$. Soit U un domaine dont le bord contient Γ_1 . Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ telle que*

1. f est holomorphe sur U ,
2. f est continue sur $U \cup \Gamma_1$,
3. $f(\Gamma_1) \subset \Gamma_2$.

Alors, f peut être étendue en une fonction f^ holomorphe sur $U \cup \Gamma_1 \cup r_1(U)$, par la formule $f^* \circ r_1 = r_2 \circ f$ sur U .*

Pour appliquer le lemme à f , $U := C_1$ et Γ_k le cercle de centre 0 et rayon μ_k , il s'agit de montrer que f vérifie les points 2 et 3 du lemme 4.5. Soit $e^{i\theta}$ un complexe de module 1, et $0 < \varepsilon < \pi$. On considère la bande $B := \{re^{i(\theta+t)} \mid -\varepsilon \leq t \leq \varepsilon, \mu_1 < r < 1\}$. Ainsi, $V := C_1 \setminus B$ est un ouvert simplement connexe et bordé par une courbe de Jordan et $f : V \rightarrow f(V)$ est une transformation conforme bijective. Donc d'après le théorème 2.7, f s'étend en une fonction continue et injective sur l'adhérence de V . Cette fonction ne dépend que des valeurs de f sur C_1 et donc on peut étendre f par continuité sur $C_1 \cup \Gamma_1$ en prenant deux θ distincts et ε suffisamment petit. Un troisième θ donne l'injectivité de l'extension de f (qu'on note encore f). Donc par injectivité $f(\Gamma_1) \subset \partial C_2$, par continuité $f(\Gamma_1)$ est incluse soit dans Γ_2 soit dans $\partial \mathbb{D}$ et par conformité $f(\Gamma_1) \subset \Gamma_2$. Ainsi, le lemme 4.5 s'applique, et f s'étend en une fonction holomorphe sur $C(\mu_1^2, 1)$ (qu'on note encore f). D'après la formule pour l'extension, on remarque qu'en fait f transforme conformellement $C(\mu_1^2, 1)$ sur $C(\mu_2^2, 1)$.

En répétant l'argument n fois pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient que f transforme conformellement $C(\mu_1^n, 1)$ sur $C(\mu_2^n, 1)$. Or μ_1^n et μ_2^n tendent vers 0 quand n tend vers $+\infty$, donc on peut étendre f en une transformation conforme bijective de $C(0, 1) = \mathbb{D} \setminus \{0\}$ dans elle-même. Ainsi, l'application f est holomorphe bornée sur $\mathbb{D} \setminus \{0\}$, donc 0 est une singularité effaçable et $f(0) = 0$. Donc f est un automorphisme de \mathbb{D} fixant 0. D'après le lemme de Schwarz (lemme A.9), $|f'(0)| \leq 1$. Or $(f^{-1})'(0) = 1/f'(0)$, donc $|f'(0)| = 1$. Puis par le même lemme, f est de la forme $z \mapsto \lambda z$, avec $|\lambda| = 1$. Ainsi, $\mu_1 = |f(\mu_1)| = \mu_2$, ce qui conclut la preuve. \square

Théorème 4.6. *Tout ouvert doublement connexe non dégénéré U est conformellement équivalent à une couronne $C(\mu, 1)$, où $\mu \in]0, 1[$. On appelle module de conformité de U le réel μ^{-1} et il est uniquement associé à U d'après la proposition 4.4.*

On peut trouver une démonstration de ce théorème dans [Hen86, p. 445, Theorem 17.1a].

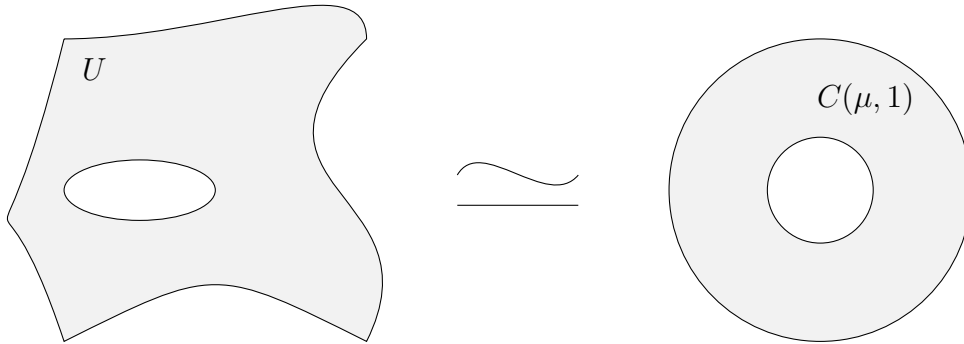


FIGURE 10 – Illustration du théorème 4.6.

Remarque 4.7. Les classes d'équivalence conforme des ouverts doublement connexes non dégénérés sont paramétrées par le module de conformité, un réel $\mu^{-1} \in]1, +\infty[$.

Pour des ouverts multiplement connexes, il est moins évident de trouver des exemples canoniques, comme le disque ou les couronnes par exemple. Il est pourtant possible de démontrer un résultat analogue aux théorèmes 2.1 et 4.6. Selon [Hen86, p. 451, Theorem 17.1b], un ouvert multiplement connexe non dégénéré dont le complémentaire admet k composantes connexes bornées, est conformellement équivalent à une couronne $C(\mu, 1)$ à laquelle on retire $k - 1$ arcs de cercles (voir figure 11).

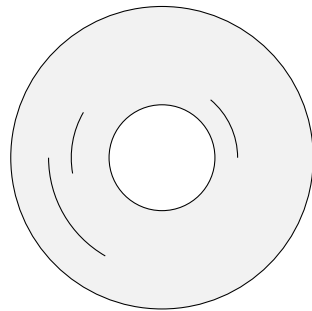


FIGURE 11 – Exemple d'ouvert quintuplement connexe "canonique".

4.2 Formule de Schwarz-Christoffel généralisée

On vient de voir qu'il est possible de classifier les ouverts connexes de \mathbb{C} , dont le complémentaire admet un nombre fini de composantes bornées, pour la relation d'équivalence conforme. Étudions maintenant des transformations conformes explicites entre des ouverts canoniques (couronnes) et des ouverts délimités par des polygones.

Définition 4.8. Soit $\mu \in]0, 1[$ et $z \in \mathbb{D}$. On définit la fonction Thêta par

$$\Theta(z, \mu) := \prod_{j=1}^{\infty} (1 - \mu^{2^{j-1}} z)(1 - \mu^{2^{j-1}} z^{-1}).$$

Théorème 4.9 (Formule de Schwarz-Christoffel sur $\mathbb{C}(\mu, 1)$). Soit $\mu \in]0, 1[$ et f une application bijective qui transforme conformellement $\mathbb{C}(\mu, 1)$ vers un ouvert U doublement connexe bordé par un polygone simple intérieur P_i et un polygone simple extérieur P_e . On note $\pi\alpha_{e,1}, \dots, \pi\alpha_{e,m} \in]-0, 2]$ les angles intérieurs aux m sommets de P_e , et $\pi\alpha_{i,1}, \dots, \pi\alpha_{i,n} \in]-0, 2]$ les angles des n sommets de P_i mesurés à l'intérieur de U . On remarque que $\sum_{k=1}^m \alpha_{e,k} = m - 2$ et $\sum_{k=1}^n \alpha_{i,k} = n + 2$. Alors, il existe $|a_{e,1}| = \dots = |a_{e,m}| = 1$ et $|a_{i,1}| = \dots = |a_{i,n}| = \mu$ tels que f est de la forme

$$f(z) = C \int \prod_{k=1}^m \left[\Theta\left(\frac{z}{\mu a_{e,k}}, \mu\right) \right]^{\alpha_{e,k}-1} \prod_{k=1}^n \left[\Theta\left(\frac{\mu z}{a_{i,k}}, \mu\right) \right]^{\alpha_{i,k}-1} dz$$

où C est une constante complexe non nulle.

On peut trouver une démonstration de ce théorème dans [DT02, p. 64].

Remarque 4.10. Il découle de l'existence de f que les polygones ne se croisent pas.

Exemple 4.11. Soit $m, n > 2$ des entiers. D'après les théorèmes 4.6 et 4.9, il existe $\mu \in]0, 1[$, $|a_{e,1}| = \dots = |a_{e,m}| = 1$ et $|a_{i,1}| = \dots = |a_{i,n}| = \mu$ tels que la fonction suivante est une transformation conforme bijective de la couronne $C(\mu, 1)$ vers un ouvert bordé par des polygones réguliers à m côtés à l'extérieur et n côtés à l'intérieur (voir figure 12),

$$f_{m,n}(z) = \int \prod_{k=1}^m \left[\Theta\left(\frac{z}{\mu a_{e,k}}, \mu\right) \right]^{-\frac{2}{m}} \prod_{k=1}^n \left[\Theta\left(\frac{\mu z}{a_{i,k}}, \mu\right) \right]^{-\frac{2}{n}} dz$$

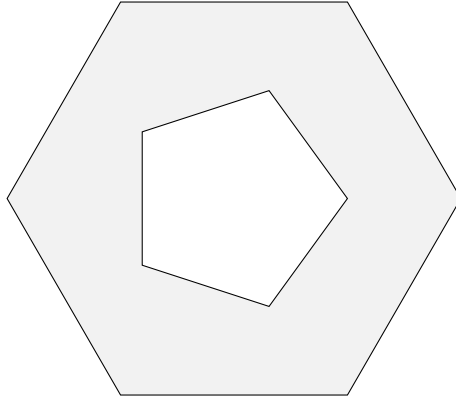


FIGURE 12 – Image de $C(\mu, 1)$ par $f_{6,5}$.

Références

- [APP11] Ravi P. AGARWAL, Kanishka PERERA et Sandra PINELAS. *An introduction to Complex Analysis*. Springer New York, NY, 2011.
- [BM86] François BAYEN et Christian MARGARIA. *Problèmes de mathématiques appliquées*. Paris : Ed. Marketing, 1986.
- [DT02] Tobin A. DRISCOLL et Lloyd Nicholas TREFETHEN. *Schwarz-Christoffel mapping*. Cambridge monographs on applied and computational mathematics. Cambridge University Press, 2002.
- [Hen74] Peter HENRICI. *Applied and computational complex analysis. Volume 1. Power series - Integration - Conformal mapping - Location of zeros*. Pure and applied mathematics a Wiley-Interscience series of texts, monographs, and tracts. J. Wiley et Sons, 1974.
- [Hen86] Peter HENRICI. *Applied and computational complex analysis. Volume 3. Discrete Fourier analysis - Cauchy integrals - Construction of conformal maps - Univalent functions*. Pure and applied mathematics a Wiley-Interscience series of texts, monographs, and tracts. J. Wiley et Sons, 1986.
- [Neh75] Zeev NEHARI. *Conformal mapping*. Dover Publications, 1975.
- [Pom92] Christian POMMERENKE. *Boundary Behaviour of Conformal Maps*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 299. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1992.
- [Rud87] Walter RUDIN. *Real and complex analysis*. 3rd edition. McGraw-Hill, 1987.
- [Ser24] Thomas SERAFINI. *DM Schwarz-Christoffel*. ENS PSL. 2024. URL : <https://www.math.ens.psl.eu/~tserafini/DM%20Schwarz%20Christoffel.pdf>.
- [SS03] Elias M. STEIN et Rami SHAKARCHI. *Princeton lecture in Complex Analysis, Volume II*. Princeton University Press, 2003.
- [Wal33] J. L. WALSH. « The Cauchy-Goursat Theorem for Rectifiable Jordan Curves ». In : *Proceedings of the National Academy of Sciences* 19.5 (1933), p. 540-541. URL : <https://www.pnas.org/doi/abs/10.1073/pnas.19.5.540>.

A Rappels d'analyse complexe

On rappelle certains résultats d'analyse complexes, dont la démonstration peut par exemple être trouvée dans [Rud87], [Hen74] et [SS03].

Proposition A.1. [Hen74, p. 198, Theorem 4.3a]. *Soit $f \in \mathcal{H}(U)$. Si pour tout lacet γ à valeur dans U , $\int_{\gamma} f = 0$ alors f admet une primitive.*

Proposition A.2. [Hen74, p. 200, Theorem 4.3d]. *Soit U ouvert de \mathbb{C} , $f \in \mathcal{H}(U)$. Si γ et η sont des lacets \mathcal{C}^1 par morceaux homotopes dans U , alors*

$$\int_{\gamma} f = \int_{\eta} f.$$

Théorème A.3 (Cauchy-Goursat). [Hen74, p. 201, Theorem 4.3e]. *Soit U un ouvert simplement connexe de \mathbb{C} , γ un chemin \mathcal{C}^1 par morceaux à valeurs dans U , et $f \in \mathcal{H}(U)$. Alors,*

$$\int_{\gamma} f = 0.$$

Théorème A.4 (Hurwitz). [Hen74, p. 283, Theorem 4.10f]. *Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{H}(U)$ qui converge uniformément sur les compacts vers $f \in \mathcal{H}(U)$. Si les f_n sont injectives, alors f est constante ou injective.*

Théorème A.5 (Théorème des zéros isolés). [Rud87, p. 209, Corollary]. *Soit U un ouvert connexe et $f \in \mathcal{H}(U)$ non constante. Alors $Z(f) := f^{-1}\{0\}$ est un ensemble localement fini.*

Théorème A.6 (Principe du maximum). [Rud87, p. 212, Theorem 10.23]. *Soit f une fonction holomorphe sur U domaine de \mathbb{C} , et continue au bord. Alors,*

$$\forall z \in U, |f(z)| \leq \sup_{w \in \partial U} |f(w)|.$$

Théorème A.7 (Liouville). [Rud87, p. 212, Theorem 10.24]. *Soit f une fonction holomorphe sur \mathbb{C} (on dit que f est entière). Si f est bornée, alors f est constante.*

Théorème A.8 (Théorème de l'application ouverte). [Rud87, p. 216, Theorem 10.32]. *Soit U domaine, $f \in \mathcal{H}(U)$ non constante et $z_0 \in U$ tel que $f(z_0) = 0$. Alors il existe un voisinage V de z_0 , $\psi_1 : V \rightarrow \psi_1(V)$ et $\psi_2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ deux biholomorphismes, tels que*

$$f = \psi_2^{-1} \circ \phi_m \circ \psi_1$$

où $m = \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid f^{(n)}(z_0) \neq 0\}$ et $\phi_m : z \mapsto z^m$. En particulier, f est ouverte.

Lemme A.9 (Lemme de Schwarz). [Rud87, p. 254, Theorem 12.2]. Soit f une fonction holomorphe de \mathbb{D} dans \mathbb{D} , qui s'annule en 0. Alors,

1. $|f(z)| \leq |z|$,
2. $|f'(0)| \leq 1$;

s'il y a égalité dans l'une des deux inégalités (pour un certain $z \neq 0$), alors $f : z \mapsto \lambda z$, où $|\lambda| = 1$.

Proposition A.10. [SS03, p. 23, Corollary 3.4]. Soit U ouvert connexe de \mathbb{C} , et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Si $f' = 0$, alors f est constante.

Théorème A.11 (Goursat). [SS03, p. 34, Theorem 1.1]. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Alors, pour tout triangle (convexe fermé) $\Delta \subset U$,

$$\int_{\partial\Delta} f = 0.$$

Théorème A.12 (Inégalités de Cauchy). [SS03, p. 48, Theorem 4.3]. Soit $f \in \mathcal{H}(U)$, $z_0 \in U$ et $r > 0$ tel que $\overline{D}(z_0, r) \subset U$. Alors, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} \sup\{|f(z)|, z \in C(0, r)\}.$$

Théorème A.13 (Morera). [SS03, p. 53, Theorem 5.1]. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue telle que pour tout triangle (convexe fermé) $\Delta \subset U$,

$$\int_{\partial\Delta} f = 0.$$

Alors f est holomorphe sur U .

Théorème A.14 (Weierstrass). [SS03, p. 54, Theorem 5.3]. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{H}(U)$ qui converge uniformément sur les compacts vers une fonction f . Alors $f \in \mathcal{H}(U)$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $(f_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur les compacts vers $f^{(k)}$.

Théorème A.15 (Principe de l'argument). [SS03, p. 90, Theorem 4.1]. Soit f une fonction méromorphe sur U un ouvert simplement connexe de \mathbb{C} . On note $A(f)$ les pôles de f et $Z(f)$ les zéros de f . Si $z_0 \in A(f) \cup Z(f)$, on note $k(z_0)$ sa multiplicité. Soit γ un lacet à valeurs dans U qui évite $A(f) \cup Z(f)$. Alors,

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{z_0 \in Z(f)} k(z_0) \text{Ind}_{\gamma}(z_0) - \sum_{z_1 \in A(f)} k(z_1) \text{Ind}_{\gamma}(z_1).$$